

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
MÔN TOÁN LỚP 8

Bài 1 (3đ)

a) Phân tích đa thức $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ thành nhân tử

b) Tìm giá trị nguyên của x để $A:B$ biết

$$A = 10x^2 - 7x - 5 \text{ và } B = 2x - 3$$

c) Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2y^2 + 3} = 0$$

Bài 2 (3đ) Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$

b) $\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

Bài 3. (2đ) Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy E, trên tia đối của tia CB lấy F sao cho $AE = CF$

a) Chứng minh $\triangle EDF$ vuông cân

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh O, C, I thẳng hàng

Bài 4. (2 điểm) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí điểm D, E sao cho:

a) DE có độ dài nhỏ nhất

b) Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a)

$$\begin{aligned}x^3 - 5x^2 + 8x - 4 &= x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 + 4x - 4 \\ &= x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4) = (x-1)(x-2)^2\end{aligned}$$

b)

$$\text{Xét } \frac{A}{B} = \frac{10x^2 - 7x - 5}{2x - 3} = 5x + 4 + \frac{7}{2x - 3}$$

$$\text{Với } x \in \mathbb{Z} \text{ thì } A:B \text{ khi } \frac{7}{2x-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 7:(2x-3)$$

$$\text{Mà } U(7) = \{-1; 1; -7; 7\} \Rightarrow x = 5; -2; 2; 1 \text{ thì } A:B$$

$$\begin{aligned}\text{c) Biến đổi } \frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} &= \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3-1)(x^3-1)} \\ &= \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(y^2 + y + 1)(x^2 + x + 1)} \quad (\text{do } x + y = 1 \Rightarrow y - 1 = -x \text{ \& } x - 1 = -y) \\ &= \frac{(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) - (x - y)}{xy(x^2y^2 + y^2x + y^2 + yx^2 + xy + y + x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{(x - y)(x^2 + y^2 - 1)}{xy[x^2y^2 + xy(x + y) + x^2 + y^2 + xy + 2]} \\ &= \frac{(x - y)(x^2 - x + y^2 - y)}{xy[x^2y^2 + (x + y)^2 + 2]} = \frac{(x - y)[x(x - 1) + y(y - 1)]}{xy(x^2y^2 + 3)}\end{aligned}$$

$$= \frac{(x-y)[x(-y)+y(-x)]}{xy(x^2y^2+3)} = \frac{(x-y)(-2xy)}{xy(x^2y^2+3)}$$

$$= \frac{-2(x-y)}{x^2y^2+3} \text{ Suy ra điều phải chứng minh}$$

Bài 2.

a) $(x^2+x)^2 + 4(x^2+x) = 12$

Đặt $y = x^2 + x$

$$y^2 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 6y - 2y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+6)(y-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 2 \end{cases}$$

* $x^2 + x = -6$ vô nghiệm vì $x^2 + x + 6 > 0$ với mọi x

$$*x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) - (x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1$$

b)

$$\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$$

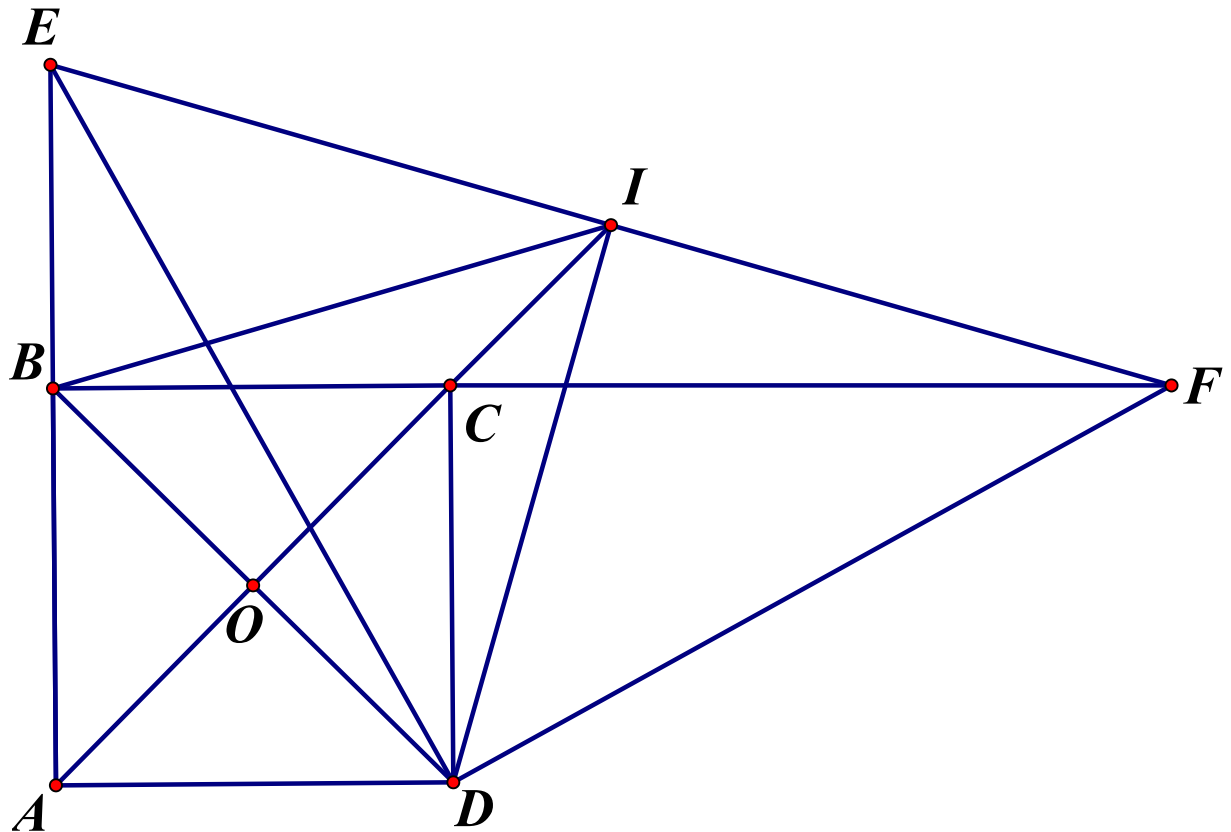
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2008} + 1\right) + \left(\frac{x+2}{2007} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{2006} + 1\right) = \left(\frac{x+4}{2005} + 1\right) + \left(\frac{x+5}{2004} + 1\right) + \left(\frac{x+6}{2003} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008} + \frac{x+2009}{2007} + \frac{x+2009}{2006} = \frac{x+2009}{2005} + \frac{x+2009}{2004} + \frac{x+2009}{2003}$$

$$\Leftrightarrow (x+2009) \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) = 0$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \neq 0 \Rightarrow x = -2009$$

Bài 3



a)

Ta có : $\triangle ADE = \triangle CDF (c.g.c) \Rightarrow \triangle EDF$ cân tại D

Mặt khác $\triangle ADE = \triangle CDF (c.g.c) \Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{CFD}$

Mà $\widehat{BED} + \widehat{DEF} + \widehat{EFB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BFD} + \widehat{DEF} + \widehat{EFB} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EDF} = 90^\circ$. Vậy $\triangle EDF$ vuông cân.

b)

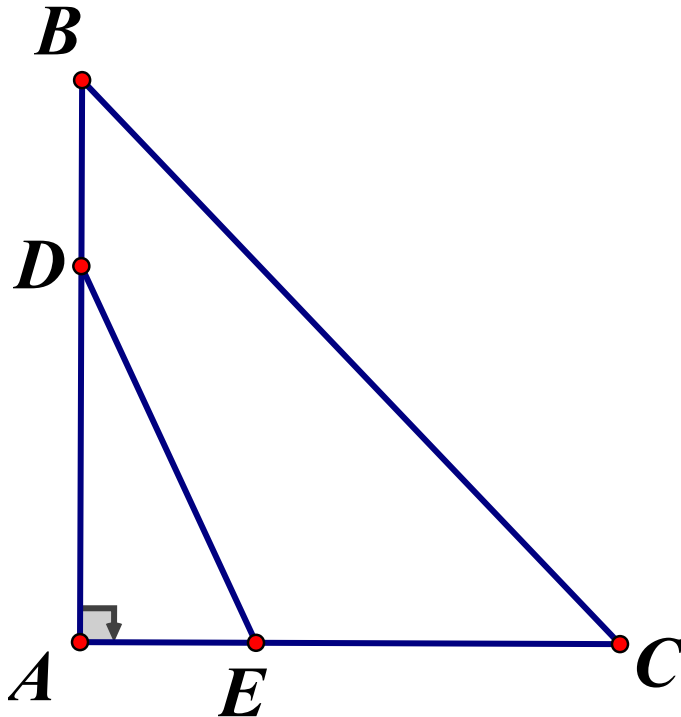
Theo tính chất đường chéo hình vuông $\Rightarrow CO$ là trung trực BD

Mà $\triangle EDF$ vuông cân $\Rightarrow DI = \frac{1}{2}EF$

Tương tự $BI = \frac{1}{2}EF \Rightarrow DI = BI$

$\Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của $DB \Rightarrow I$ thuộc đường thẳng CO
 Nên O, C, I thẳng hàng

Bài 4



a)

Đặt $AB = AC = a$ không đổi; $AE = BD = x (0 < x < a)$

Áp dụng định lý Pytago với $\triangle ADE$ vuông tại A có:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 = (a - x)^2 + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2(x^2 - ax) - a^2$$

$$= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2}$$

Ta có DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow DE^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

$\Leftrightarrow BD = AE = \frac{a}{2} \Leftrightarrow D, E$ là trung điểm của AB, AC

b)

Tứ giác $BDEC$ có diện tích nhỏ nhất

Ta có: $S_{ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot AE = \frac{1}{2} AD \cdot (AB - AD) = -\frac{1}{2}(AD^2 - AB \cdot AD)$

$$= -\frac{1}{2} \left(AD^2 - 2 \cdot \frac{AB}{2} \cdot AD + \frac{AB^2}{4} \right) + \frac{AB^2}{8} = -\frac{1}{2} \left(AD - \frac{AB}{2} \right)^2 + \frac{AB^2}{8} \leq \frac{AB^2}{8}$$

Vậy $S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \geq \frac{AB^2}{2} - \frac{AB^2}{8} = \frac{3}{8} AB^2$ không đổi

Do đó $\min S_{BDEC} = \frac{3}{8} AB^2$ khi D, E lần lượt là trung điểm AB, AC

