50 Bài tập về bất đẳng thức

Bài 1: Cho $a \geq 3$, tìm giá trị nhỏ nhất của $\mathrm{S} = a + \frac{1}{a}$

Giải: $S = a + \frac{1}{a} = \frac{8a}{9} + (\frac{a}{9} + \frac{1}{a}) \geq \frac{24}{9} + 2\sqrt{\frac{a}{9}.\frac{1}{a}} = \frac{10}{3}$

Bài 2: Cho $a \geq 2$, tìm giá trị nhỏ nhất của $\mathrm{S} = a + \frac{1}{a^2}$

Giải: $\mathrm{S} = a + \frac{1}{a^2} = \frac{6a}{8} + (\frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2}) \geq \frac{12}{8} + 3\sqrt[3]{\frac{a}{8}.\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}} = \frac{12}{8} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

Bài 3: Cho a, b > 0 và $a + b \leq 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của $\mathrm{S} = ab + \frac{1}{ab}$

Giải: $\mathrm{S} = ab + \frac{1}{ab} = (ab + \frac{1}{16ab}) + \frac{15}{16ab} \geq 2\sqrt{ab\frac{1}{16ab}} + \frac{15}{16\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \frac{17}{4}$

Bài 4: Cho a, b, c> 0 và $a + b + c \leq \frac{3}{2}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $\mathrm{S} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$

Giải:

Cách 1:

$$S = \sqrt{a^2 + \underbrace{\frac{1}{16b^2} + \ldots + \frac{1}{16b^2}}_{16}} + \sqrt{b^2 + \underbrace{\frac{1}{16c^2} + \ldots + \frac{1}{16c^2}}_{16}} + \sqrt{c^2 + \underbrace{\frac{1}{16a^2} + \ldots + \frac{1}{16a^2}}_{16}} \geq$$

$$\geq \sqrt{17.\sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16}b^{32}}}} + \sqrt{17.\sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16}b^{32}}}} + \sqrt{17.\sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16}b^{32}}}} = \sqrt{17}\left[\sqrt[17]{\frac{a}{16^8 b^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{b}{16^8 c^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{c}{16^8 a^{16}}}\right] \geq$$

$$\geq 3\sqrt{17}.\sqrt[17]{\frac{1}{16^8 a^5 b^5 c^5}} = \frac{3\sqrt{17}}{2\sqrt[17]{(2a.2b.2c)^5}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2\sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Cách 2:

$$\mathrm{S} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$$

$$(1^2 + 4^2)(a^2 + \frac{1}{b^2}) \geq (1.a + 4.\frac{1}{b})^2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{17}}(a + \frac{4}{b})$$

Tương tự

$$\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{17}}(b+\frac{4}{c}); \sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{17}}(c+\frac{4}{a})$$

Do đó:

$$S \geq \frac{1}{\sqrt{17}}(a+b+c+\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}) \geq \frac{1}{\sqrt{17}}(a+b+c+\frac{36}{a+b+c})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{17}}\left[(a+b+c+\frac{9}{4(a+b+c)})+\frac{135}{4(a+b+c)}\right] \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Bài 5: Cho x, y, z là ba số thực dương và $x+y+z \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{z^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{x^2}} \geq \sqrt{82}$$

Giải:

$$(1.x+9.\frac{1}{y})^2 \leq (1^2+9^2)(x^2+\frac{1}{y^2}) \Rightarrow \sqrt{x^2+\frac{1}{y^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{82}}(x+\frac{9}{y})$$

$$TT: \sqrt{y^2+\frac{1}{z^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{82}}(y+\frac{9}{z}); \sqrt{z^2+\frac{1}{x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{82}}(z+\frac{9}{x})$$

$$S \geq \frac{1}{\sqrt{82}}(x+y+z+\frac{9}{x}+\frac{9}{y}+\frac{9}{z}) \geq \frac{1}{\sqrt{82}}(x+y+z+\frac{81}{x+y+z})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{82}}\left[(x+y+z+\frac{1}{x+y+z})+\frac{80}{x+y+z}\right] \geq \sqrt{82}$$

Bài 6: Cho a, b, c > 0 và $a+2b+3c \geq 20$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}$

Giải: Dự đoán a =2, b = 3, c = 4

$$4S=4a+4b+4c+\frac{12}{a}+\frac{18}{b}+\frac{16}{c}=a+2b+3c+\left(3a+\frac{12}{a}\right)+\left(2b+\frac{18}{b}\right)+\left(c+\frac{16}{c}\right) \geq$$

$$20+3.2.2+2.2.3+2.4=52 \Rightarrow S \geq 13$$

Bài 7: Cho x, y, z > 0 và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$

Tìm giá trị lớn nhất của $P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$

Giải:

Ta có

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y};\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{4}{y+z}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{4}{x+y}+\frac{4}{y+z}\ge\frac{16}{x+2y+z}\Rightarrow\frac{1}{x+2y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$TT:$

$$\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right);\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)$$

$$S\le\frac{1}{16}\left(\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}\right)=1$$

Bài 8:

Chứng minh rằng với mọi $x\in R$, ta có $\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x\ge 3^x+4^x+5^x$

Giải:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x\ge 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x.\left(\frac{15}{4}\right)^x}=2.3^x;\left(\frac{20}{3}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x\ge 2.5^x;\left(\frac{20}{3}\right)^x+\left(\frac{12}{5}\right)^x\ge 2.4^x$$

Cộng các vế tương ứng => đpcm.

Bài 9:

Cho x, y, z > 0 và x + y + z = 6 . Chứng minh rằng $8^x+8^y+8^z\ge 4^{x+1}+4^{y+1}+4^{z+1}$

Giải:

Dự đoán x=y=z = 2 và $\sqrt[3]{8^x.8^x}=\sqrt[3]{64^x}=4^x$ nên:

$8^x+8^x+8^2\ge 3\sqrt[3]{8^x.8^x.8^2}=12.4^x;$

$8^y+8^y+8^2\ge 3\sqrt[3]{8^y.8^y.8^2}=12.4^y;$

$8^z+8^z+8^2\ge 3\sqrt[3]{8^z.8^z.8^2}=12.4^z$

$8^x+8^y+8^z\ge 3\sqrt[3]{8^x.8^y.8^z}=3\sqrt[3]{8^2.8^2.8^2}=192$

Cộng các kết quả trên => đpcm.

Bài 10:

Cho x, y, z> 0 và xyz = 1. Hãy chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge 3\sqrt{3}$$

Giải:

$$x^3+y^3\ge xy(x+y)\Rightarrow 1+x^3+y^3\ge xyz+xy(x+y)=xy(x+y+z)\ge 3xy\sqrt[3]{xyz}=3xy$$

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}=\frac{\sqrt{3xy}}{xy}=\sqrt{\frac{3}{xy}};\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}=\frac{\sqrt{3yz}}{yz}=\sqrt{\frac{3}{yz}};\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}=\frac{\sqrt{3zx}}{zx}=\sqrt{\frac{3}{zx}}$$

$$S=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)\ge 3\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x^2y^2z^2}}}=3\sqrt{3}$$

Bài 11:

Cho x, y là hai số thực không âm thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$

Giải:

$$|P|=\left|\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}\right|\le\frac{(x+y)(1+xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}\le\frac{\left(\frac{x+y+1+xy}{2}\right)^2}{(x+y+1+xy)^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{-1}{4}\le P\le\frac{1}{4}$$

Khi cho x=0 và y= 1 thì P = -1/4

Khi cho x=1 và y = 0 thì P = 1/4

KL: Khi dấu = xảy ra.

Bài 12:

Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$

Giải:

Cách 1: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}=\frac{a^4}{ab}+\frac{b^4}{bc}+\frac{c^4}{ca}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ac}\ge\frac{(ab+bc+ac)^2}{ab+bc+ac}=ab+bc+ac$

Cách 2: $\frac{a^3}{b}+ab\ge 2a^2;\frac{b^3}{c}+bc\ge 2b^2;\frac{c^3}{a}+ca\ge 2a^2$

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge 2(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ac\ge ab+bc+ac$$

Bài 13:

Cho x,y > 0 và $x+y\ge 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{3x^2+4}{4x}+\frac{2+y^3}{y^2}$

Giải: Dự đoán x = y = 2

$$A=\frac{3x^2+4}{4x}+\frac{2+y^3}{y^2}=\frac{3x}{4}+\frac{1}{x}+\frac{2}{y^2}+y=\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{4}\right)+\left(\frac{2}{y^2}+\frac{y}{4}+\frac{y}{4}\right)+\left(\frac{x+y}{2}\right)\ge\frac{9}{2}$$

Bài 14: Cho x, y > 0 và x+y = 1. Chứng minh rằng $P=\frac{1}{x^3+y^3}+\frac{1}{xy}\ge 4+2\sqrt{3}$

Giải: Ta có

$$\left(x+y\right)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)\Rightarrow x^3+y^3+3xy=1$$

$$P=\frac{x^3+y^3+3xy}{x^3+y^3}+\frac{x^3+y^3+3xy}{xy}=4+\frac{3xy}{x^3+y^3}+\frac{x^3+y^3}{xy}\ge 4+2\sqrt{3}$$

Bài 15: Cho x, y, z > 0 và $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=2$. Chứng minh rằng $xyz\le\frac{1}{8}$

Giải:

$$\frac{1}{1+x}=2-\frac{1}{1+y}-\frac{1}{1+z}=1-\frac{1}{1+y}+1-\frac{1}{1+z}=\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\ge 2\sqrt{\frac{yz}{\left(1+y\right)\left(1+z\right)}}$$

$$TT:\frac{1}{1+y}\ge 2\sqrt{\frac{xz}{\left(1+x\right)\left(1+z\right)}};\frac{1}{1+z}\ge 2\sqrt{\frac{xy}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)}}$$

Nhân các vế của 3 BĐT => đpcm

Bài 16: Cho x, y, z > 0 và x + y + z = 1. Tìm giá trị lớn nhất của $S=\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}$

Giải:

$$S=\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}=3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)\le 3-\frac{9}{x+y+z+3}=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$

Bài 17:

Cho a, b, c > 1. Chứng minh rằng: $\frac{4a^2}{a-1}+\frac{5b^2}{b-1}+\frac{3c^2}{c-1}\ge 48$

Giải:

$$\frac{4a^2}{a-1}=\frac{4\left(a^2-1\right)+4}{a-1}=4\left(a+1\right)+\frac{4}{a-1}=4\left(a-1\right)+\frac{4}{a-1}+8\ge 8+8=16$$

$$\frac{5b^2}{b-1}=5\left(b-1\right)+\frac{5}{b-1}+10\ge 20;\frac{3c^2}{c-1}=3\left(c-1\right)+\frac{3}{c-1}+6\ge 12\Rightarrow dpcm$$

Bài 18:

Cho a, b, c > 0, chứng ming rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right)$$

Giải:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\ge\frac{9}{a+2b};\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{b+2c};\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\ge\frac{9}{c+2a}$ cộng ba bất đẳng thức =>đpcm

Bài 19:

Với a, b, c > 0 chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\ge \frac{36}{a+b+c}$$

Giải:

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\ge \frac{(1+2+3)^2}{a+b+c}=\frac{36}{a+b+c}$$

Bài 20:

Cho a, b, c, d > 0 chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\ge \frac{64}{a+b+c+d}$$

Giải:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}\ge \frac{16}{a+b+c};\frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}\ge \frac{64}{a+b+c+d}$$

Cần nhớ:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Bài 21:

Với a, b, c > 0 chứng minh rằng: $\frac{4}{a}+\frac{5}{b}+\frac{3}{c}\ge 4\left(\frac{3}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$

Giải:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b}\Rightarrow \frac{3}{a}+\frac{3}{b}\ge \frac{3}{a+b};\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{4}{b+c}\Rightarrow \frac{2}{b}+\frac{2}{c}\ge \frac{8}{b+c};\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\ge \frac{4}{c+a}$$

Bài 22:

Với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác , p là nửa chu vi tam giác đó.

Chứng minh rằng $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Giải:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{2}{-a+b+c}+\frac{2}{a-b+c}+\frac{2}{a+b-c}$$

$$=\frac{1}{-a+b+c}+\frac{1}{a-b+c}+\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{-a+b+c}+\frac{1}{a-b+c}+\frac{1}{a+b-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Bài 23:

Cho x, y, z> 0 và $x+y+x\geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$

Giải:

Cách1: $P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}=\frac{4}{2}=2.$

Cách 2:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\geq x;\frac{y^2}{z+x}+\frac{z+x}{4}\geq y;\frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\geq z$$

$$\Rightarrow P\geq x+y+x-\frac{x+y+z}{2}=\frac{x+y+z}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

Bài 24:

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn x+2y+3z =18. Chứng minh rằng $\frac{2y+3z+5}{1+x}+\frac{3z+x+5}{1+2y}+\frac{x+2y+5}{1+3z}\geq\frac{51}{7}$

Giải:

$$\frac{2y+3z+5}{1+x}+\frac{3z+x+5}{1+2y}+\frac{x+2y+5}{1+3z}$$

$$=\frac{2y+3z+5}{1+x}+1+\frac{3z+x+5}{1+2y}+1+\frac{x+2y+5}{1+3z}+1-3$$

$$=(x+2y+3z+6)\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2y}+\frac{1}{1+3z}\right)-3\geq 24.\frac{9}{x+2y+3z+3}-3$$

$$=24.\frac{9}{21}-3=\frac{51}{7}$$

Bài 25:

Chứng minh bất đẳng thức:

$a^2+b^2+1\geq ab+a+b$

Giải:

Nhân hai vế với 2, đưa về tổng cuuả ba bình phương.

Bài 26:

Chứng minh rằng nếu a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có p là nửa chu vi thì $\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\leq\sqrt{3p}$

Giải:

Bu-nhi-a ta có:

$$\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\leq\sqrt{(1^2+1^2+1^2)(p-a+p-b+p-c)}=\sqrt{3(3p-2p)}=\sqrt{3p}$$

Bài 27:

Cho hai số a, b thỏa mãn: $a \geq 1; b \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $A = a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}$

Giải: $a + \frac{1}{a} \geq 2; b + \frac{1}{b} = \frac{15b}{16} + \left(\frac{b}{16} + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{15.4}{16} + 2.\frac{1}{4} = \frac{17}{4} \Rightarrow A \geq \frac{21}{4}$

Bài 28:

Chứng minh rằng $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$

Giải:

$$\left[\left(a^2\right)^2 + \left(b^2\right)^2\right](1^2 + 1^2) \geq \left(a^2 + b^2\right)^2 = \left(a^2 + b^2\right)\left(a^2 + b^2\right) \geq 2ab\left(a^2 + b^2\right) => a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$$

Bài 29:

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$A = \frac{(x+y+1)^2}{xy+y+x} + \frac{xy+y+x}{(x+y+1)^2}$ (Với x; y là các số thực dương).

Giải:

Đặt $\frac{(x+y+1)^2}{xy+y+x} = a; a > 0 \Rightarrow A = a + \frac{1}{a}$ Có

$$A = a + \frac{1}{a} = \frac{8a}{9} + \left(\frac{a}{9} + \frac{1}{a}\right) \geq \frac{8}{9}.3 + 2.\sqrt{\frac{a}{9}.\frac{1}{a}} = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow A \geq \frac{10}{3}$$

Bài 30:

Cho ba số thực a, b, c đôi một phân biệt.

Chứng minh $\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2$

Giải:

$$\frac{a}{(b-c)}.\frac{b}{(c-a)} + \frac{b}{(c-a)}.\frac{c}{(a-b)} + \frac{c}{(a-b)}.\frac{a}{(b-c)} = -1$$

$$VT = \left(\frac{a}{(b-c)} + \frac{b}{(c-a)} + \frac{c}{(a-b)}\right)^2 \geq 0$$

(Không cần chỉ ra dấu = xảy ra hoặ nếu cần cho a= 1,b=0 => c=-1 thì xảy ra dấu =)

Bài 31:

Cho các số dương a; b; c thoả mãn a + b + c ≤ 3. Chứng ming rằng

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2009}{ab + bc + ca} \geq 670$$

Giải:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca}$$
$$=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{2007}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{(a+b+c)^2}+\frac{2007}{\frac{(a+b+c)^2}{3}}\ge 670$$

Bài 32:

Cho *a*, *b*, *c* là các số thực dương thay đổi thỏa mãn: $a+b+c=3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{P}=a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$$

Giải:

$3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$
Mà $a^3+ab^2\ge 2a^2b$; $b^3+bc^2\ge 2b^2c$; $c^3+ca^2\ge 2c^2a$ *Suy ra* $3(a^2+b^2+c^2)\ge 3(a^2b+b^2c+c^2a)>0$
Suy ra $\mathrm{P}\ge a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\Rightarrow \mathrm{P}\ge a^2+b^2+c^2+\frac{9-(a^2+b^2+c^2)}{2(a^2+b^2+c^2)}$
$t=a^2+b^2+c^2$, với $t\ge 3$. Suy ra $P\ge t+\frac{9-t}{2t}=\frac{t}{2}+\frac{9}{2t}+\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\ge 3+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=4\ \Rightarrow \mathrm{P}\ge 4$ $\quad a=b=c=1$

Bài 33:

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn x + y + z = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\mathrm{P}=\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}$$

Giải:

$\mathrm{P}=\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}=(x+y+z)\left(\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}\right)=\left(\frac{y}{16x}+\frac{x}{4y}\right)+\left(\frac{z}{16x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{4y}+\frac{y}{z}\right)+\frac{21}{16}$
$\frac{y}{16x}+\frac{x}{4y}\ge\frac{1}{4}$ có =khi y=2x; $\frac{z}{16x}+\frac{x}{z}\ge\frac{1}{2}$ khi z=4x; $\frac{z}{4y}+\frac{y}{z}\ge 1$ khi z=2y =>P $\ge$ 49/16
Min P = 49/16 với x = 1/7; y = 2/7; z = 4/7

Bài 34:

Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn: $\frac{4}{x}+\frac{5}{y}\geq 23$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B=8x+\frac{6}{x}+18y+\frac{7}{y}$

Giải:

$$B=8x+\frac{6}{x}+18y+\frac{7}{y}=\left(8x+\frac{2}{x}\right)+\left(18y+\frac{2}{y}\right)+\left(\frac{4}{x}+\frac{5}{y}\right)\geq 8+12+23=43$$

Dấu bằng xảy ra khi $(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$.Vậy Min B là 43 khi $(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$

Bài 35

Cho x, y. z là ba số thực thuộc đoạn [1;2] và có tổng không vượt quá 5. Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2\leq 9$

Giải:

$1\leq x\leq 2\Rightarrow x-1\geq 0$ và $x-2\leq 0\Rightarrow (x-1)(x-2)\leq 0$

$\Rightarrow x^2\leq 3x-2$

Tương tự $y^2\leq 3y-2$ và $z^2\leq 3z-2$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\leq 3(x+y+z)-6\leq 3.5-6=9$

Bài 36:

Cho a, b, c là các số thuộc $[-1;2]$ thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=6$. Chứng minh rằng $a+b+c\geq 0$.

Giải:

$(a+1)(a-2)\leq 0\Leftrightarrow a^2-a-2\leq 0;b^2-b-2\leq 0;c^2-c-2\leq 0$

$\Rightarrow a+b+c\geq a^2+b^2+c^2-6=0$

Bài 37:

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c\leq 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\geq\frac{\sqrt{97}}{2}$$

Giải:

$$\left(1.a+\frac{9}{4}.\frac{1}{b}\right)^2 \le \left(1^2+\frac{81}{16}\right)\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right) \Rightarrow \sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}} \ge \frac{4}{\sqrt{97}}\left(a+\frac{9}{4b}\right);$$ cộng các vế lại

$$\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}} \ge \frac{4}{\sqrt{97}}\left(b+\frac{9}{4c}\right); \sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}} \ge \frac{4}{\sqrt{97}}\left(c+\frac{9}{4a}\right)$$

Bài 38:

Cho tam giác có ba cạnh lần lượt là a,b,c và chu vi là 2p. Chứng minh rằng $\frac{p}{p-a}+\frac{p}{p-b}+\frac{p}{p-c} \ge 9$

Giải:

$\frac{p}{p-a}+\frac{p}{p-b}+\frac{p}{p-c} \ge 9$ hay $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge \frac{9}{p-a+p-b+p-c}=\frac{9}{p}$

Bài 39:

Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 6. Chứng minh rằng:

$3(a^2+b^2+c^2)+2abc \ge 52$

Giải:

$$abc \ge (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=(6-2a)(6-2b)(6-2c) \Leftrightarrow abc \ge -24+\frac{8}{3}(ab+bc+ac)$$

$$\Leftrightarrow 2abc \ge -48+\frac{16}{3}\left[\frac{36-(a^2+b^2+c^2)}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{8}{3}(a^2+b^2+c^2)+2abc \ge 48 \ (1)$$

$$(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge 4 \quad (2) \qquad (1) and (2) \Rightarrow dpcm$$

Có chứng minh được $3(a^2+b^2+c^2)+2abc<18$ hay không?

Bài 40:

Cho *a, b, c* là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức [illegible].

Giải:

Có [illegible] (1) , [illegible] (2)

[illegible] (3) . Dấu '=' xảy ra [illegible]

Do a,b,c là độ dài 3 cạnh của tam giác nên các vế của (1), (2), (3) đều dương. Nhân vế với vế của (1), (2), (3) ta có: [illegible] (*)

Từ [illegible] nên (*) [illegible]

[illegible] (*)

Ta có [illegible]

Từ đó [illegible] (**)

Áp dụng (*) vào (**) cho ta [illegible]

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi [illegible].

Từ đó giá trị nhỏ nhất của P là 8 đạt được khi và chỉ khi [illegible]

Bài 41:

Cho *a, b, c* là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng $\frac{2}{9} \le a^3 + b^3 + c^3 + 3abc < \frac{1}{4}$.

Giải:

$*P = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$

$Ta\,có\; a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc = (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ (1)

$có\; abc \ge (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = (1-2\text{a})(1-2b)(1-2c) =$

$-1+4(ab+bc+ca)-8\text{a}bc \Leftrightarrow 6\text{a}bc \ge \frac{-2}{3} + \frac{8}{3}\left(ab+bc+ca\right)$ (2)

$(1)and(2) \Rightarrow a^3+b^3+c^3+3abc \ge a^2+b^2+c^2 - \frac{2}{3} + \frac{5}{3}\left(ab+bc+ca\right)$

$mà\; ab+bc+ca = \frac{1-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2} \Rightarrow P \ge \frac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right) + \frac{1}{6}$

$\left(a-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(b-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(c-\frac{1}{3}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3} \Rightarrow P \ge \frac{1}{6}.\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$

$*P = a^3+b^3+c^3+3abc$

$abc \ge (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = (1-2\text{a})(1-2b)(1-2c) = -1+4(ab+bc+ca)-8\text{a}bc > 0$

$\Rightarrow ab+bc+ca)-2\text{a}bc > \frac{1}{4}$ (3)

$P =\; a^3+b^3+c^3+3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)+6\text{a}bc$

$= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac+6\text{a}bc = \left(a+b+c\right)^2 - 3\left(ab+bc+ca\right)+6\text{a}bc$

$= 1-3\left(ab+bc+ca-2\text{a}bc\right) < 1-3.\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Bài 42:

Cho ba số dưỡng,y,z thỏa mãn x+y+z =6 . Chứng minh rằng:

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx+xyz\geq 8$$

Giải:

Chứng minh được

$$xyz\geq(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$$
$$=(6-2x)(6-2y)(6-2z)=216-72(x+y+z)+24(xy+yz+zx)-8xyz$$
$$\Leftrightarrow xyz\geq -24+\frac{8}{3}(xy+yz+zx)\ \ (1)$$

mà $(x+y+z)^2=9\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=9$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz=36-3xy-3yz-3xz\qquad(2)$$

Nên $xyz+x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz+\geq -24+\frac{8}{3}(xy+yz+zx)+36-3xy-3yz-3xz$

$\Leftrightarrow\ xyz+x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz+\geq 12-\frac{1}{3}(xy+yz+zx)$ mà $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$

$$\Rightarrow xyz+x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz+\geq 12-\frac{1}{3}.\frac{(x+y+z)^2}{3}=12-\frac{36}{9}=8$$

Bài 43:

Cho $a\geq 1342;b\geq 1342$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+ab\geq 2013(a+b)$.Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải:

Ta sẽ sử dụng ba kết quả sau:

$$(a-1342)^2+(b-1342)^2\geq 0;(a-1342)(b-1342)\geq 0;a-1342+b-1342\geq 0$$

Thật vậy:

$$(a-1342)^2+(b-1342)^2\geq 0\Leftrightarrow a^2+b^2-2.1342.(a+b)+2.1342^2\geq 0\qquad(1)$$
$$(a-1342)(b-1342)\geq 0\Leftrightarrow ab-1342a-1342b+1342^2\geq 0\qquad(2)$$
$$\Rightarrow a^2+b^2-2.1342.(a+b)+2.1342^2+ab-1342a-1342b+1342^2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+ab\geq 3.1342.(a+b)-3.1342^2=2.2013.(a+b)-3.1342^2$$
$$=2013.(a+b)+2013.(a+b)-2.2013.1342=2013.(a+b)+2013.(a+b-1342-1342)\geq 2013.(a+b)$$

Bài 44:

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=(x-1)^4+(x-3)^4+6(x-1)^2(x-3)^2$$

Giải:

Cách 1:

Bài V. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=(x-1)^4+(x-3)^4+6(x-1)^2(x-3)^2$$

Đặt a = x – 2

$\Rightarrow$ x – 1 = a + 1; x – 3 = a -1

$$A=(a+1)^4+(a-1)^4+6(a+1)^2(a-1)^2$$

$$A=(a^4+4a^3+6a^2+4a+1)+(a^4-4a^3+6a^2-4a+1)+6(a^2-1)^2$$

$$A=8a^4+8\geq 8$$

$\Rightarrow$ Min A = 8 $\Leftrightarrow a^4=0 \Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 8 khi x = 2

6

Cách 2:

$$A=(x-1)^4+(x-3)^4+6(x-1)^2(x-3)^2$$

$$A=\left[(x-1)^2+(x-3)^2\right]^2+4(x-1)^2(x-3)^2$$

$$A=\left[2x^2-8x+10\right]^2+4\left(x^2-4x+3\right)^2$$

$$A=\left[2(x-2)^2+2\right]^2+4\left((x-2)^2-1\right)^2$$

$$A=4(x-2)^4+8(x-2)^2+4+4(x-2)^4-8(x-2)^2+4$$

$$A=8(x-2)^4+8\geq 8$$

Bài 45:

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn a+b+c=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c+1}+\frac{bc}{a+1}+\frac{ca}{b+1}\leq\frac{1}{4}$$

Giải:

$$\frac{ab}{c+1}=\frac{ab}{(c+a)+(c+b)}\leq\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+b}\right);$$

Tương tự ta có:

$$\frac{bc}{a+1}\leq\frac{bc}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right);$$

$$\frac{ca}{b+1}\leq\frac{ca}{4}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{b+c}\right).$$

$$\Rightarrow\frac{ab}{c+1}+\frac{bc}{a+1}+\frac{ca}{b+1}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{ab+bc}{c+a}+\frac{ab+ca}{b+c}+\frac{bc+ca}{a+b}\right)=\frac{1}{4}(a+b+c)=\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow \dfrac{ab}{c+1}+\dfrac{bc}{a+1}+\dfrac{ca}{b+1}\leq\dfrac{1}{4}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$

Bài 46

Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện xyz = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^3+y^3}+\frac{1}{1+y^3+z^3}+\frac{1}{1+z^3+x^3}\leq 1$$

Giải:

$$x^2+y^2\ge 2xy\Rightarrow (x+y)(x^2+y^2)\ge 2xy(x+y)\Rightarrow x^3+y^3\ge xy(x+y)$$

$$\Rightarrow 1+x^3+y^3\ge xy(x+y+z)\Rightarrow \frac{1}{1+x^3+y^3}\le \frac{1}{xy(x+y+z)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^3+y^3}\le \frac{z}{x+y+z};\frac{1}{1+y^3+z^3}\le \frac{x}{x+y+z};\frac{1}{1+z^3+x^3}\le \frac{y}{x+y+z}\Rightarrow dpcm$$

Bài 47

Cho a,b là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$(a+b)^2+\frac{a+b}{2}\ge 2a\sqrt{b}+2b\sqrt{a}$$

Giải:

$$(a+b)^2+\frac{a+b}{2}=(a+b)\left(a+b+\frac{1}{2}\right)=(a+b)\left(\left(a+\frac{1}{4}\right)+\left(b+\frac{1}{4}\right)\right)\ge 2\sqrt{ab}(a+b)=2a\sqrt{b}+2b\sqrt{a}$$

Bài 48

Cho ba số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{\sqrt{1+8a^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8c^3}}\ge 1$$

Giải:

$$\frac{1}{\sqrt{1+8a^3}}=\frac{1}{\sqrt{(2a+1)(4a^2-2a+1)}}\ge \frac{1}{\frac{2a+1+4a^2-2a+1}{2}}=\frac{2}{4a^2+2}=\frac{1}{2a^2+1}$$

$$;\frac{1}{\sqrt{1+8b^3}}\ge \frac{1}{2b^2+1};\frac{1}{\sqrt{1+8c^3}}\ge \frac{1}{2c^2+1}$$

$$\Rightarrow VT\ge \frac{1}{2a^2+1}+\frac{1}{2b^2+1}+\frac{1}{2c^2+1}\ge \frac{9}{2a^2+1+2b^2+1+2c^2+1}=1$$

Bài 49

Với a,b,c là ba số thực dương . Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2$

Giải:

Cách 1:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}=\frac{a^4}{ab}+\frac{b^4}{bc}+\frac{c^4}{ca}\ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ca}=\frac{(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}\ge a^2+b^2+c^2$$

Cách 2

$$\frac{a^3}{b}+ab\ge 2a^2;\frac{b^3}{c}+bc\ge 2b^2;\frac{c^3}{a}+ca\ge 2c^2\Rightarrow VT\ge 2(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\ge a^2+b^2+c^2$$

Bài 50

Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn xyz = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{y+1}+\frac{y^2}{z+1}+\frac{z^2}{x+1}\ge \frac{3}{2}$$

Giải:

$$\frac{x^2}{y+1}+\frac{y+1}{4}\ge x;\frac{y^2}{z+1}+\frac{z+1}{4}\ge y;\frac{z^2}{x+1}+\frac{x+1}{4}\ge z\Rightarrow VT\ge \frac{3}{4}(x+y+z)-\frac{3}{4}\ge \frac{3}{4}.3-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$