

BÀI TẬP VỀ TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 24. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$			
$f'(x)$	+	0	-	0	+		
$f(x)$							
	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là

A. $(0; 2)$

B. $(3; -4)$

C. $x_{CT} = 3$

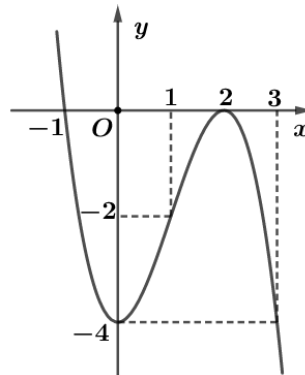
D. $y_{CT} = -4$

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là $(3; -4)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y = f(x) + 2024$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(2; +\infty)$

B. $(-\infty; -1)$

C. $(-1; 1)$

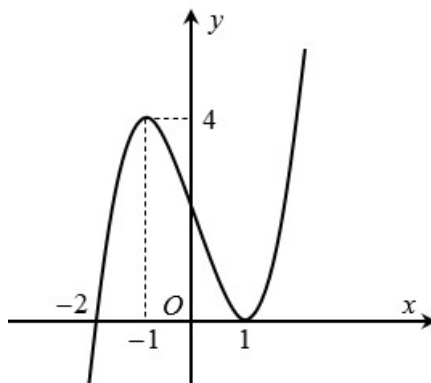
D. $(0; 1)$

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số $y = f(x) + 2024$ đồng biến khoảng $(0; 2)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = (x+2)(x-1)^2$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng với hàm số $y = |x-1|(x^2+x-2)$?



- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = (x+2)(x-1)^2$ có đồ thị.

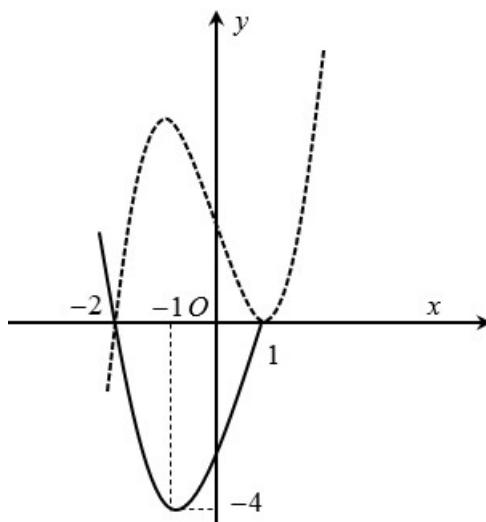
$$g(x) = |x-1|(x^2+x-2) = \begin{cases} f(x), & x > 1 \\ -f(x), & x \leq 1 \end{cases}$$

Khi đó

Do đó đồ thị hàm số $g(x)$ gồm hai phần:

Phần 1: Lấy một phần đồ thị (C) ứng với $x > 1$.

Phần 2: Với phần đồ thị (C) ứng với $x \leq 1$ ta lấy đối xứng qua trục Ox .



Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m^2+3}{2}x^2 - (m^3+m-2)x + m^2$ có điểm cực tiểu, điểm cực đại lần lượt là x_{CT} , x_{CD} . Số giá trị nguyên trong đoạn $[-9; 9]$ của m thỏa mãn $x_{CT} < x_{CD}^2$ là

A. 8 **B.** 9 **C.** 6 **D.** 11

Lời giải

Chọn A

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m^2+3}{2}x^2 - (m^3+m-2)x + m^2$$

$$y' = x^2 - (m^2+3)x - (m^3+m-2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - (m^2+3)x - (m^3+m-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (-m+1)x - (m^2+m+2)x + (-m+1)(m^2+m+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+m-1)(x-m^2-m-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+m-1=0 \\ x-m^2-m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-m+1 \\ x=m^2+m+2 \end{cases}$$

Ta có $m^2+m+2 - (-m+1) = m^2+2m+1 = (m+1)^2 \geq 0$ nên để hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu thì $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$, và ta cũng suy ra được $m^2+m+2 > -m+1$ với mọi $m \neq -1$ nên $x_{CD} = -m+1$, $x_{CT} = m^2+m+2$.

$$x_{CT} < x_{CD}^2 \Leftrightarrow m^2+m+2 < (-m+1)^2 \Leftrightarrow 3m < -1 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{3}$$

Mà m nguyên thuộc đoạn $[-9; 9]$, $m \neq -1$ nên $m \in \{-9; -8; \dots; -2\}$.

Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn ycbt.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2; +\infty)$ **B.** $(-\infty; -2)$ **C.** $(-2; +\infty)$ **D.** $(-2; 1)$

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-4)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Điểm cực tiểu hàm số đã cho là

A. $x = 1$ **B.** $x = 4$ **C.** $x = -1$ **D.** $x = -4$

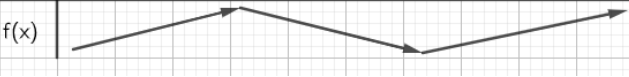
Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = (x+1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ta có

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 4$.

$\Rightarrow x = 4$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 - 12x^2 + (m-2)x$ có ba điểm cực trị?

A. 47.

B. 44.

C. 46.

D. 45.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$y = x^4 - 12x^2 + (m-2)x$$

$$\Rightarrow y' = 4x^3 - 24x + m - 2$$

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì phương trình $y' = 4x^3 - 24x + m - 2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow m = -4x^3 + 24x + 2$ (*) có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = -4x^3 + 24x + 2$ ta có $g'(x) = -12x^2 + 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

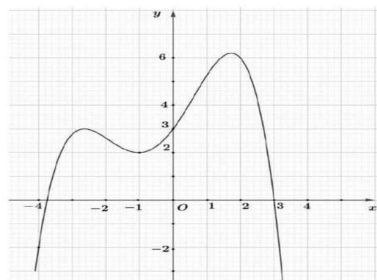
BBT:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$+\infty$	$-16\sqrt{2} + 2$		$16\sqrt{2} + 2$	$-\infty$

Để phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt thì $-16\sqrt{2} + 2 < m < 16\sqrt{2} + 2$.

Mà m là số nguyên $\Rightarrow m \in \{-20; -19; \dots; 23; 24\}$ nên có 45 giá trị m thỏa mãn.

Câu 8. Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Xét hàm số $g(x) = 3f(-x^3 - x + m + 3) + (x^3 + x - m - 3)(x^3 + x - m)^2$, m là tham số.
 Số giá trị nguyên của m thuộc nửa khoảng $(-100; 100]$ để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$ là
 A. 167. B. 168. C. 169. D. 166.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = -x^3 - x + m + 3$. Ta có $t' = -3x^2 - 1 < 0, \forall x \in (0; 3)$

Suy ra t nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.

Với $x \in (0; 3) \Rightarrow t \in (m - 27; m + 3)$

Hàm số $g(x)$ trở thành $h(t) = 3f(t) - t(3 - t)^2 \Leftrightarrow h(t) = 3f(t) - t^3 + 6t^2 - 9t$

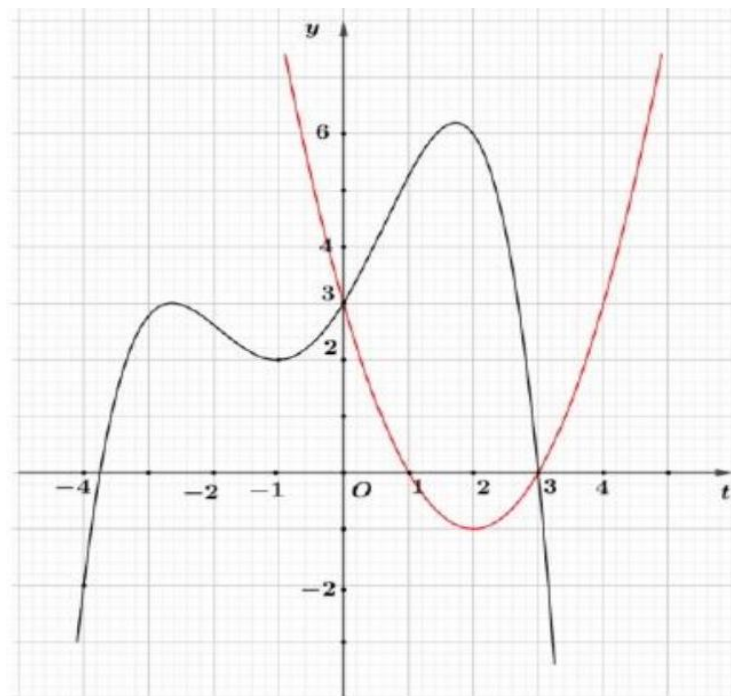
Ta có $h'(t) = 3f'(t) - 3t^2 + 12t - 9$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0; 3) \Leftrightarrow h(t)$ nghịch biến trên khoảng $(m - 27; m + 3)$

$$\Leftrightarrow h'(t) \leq 0, \forall t \in (m - 27; m + 3) \Leftrightarrow 3f'(t) - 3t^2 + 12t - 9 \leq 0, \forall t \in (m - 27; m + 3)$$

$$\Leftrightarrow f'(t) \leq t^2 - 4t + 3, \forall t \in (m - 27; m + 3)$$

Vẽ đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và đồ thị hàm số $y = t^2 - 4t + 3$ trên cùng hệ trục tọa độ ta được:



$$f'(t) \leq t^2 - 4t + 3, \forall t \in (m - 27; m + 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \\ t \geq 3 \end{cases}, \forall t \in (m-27; m+3) \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 \leq 0 \\ m-27 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 30 \end{cases}$$

$$m \in (-100; 100] \Rightarrow \begin{cases} -100 < m \leq -3 \\ 30 \leq m \leq 100 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện

Vậy có 168 giá trị nguyên của $m \in (-100; 100]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			-1		-2		-1	

$-\infty \nearrow \nearrow -1 \searrow \searrow -2 \nearrow \nearrow -1 \searrow \searrow -\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(0; 1)$ **B.** $(1; +\infty)$ **C.** $(-\infty; 1)$ **D.** $(-1; 0)$

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta thấy: $y' > 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1), (0; 1)$

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ xác định $\forall x \neq -1$

$$y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$$

Ta có:

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

Câu 11. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A.** $y = \frac{x-1}{x-2}$ **B.** $y = x^3 + 2x$ **C.** $y = -x^3 - 3x$ **D.** $y = \frac{x+1}{x+3}$

Lời giải

Hàm số $y = x^3 + 2x$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(5 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(3; 4)$ B. $(1; 3)$ C. $(-\infty; -3)$ **D. $(4; 5)$**

Lời giải

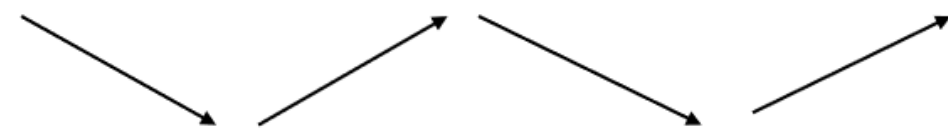
Ta có $y' = f'(5 - 2x) = -2f'(5 - 2x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2f'(5 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2x = -3 \\ 5 - 2x = -1 \\ 5 - 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f'(5 - 2x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2x < -3 \\ -1 < 5 - 2x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ 2 < x < 3 \end{cases}; f'(5 - 2x) > 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2x > 1 \\ -3 < 5 - 2x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ 3 < x < 4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(5 - 2x)$

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y					



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(5 - 2x)$ đồng biến trên khoảng $(4; 5)$.

PHẦN 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $y = 2x^3 + 2(m+1)x^2 + 6x + 4 + 2m$. Khi đó:

- a) Khi $m = -1$ thì hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$
 b) Hàm số $y = 2x^3 + 2(m+1)x^2 + 6x + 4 + 2m$ không có cực trị khi $m = 1$
 c) Có 3 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + 2(m+1)x^2 + 6x + 4 + 2m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$
 d) Hàm số $y = 2x^3 + 2(m+1)x^2 + 6x + 4 + 2m$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi đó $m \in (2; 5)$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

+ Khi $m = -1$ ta có $y = 2x^3 + 6x + 2 \Rightarrow y' = 6x^2 + 6 > 0$ nên hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$

$\Rightarrow$ a đúng

+ Khi $m = 1$ ta có $y = 2x^3 + 4x^2 + 6x + 6 \Rightarrow y' = 6x^2 + 8x + 6$

Có $\Delta' = 16 - 36 = -20 < 0 \Rightarrow y' = 6x^2 + 8x + 6 \forall x \in \mathbb{R}$ Hàm số không có cực trị khi $m = 1 \Rightarrow$ b đúng

Ta có: $y' = 6x^2 + 4(m+1)x + 6$

+ Hàm số $y = 2x^3 + 2(m+1)x^2 + 6x + 4 + 2m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' = 6x^2 + 4(m+1)x + 6 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4(m+1)^2 - 36 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2.$$

$$\text{Vậy } m \in [-4; 2]$$

Với $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\} \Rightarrow c$ sai

+ có $y' = 12x + 4(m+1)$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ thì:

$$\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 38 + 8m = 0 \\ 28 + 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{38}{8} \\ m > -7 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{38}{8} \Rightarrow d \text{ sai}$$

Câu 2. Cho hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 + 2(2-m)x + m$. Khi đó:

- a) Có 5 giá trị nguyên dương để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$
- b) Có 2025 giá trị nguyên của $m \in [-2024; 2024]$ để hàm số có hai điểm cực trị.
- c) Biết tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là $(-\infty; a]$ lúc đó: $(-\infty; a] \cap (3; 2025) = (-\infty; 2025)$
- d) Biết tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là $(-\infty; a]$ lúc đó, phương trình $8^x = a$ có nghiệm $x > 2$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

ta có $y = 2x^3 - 6x^2 + 2(2-m)x + m \Rightarrow y' = 6x^2 - 12x + 2(2-m)$

+ hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$y' = 6x^2 - 12x + 2(2 - m) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 36 - 12(2 - m) \leq 0 \Leftrightarrow 12 + 12m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1.$$

Với $\begin{cases} m \in [-2024; 2024] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2024; -2023; \dots; -1\} \Rightarrow$ a sai

+ Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 6x^2 - 12x + 2(2 - m) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 36 - 12(2 - m) > 0 \Leftrightarrow 12 + 12m > 0 \Leftrightarrow m > -1.$$

Với $\begin{cases} m \in [-2024; 2024] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{0; 1; \dots; 2024\} \Rightarrow$ b đúng

+Ta có $y' = 6x^2 - 12x + 2(2 - m)$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$y' = 6x^2 - 12x + 2(2 - m) \geq 0 \quad \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 - m \geq 0, \quad \forall x \in (2; +\infty)$$

$$m \leq 3x^2 - 6x + 2, \quad \forall x \in (2; +\infty)$$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 2, \quad \forall x \in (2; +\infty)$

$$f'(x) = 6x - 6, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		0		+
$f(x)$			2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để $m \leq 3x^2 - 6x + 2, \quad \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 2$. Vậy $m \in (-\infty; 2]$.

+ Có $(-\infty; a] \cap (3; 2025) = (-\infty; 2] \cap (3; 2025) = \emptyset \Rightarrow$ c sai

+ phương trình $8^x = a \Leftrightarrow 8^x = 2 \Leftrightarrow 2^{3x} = 2 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow$ d sai

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x-1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Với $m = -1$ thì hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$

b) Với $m = 0$ thì hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định khi và chỉ khi m thuộc $[a; b]$. Khi đó $a + 5b = 0$

d) Điều kiện cần và đủ để hàm số đồng biến trên $(4; +\infty)$ là $m \in [-1; +\infty)$.

Lời giải

+ TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$m = -1: y = \frac{2x-6}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{4}{(x-1)^2}, \forall x \in D$$

a. Với

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$

$\Rightarrow$ Mệnh đề a đúng

$$m = 0: y = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

b. Với

Từ BBT của hàm số $y = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$ và $(1; 2)$

$\Rightarrow$ Hàm số không nghịch biến trên $(1; +\infty)$

$\Rightarrow$ Mệnh đề b sai

c. + TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Xét hai trường hợp

TH1: Khi $m = -1$, ta có hàm số $y = \frac{2x-6}{x-1}$ và $y' = \frac{4}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in D$

Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định

Vậy, $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$y' = \frac{(m+1)x^2 - 2(m+1)x - 4m}{(x-1)^2}$$

TH2: Khi $m \neq -1$, ta có

Đặt $g(x) = (m+1)x^2 - 2(m+1)x - 4m$ và ta có y' cùng dấu với $g(x)$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in D$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 + 4m(m+1) \leq 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(5m+1) \leq 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq -\frac{1}{5}$$

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu của bài toán là $\left[-1; -\frac{1}{5}\right]$

d. Theo câu c $m = -1$ thỏa mãn đề bài

Với $m \neq -1$ Khi đó hàm số đồng biến trên khoảng $(4; +\infty) \Leftrightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in (4; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-x^2}{x^2-2x-4} \leq m, \forall x \in (4; +\infty)$$

Với mọi m dương hàm số luôn có 3 điểm cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^4 - m$, trong đó m là tham số. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Với mọi m dương hàm số luôn có 3 điểm cực trị.

- b) Với $m < 0$ hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
- c) Hàm số luôn luôn có một điểm cực tiểu với mọi giá trị của tham số m .
- d) Không tồn tại giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều thuộc các trục tọa độ.

Lời giải

a) $y' = 4x^3 - 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$ do đó với mọi $m > 0$, $y' = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ
 $\Rightarrow$ Hàm số có 3 điểm cực trị.

Suy ra mệnh đề **đúng**.

b) $y' = 4x^3 - 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}; y'' = 12x^2 - 4m$

Ta có: $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y''(0) = -4m > 0 \forall m < 0 \end{cases}$ do đó với $m < 0$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
 Vậy mệnh đề **sai**.

c) Ta có:

Với $m = 0, y' = x^3$ Hàm số có một điểm cực tiểu.

Với $m \neq 0$ hàm số có 3 điểm cực trị trong đó có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

Suy ra mệnh đề **đúng**.

d) Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$

Xét

Đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Khi đó tọa độ các điểm cực trị là $A(0; 2m^4 - m), B(\sqrt{m}; 2m^4 - m^2 - m), C(-\sqrt{m}; 2m^4 - m^2 - m)$

Ta có $A \in Oy$. Để $B, C \in Ox$ thì $2m^4 - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 2m^3 - m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$

Do $m > 0$ nên ta được $m = 1$.

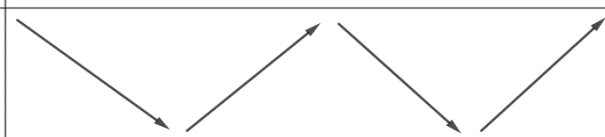
Vậy mệnh đề **sai**.

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có số điểm cực đại là?

Lời giải

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

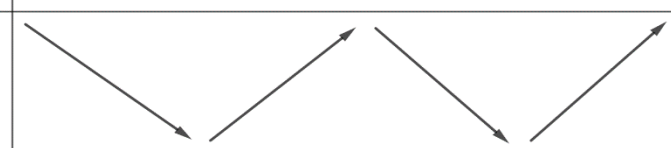
x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$							

Ta có $g(x) = f(3-x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3-x)$

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3-x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \leq -1 \\ 1 \leq 3-x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

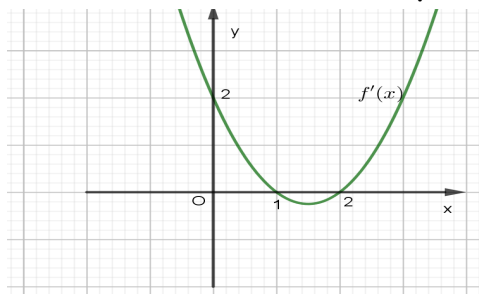
Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực đại.

Đáp số: 1

Câu 2. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y = f(2-x^2)$ đồng biến trên khoảng khi đó $a+2b$ có giá trị là

Lời giải

Hàm số $y = f(2-x^2)$ có $y' = -2x.f'(2-x^2)$

$$y' = -2x.f'(2-x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 < 2-x^2 < 2 \\ x < 0 \\ 2-x^2 < 1 \\ 2-x^2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 < x < 1 \\ x < 0 \\ x < -1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < -1 \end{cases}$$

Do đó hàm số đồng biến trên $(0;1)$. Khi đó $a=0, b=1$ và $a+2b=2$

Đáp số: 2

Câu 3. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y = \left| -x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1 \right|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$. Tổng tất cả các phần tử của S là

Đáp số:

Lời giải

Gọi $y = f(x) = -x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1$.

Nhận xét $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Do đó hàm số $y = \left| -x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1 \right|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \leq 0 & \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^3 + 3mx^2 + 4m^2x \leq 0 & \forall x \in (1; +\infty) \\ -1 + m + 2m^2 + m - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x^3 + 3mx^2 + 4m^2x \leq 0 & \forall x \in (1; +\infty) \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < m < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 3mx + 4m^2 \leq 0 & \forall x \in (1; +\infty) \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < m < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (2) $\Rightarrow m \in [-1; 0]$ thay vào (1) đều thỏa mãn vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x^2 + 9x)(x^2 - 9)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 3x| + 2m - m^2)$ có không quá 6 điểm cực trị?

Đáp số:

Lời giải

Ta có:

$$g(x) = f(|x^3 + 3x| + 2m - m^2) \Rightarrow g'(x) = \frac{3x(x^2 + 3)(x^2 + 1)}{|x^3 + 3x|} \cdot f'(|x^3 + 3x| + 2m - m^2)$$

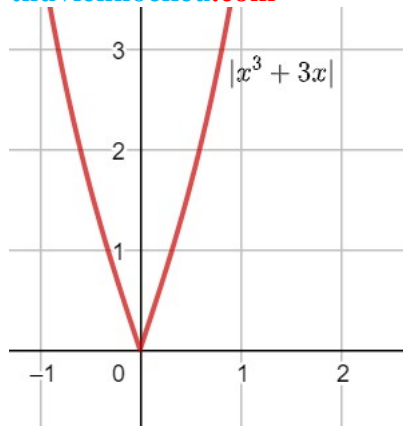
Dễ thấy $g'(x)$ không xác định tại $x = 0$ và khi qua $x = 0$ thì $g'(x)$ đổi dấu nên $x = 0$ là một điểm cực trị của hàm số $g(x)$.

Để $g(x)$ có không quá 6 điểm cực trị thì phương trình $f'(|x^3 + 3x| + 2m - m^2) = 0$ có thể có tối đa 5 nghiệm bội lẻ khác $x = 0$.

Có:

$$f'(|x^3 + 3x| + 2m - m^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 3x| + 2m - m^2 = 0 \\ |x^3 + 3x| + 2m - m^2 = -9 \\ |x^3 + 3x| + 2m - m^2 = -3 \\ |x^3 + 3x| + 2m - m^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 3x| = m^2 - 2m \\ |x^3 + 3x| = m^2 - 2m - 9 \\ |x^3 + 3x| = m^2 - 2m - 3 \\ |x^3 + 3x| = m^2 - 2m + 3 \end{cases}$$

Dựa vào hình ảnh đồ thị hàm số $|x^3 + 3x|$:



Để $g(x)$ có không quá 6 điểm cực trị thì: $m^2 - 2m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$

Vậy có 5 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 5. Một chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 2$ với $t > 0$, t tính bằng giây và S tính bằng mét. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của vật tăng?

Đáp số:

Lời giải

Ta có $v(t) = S'(t) = t^2 - 6t + 5$, $t > 0$.

$$v'(t) = 2t - 6 \quad v'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

Bảng biến thiên:

t	0			3		$+\infty$	
$v'(t)$	-		0		+		
$v(t)$	5		-4		$+\infty$		

Từ bảng biến thiên ta thấy vận tốc tăng trong khoảng thời gian $(3; +\infty)$.

Đáp số: $(3; +\infty)$.

Câu 6. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 km . Vận tốc dòng nước là 6 km/h . Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(\text{km/h})$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng nào thì năng lượng tiêu hao của cá giảm?

Đáp số:

Lời giải

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v - 6(\text{km/h})$.

Thời gian để cá vượt khoảng cách 300 km là $t = \frac{300}{v - 6} (v > 6)$.

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách $300km$ là

$$E(v) = cv^3 \cdot \frac{300}{v-6} = 300c \cdot \frac{v^3}{v-6}$$

$$E'(v) = 600cv^2 \cdot \frac{v-9}{(v-6)^2} \quad E'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 9$$

Bảng biến thiên

v	6	9	$+\infty$
$E'(v)$		0	+
$E(v)$		$E(9)$	

Từ bảng biến thiên ta thấy vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng $(6; 9)$ thì năng lượng tiêu hao của cá giảm.

Đáp số: $(6; 9)$.