

CHỦ ĐỀ 04: TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

LÝ THUYẾT

❖ Đường tiệm cận ngang

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay *tiệm cận ngang*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$

❖ Đường tiệm cận đứng

- Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay *tiệm cận đứng*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

Lưu ý:

- Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$; $ad-bc \neq 0$) luôn có tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

❖ Dấu hiệu nhận biết các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

- Hàm phân thức mà nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử có tiệm cận đứng.
- Hàm phân thức mà bậc của tử $\leq$ bậc của mẫu có TCN.
- Hàm căn thức dạng: $y = \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$, $y = \sqrt{f(x)} - g(x)$, $y = g(x) - \sqrt{f(x)}$ có tiệm cận ngang. (dùng liên hợp)
- Hàm $y = a^x$, ($0 < a \neq 1$) có tiệm cận ngang $y = 0$.
- Hàm số $y = \log_a x$, ($0 < a \neq 1$) có tiệm cận đứng $x = 0$.

❖ Cách tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

- Tiệm cận đứng: ta đi tìm nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử.
- Tiệm cận ngang: tính 2 giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

❖ Một số chú ý trong quá trình tìm tiệm cận.

- Nếu $x \rightarrow +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$.
- Nếu $x \rightarrow -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = -x$.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.
C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.
D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - x}{x^2 + 5x + 4}$. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

- A. 2
B. 1
C. 3
D. 4

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$, hai nghiệm này đều không là nghiệm của tử số nên đây là hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 5x + 4} = 2$, nên đường $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2}$. Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận.

- A. 3
B. 1
C. 4
D. 2

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2} = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{(x-2)(\sqrt{x+3}+2)}, \forall x \neq 1$.

Khi đó ta thấy $x = 2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-2)(\sqrt{x+3}+2)} = 0$, nên đồ thị hàm số nhận $y = 0$ làm tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

VÍ DỤ 4. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2-5x}-\sqrt{2x^2-3x}}$

- A. $y = 2; y = -2$.
B. $y = \sqrt{2}; y = -\sqrt{2}$.
C. $y = \sqrt{2}$.
D. $y = 2$.

Lời giải

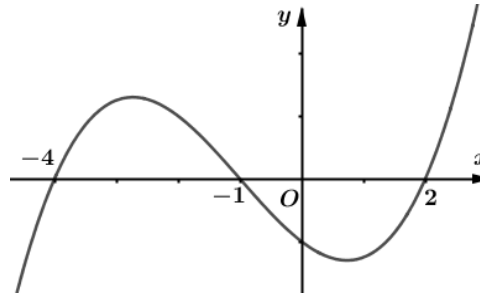
Chọn B

Tập xác định $D = (-\infty; 0) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 5x} + \sqrt{2x^2 - 3x}}{-2x} = -\sqrt{2}$

Và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 5x} + \sqrt{2x^2 - 3x}}{-2x} = \sqrt{2}$.

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \pm\sqrt{2}$

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{2x}{f(x)}$ có bao nhiêu đường **tiệm cận đứng**?

A. 3

B. 1

C. 4

D. 2

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $f(x) \neq 0$.

Từ đồ thị ta thấy $f(x) = 0$ khi $x = -4$, $x = -1$ và $x = 2$.

Khi đó $f(x) = a(x+4)(x+1)(x-2)$ có 3 nghiệm.

Do đó đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

VÍ DỤ 6. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3x-5} + ax + b}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó $4a - b$ bằng:

A. -8.

B. 10.

C. -4.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3x-5} + ax + b}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow f(x) = \sqrt{3x-5} + ax + b = 0$ có nghiệm kép $x = 2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2a + b = 0 \\ \frac{3}{2\sqrt{2 \cdot 3 - 5}} + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy $4a - b = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 = -8$.

VÍ DỤ 7. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{(x-1)(x^2+3x+3)}}{mx^2+2x-3}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

A. $m \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$. B. $m \in \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ C. $m \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right)$. D. $m \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(x-1)(x^2+3x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Trường hợp 1:

Nếu $m = 0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. Do đó đồ thị hàm số không thể có ba đường tiệm cận.

Trường hợp 2:

Nếu $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Do đó đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận $\Leftrightarrow mx^2+2x-3=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thuộc nửa khoảng $[1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (x_1-1)(x_2-1) \geq 0 \\ (x_1-1)+(x_2-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+3m > 0 \\ \frac{-1}{m} \geq 0 \\ \frac{1+m}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ m < 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m < 0. \text{ Vậy } m \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$$

VÍ DỤ 8. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) , gọi d là tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng $m-2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của (C) tại điểm $A(x_1; y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của (C) tại điểm $B(x_2; y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2 + y_1 = -5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S .

A. 0.

B. 4.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$.

Với $x = m-2 \Rightarrow y = 1 - \frac{3}{m} : A\left(m-2; 1 - \frac{3}{m}\right) (m \neq 0)$.

Phương trình tiếp tuyến d của (C) : $y = \frac{3}{m^2}(x-m+2) + 1 - \frac{3}{m}$.

Đồ thị (C) có tiệm cận ngang $y = 1$ và tiệm cận đứng $x = -2$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = \frac{3}{m^2}(x - m + 2) + 1 - \frac{3}{m} \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - \frac{6}{m} \\ x = -2 \end{cases}$ nên $y_1 = 1 - \frac{6}{m}$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = \frac{3}{m^2}(x - m + 2) + 1 - \frac{3}{m} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2m - 2 \end{cases}$ nên $x_2 = 2m - 2$.

Suy ra $x_2 + y_1 = 2m - \frac{6}{m} - 1 = -5 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$.

Vậy tổng bình phương các phân tử của S là $1^2 + (-3)^2 = 10$.