

CHỦ ĐỀ 5**GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẪNG****DẠNG 1****GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BIỂU THỨC**

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.
 Tìm tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $T = \left| \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right|$ nhỏ nhất
 (với $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

Phương pháp giải**Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)****Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I**

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$

Dựa vào đẳng thức $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I .

Ta có:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} + \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} \quad (\text{do } \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}) \\ \Rightarrow T &= \left| \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right| = \left| \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \right| \left| \overrightarrow{MI} \right| \end{aligned}$$

Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $T_{\min} \Leftrightarrow \left| \overrightarrow{MI} \right|_{\min}$

Mà $M \in (P)$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

- + Lập phương trình tham số đường thẳng IM với $\begin{cases} \text{Qua } I \\ u_{IM} = n_P = (A; B; C) \end{cases}$.
- + Ta có $M = IM \cap (P) \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bunhiacốpski

Với $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có:

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Dấu "=" xảy ra

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.
 Tìm tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$ nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) (với $\alpha_1; \alpha_2 \dots \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

Chú ý:

$$T_{\min} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$$

$$T_{\max} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$$

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

+ Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$

+ Dựa vào đẳng thức $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I .

+ Ta có:

$$\begin{aligned} T &= \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2 \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{MA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MA_n})^2 \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n})^2 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MI^2 + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 + 2MI(\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MI + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 \quad (\text{do } \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}) \\ \Rightarrow T &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MI + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 \end{aligned}$$

+ Vì $\alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2$ không đổi nên:

- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.
- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.

+ Mà $M \in (P)$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

+ Lập phương trình tham số đường thẳng IM với $\begin{cases} \text{Qua } I \\ u_{IM} = n_p = (A; B; C) \end{cases}$.

+ Ta có $M = IM \cap (P) \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bu-nhia-cốp-xki

Với $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có: $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Dấu "=" xảy ra

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; 2), B(3; 1; -1)$ và mặt phẳng

$(P): x + y + z - 1 = 0$. Gọi $M(a; b; c) \in (P)$ sao cho $\left| \overrightarrow{3MA} - \overrightarrow{2MB} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính

$$S = 9a + 3b + 6c.$$

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Phương pháp hình học

Gọi $I(m; n; p)$ là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{3IA} - \overrightarrow{2IB} = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (1 - m; -n; 2 - p); \overrightarrow{IB} = (3 - m; 1 - n; -1 - p)$.

$$\overrightarrow{3IA} - \overrightarrow{2IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(1 - m) - 2(3 - m) = 0 \\ 3(-n) - 2(1 - n) = 0 \\ 3(2 - p) - 2(-1 - p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = -2 \\ p = 8 \end{cases} \Rightarrow I(-3; -2; 8).$$

Ta có $\left| \overrightarrow{3MA} - \overrightarrow{2MB} \right| = \left| \overrightarrow{3(MI + IA)} - \overrightarrow{2(MI + IB)} \right| = \left| \overrightarrow{MI} \right| = MI$.

Khi đó, $\left| \overrightarrow{3MA} - \overrightarrow{2MB} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $M \in (P) \Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất, $M \in (P)$

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P) .

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P) . Khi đó Δ nhận vectơ pháp tuyến của (P) là

$$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -2 + t \\ z = 8 + t \end{cases}$$

$n = (1; 1; 1)$ làm vectơ chỉ phương

$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = -2 + t \\ z = 8 + t \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{11}{3} \\ y = -\frac{8}{3} \\ z = \frac{22}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{3} \\ b = -\frac{8}{3} \\ c = \frac{22}{3} \end{cases} \Rightarrow S = 9a + 3b + 6c = 3.$$

M là nghiệm của hệ

Tọa độ

Cách 2: Phương pháp đại số

$$M(a; b; c) \in (P) \Rightarrow a + b + c - 1 = 0$$

$$\overline{3MA} - 2\overline{MB} = (-3 - a; -2 - b; 8 - c) \Rightarrow |\overline{3MA} - 2\overline{MB}| = \sqrt{(a+3)^2 + (b+2)^2 + (c-8)^2}$$

$$\text{Ta có: } a + b + c - 1 = 0 \Leftrightarrow (a+3) + (b+2) + (c-8) = -1$$

$$\begin{aligned} |(a+3) + (b+2) + (c-8)| &= |1.(a+3) + 1.(b+2) + 1.(c-8)| \leq \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2)} \sqrt{(a+3)^2 + (b+2)^2 + (c-8)^2} \\ &\Rightarrow \sqrt{(a+3)^2 + (b+2)^2 + (c-8)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \frac{a+3}{1} = \frac{b+2}{1} = \frac{c-8}{1} \Leftrightarrow a+3 = b+2 = c-8 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -1 \\ a - c = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ a - c = -11 \\ a + b + c - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{3} \\ b = -\frac{8}{3} \\ c = \frac{22}{3} \end{cases}$$

Ta có hệ:

$$\Rightarrow S = 9a + 3b + 6c = 3$$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4; 2; 2)$, $B(1; 1; -1)$, $C(2; -2; -2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (Oxy) sao cho $|\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC}|$ nhỏ nhất.

- A. $M(2; 3; 0)$ B. $M(1; 3; 0)$ C. $M(2; -3; 0)$ D. $M(2; 3; 1)$

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Phương pháp hình học

Gọi I là điểm thỏa mãn:

$$\vec{IA} + 2\vec{IB} - \vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{IO} + \vec{OA} + 2(\vec{IO} + \vec{OB}) - (\vec{IO} + \vec{OC}) = \vec{0}$$

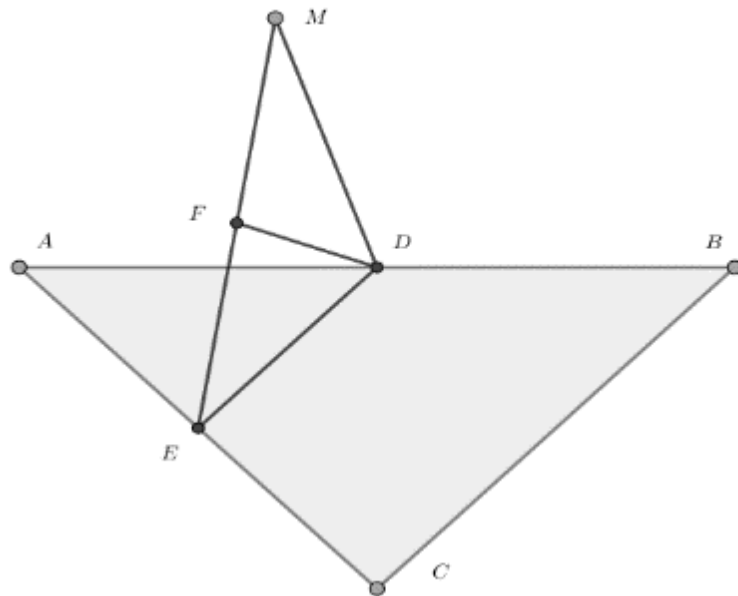
$$\Leftrightarrow \vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + 2\vec{OB} - \vec{OC}) \Rightarrow I(2; 3; 1)$$

$$|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}| = |2\vec{MI} + \vec{IA} + 2\vec{IB} - \vec{IC}| = 2.MI$$

$$|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}| \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow MI \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow M \text{ là hình chiếu của } I \text{ trên } mp(Oxy).$$

Vì $I(2; 3; 1) \Rightarrow M(2; 3; 0)$

Cách 2: Phương pháp hình học



Gọi $D; E; F$ lần lượt là trung điểm của $AB; AC; ME$. Ta có:

$$|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}| = |\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MB} - \vec{MC}| = |2\vec{MD} + \vec{CB}| = |2\vec{MD} + 2\vec{ED}| = 2|\vec{FD}| = 4.FD$$

Ta lại có:

$$M(x; y; 0); D\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right); E(3; 0; 0); F\left(\frac{x+3}{2}; \frac{y}{2}; 0\right)$$

$$FD_{\min} \Leftrightarrow F \text{ là hình chiếu của } D \text{ trên } mp(Oxy) \Leftrightarrow x=2; y=3 \Leftrightarrow M(2; 3; 0)$$

Cách 3: Phương pháp đại số

$$M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$$

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC} = (4 - 2x; 6 - 2y; -1)$$

$$\Rightarrow |\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}| = \sqrt{(4 - 2x)^2 + (6 - 2y)^2 + 1} \geq 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=2; y=3$. Khi đó $M(2; 3; 0)$.

Cách 4: Trắc nghiệm, thay đáp án

$$M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0). \text{ Ta có:}$$

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC} = (4 - 2x; 6 - 2y; -1) \Rightarrow |\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}| = \sqrt{(4 - 2x)^2 + (6 - 2y)^2 + 1}$$

Thế tọa độ điểm M ở đáp án A vào ta được $\left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right| = 1$

Thế tọa độ điểm M ở đáp án B vào ta được $\left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right| = \sqrt{17}$

Thế tọa độ điểm M ở đáp án C vào ta được $\left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right| = \sqrt{145}$

Điểm M ở đáp án D không thuộc (O_{xy}) nên bị loại.

Câu 3. Trong hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(-1; 3; 5)$, $B(2; 6; -1)$, $C(-4; -12; 5)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 5 = 0$. Gọi M là điểm di động trên (P) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right|$$
 là

- A. 42. B. 14. C. $14\sqrt{3}$. D. $\frac{14}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $G(x_1; y_1; z_1)$ là trọng tâm tam giác ABC .

Vì G là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm tùy ý nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MG}$.

Vậy $S = \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right| = \left| 3\overrightarrow{MG} \right| = 3MG$.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-1 + 2 - 4}{3} = -1 \\ y_1 = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3 + 6 - 12}{3} = -1 \Rightarrow G(-1; -1; 3) \\ z_1 = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{5 - 1 + 5}{3} = 3 \end{cases}$$

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên

Vì G cố định nên $S = 3MG$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất. Tức là $MG \perp (P)$.

$$d(G, (P)) = \frac{|-1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{14}{3} = MG.$$

Ta có:

$$S = \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right| = \left| 3\overrightarrow{MG} \right| = 3MG = 3 \cdot \frac{14}{3} = 14.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4; 2; 2)$, $B(1; 1; -1)$, $C(2; -2; -2)$. Tìm tọa độ

điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $\left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right|$ nhỏ nhất

- A. $M(2; 3; 1)$. B. $M(0; 3; 1)$. C. $M(0; -3; 1)$. D. $M(0; 1; 2)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = 0$.

Khi đó $\vec{IA} + 2\vec{IB} - \vec{IC} = 0 \Leftrightarrow (\vec{OA} - \vec{OI}) + 2(\vec{OB} - \vec{OI}) - (\vec{OC} - \vec{OI}) = 0$

$\Leftrightarrow \vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + 2\vec{OB} - \vec{OC}) = (2; 3; 1) \Leftrightarrow I(2; 3; 1)$

Ta có $|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}| = |(\vec{MI} + \vec{IA}) + 2(\vec{MI} + \vec{IB}) - (\vec{MI} + \vec{IC})|$
 $= |2\vec{MI} + \vec{IA} + 2\vec{IB} - \vec{IC}| = 2|\vec{MI}| = 2MI$

$|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI ngắn nhất, khi đó M là hình chiếu của $I(2; 3; 1)$ lên mặt phẳng (Oyz) . Suy ra $M(0; 3; 1)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1; -1; 3)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; -3)$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 4 = 0$. Gọi $M(a, b, c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T = |3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b + c$.

A. $S = 3$.

B. $S = -1$.

C. $S = 2$.

D. $S = 1$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $3\vec{IA} - 2\vec{IB} + \vec{IC} = 0$

Ta có $\vec{IA} = (1 - x; -1 - y; 3 - z) \Rightarrow 3\vec{IA} = (3 - 3x; -3 - 3y; 9 - 3z)$

$\vec{IB} = (2 - x; 1 - y; -z) \Rightarrow 2\vec{IB} = (4 - 2x; 2 - 2y; -2z)$

$\vec{IC} = (-3 - x; -1 - y; -3 - z)$

Khi đó $3\vec{IA} - 2\vec{IB} + \vec{IC} = (-2x - 4; -2y - 6; -2z + 6) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4 = 0 \\ -2y - 6 = 0 \\ -2z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \\ z = 3 \end{cases}$. Vậy $I(-2; -3; 3)$

Ta có $T = |3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}| = |3(\vec{MI} + \vec{IA}) - 2(\vec{MI} + \vec{IB}) + (\vec{MI} + \vec{IC})| = 2|\vec{MI}|$

Suy ra $T_{\min} \Leftrightarrow |\vec{MI}|_{\min}$ khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P)

Đường thẳng MI đi qua $I(-2; -3; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là

$MI: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -3 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$. Lấy $M(-2 + t; -3 + t; 3 - t) \in MI$

Mặt khác $M \in (P) \Rightarrow (-2 + t) + (-3 + t) - (3 - t) - 4 = 0 \Rightarrow t = 4$

Suy ra $M(2;1;-1)$.

Vậy $a+b+c=2$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và ba điểm $A(3;1;1)$, $B(7;3;9)$ và $C(2;2;2)$. Điểm $M(a;b;c)$ trên (P) sao cho $|\vec{MA}+2\vec{MB}+3\vec{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $2a-10b+c$.

A. $\frac{62}{9}$.

B. $\frac{27}{9}$.

C. $\frac{46}{9}$.

D. $\frac{43}{9}$.

Lời giải

Chọn A

+ Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\vec{IA}+2\vec{IB}+3\vec{IC}=\vec{0}$.

$$\begin{cases} \vec{IA}=(3-x;1-y;1-z) \\ \vec{IB}=(7-x;3-y;9-z) \\ \vec{IC}=(2-x;2-y;2-z) \end{cases}$$

Ta có

$$\vec{IA}+2\vec{IB}+3\vec{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 23-6x=0 \\ 13-6y=0 \\ 25-6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{23}{6} \\ y=\frac{13}{6} \\ z=\frac{25}{6} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{23}{6};\frac{13}{6};\frac{25}{6}\right)$$

$$|\vec{MA}+2\vec{MB}+3\vec{MC}|=|\vec{MI}+(\vec{IA}+2\vec{IB}+3\vec{IC})|=|\vec{MI}|=MI$$

$|\vec{MA}+2\vec{MB}+3\vec{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) .

+ Gọi đường thẳng (d) đi qua I và vuông góc (P) .

Ta có (d) đi qua $I\left(\frac{23}{6};\frac{13}{6};\frac{25}{6}\right)$ và nhận $\vec{n}_P=(1;1;1)$ làm véc tơ chỉ phương.

$$(d): \begin{cases} x=\frac{23}{6}+t \\ y=\frac{13}{6}+t \\ z=\frac{25}{6}+t \end{cases}$$

Suy ra phương trình

$$M \in (d) \Leftrightarrow M\left(\frac{23}{6}+t;\frac{13}{6}+t;\frac{25}{6}+t\right)$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow \frac{23}{6}+t+\frac{13}{6}+t+\frac{25}{6}+t-3=0 \Leftrightarrow t=\frac{-43}{18} \Leftrightarrow M\left(\frac{13}{9};-\frac{2}{9};\frac{16}{9}\right)$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} a = \frac{13}{9} \\ b = \frac{-2}{9} \\ c = \frac{16}{9} \end{cases} \Rightarrow 2a - 10b + c = \frac{62}{9}$$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;2)$ và điểm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 7 = 0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P = |3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}|$.

- A. $P_{\min} = 20$ B. $P_{\min} = 5$ C. $P_{\min} = 25$ D. $P_{\min} = 27$

Lời giải

Chọn D

Gọi I là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} - 7\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}) + 5(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) - 7(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} - 7\overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow \text{Tọa độ điểm } I = (-23; 20; -11)$$

$$\text{Khi đó: } u = 3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC} = 3(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM}) + 5(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM}) - 7(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM})$$

$$= -\overrightarrow{IM} + (3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} - 7\overrightarrow{IC}) = -\overrightarrow{IM}$$

$$\text{Nên: } P = |3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}| = |-\overrightarrow{IM}| = IM \geq d(I, (\alpha))$$

$$\text{Vậy: } P_{\min} = d(I, (\alpha)) = \frac{|2(-23) - 20 + 2(-11) + 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 27$$

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là:

- A. $M(0;1;-4)$ B. $M(2;1;0)$ C. $M(0;1;-2)$ D. $M(0;1;4)$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (-2; 7; -6), \overrightarrow{AC} = (1; 3; -2), \overrightarrow{AD} = (1; 6; -4) \text{ nên } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -4 \neq 0$$

Suy ra: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó $G(2;1;4)$.

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MG}$

Do đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\overrightarrow{MG}$ ngắn nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oyz) nên $M(0;1;4)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T = a^2 + b^2$ bằng

- A. $T = 10$. B. $T = 25$. C. $T = 13$. D. $T = 17$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $G(-1;3;2)$ là trọng tâm tam giác ABC .

Khi đó

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Oxy) . Do hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $(-1;3;0)$. Vậy $M(-1;3;0)$. Từ đó $T = (-1)^2 + 3^2 = 10$.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P = x + y + z$.

- A. $P = 0$. B. $P = 2$. C. $P = 6$. D. $P = -2$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow I(2;-2;2)$.

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 \end{aligned}$$

Mà $M \in (Oyz) \Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên (Oyz)
 $\Leftrightarrow M(0;-2;2)$

Vậy $P = 0 - 2 + 2 = 0$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P) , tính giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$.

Lời giải

Đáp án: giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ là 135

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{2MA} + \overrightarrow{3MB} = \vec{0}$ suy ra $I(-1; 1; 1)$

$$IA^2 = 27; IB^2 = 12; d(I, (P)) = 3$$

$$2MA^2 + 3MB^2 = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 5\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 + 3\overrightarrow{IB}^2 = 5MI^2 + 90$$

Mà $2MA^2 + 3MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

$$\text{Suy ra } MI \geq d(I, (P)) = 3$$

$$\text{Vậy } 2MA^2 + 3MB^2 \geq 5 \cdot 9 + 90 = 135$$

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 4; 5)$, $B(3; 4; 0)$, $C(2; -1; 0)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a + b + c$ có giá trị bằng

- A. 2. B. 3. **C. 4.** D. -4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OC} = (2; 1; 1) \Rightarrow I(2; 1; 1)$$

$$\text{Khi đó, } T = MA^2 + MB^2 + 3MC^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2$$

$$= 5MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) + IA^2 + IB^2 + 3IC^2$$

$$= 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + 3IC^2 \quad (\text{vì } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0})$$

Vì I, A, B, C cố định $\Rightarrow IA^2 + IB^2 + 3IC^2$ không đổi nên T nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow M \equiv I(2; 1; 1) \Rightarrow a = 2, b = c = 1.$$

$$\text{Vậy } a + b + c = 4.$$

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 4; 5)$, $B(3; 4; 0)$, $C(2; -1; 0)$ và mặt phẳng $(P): 3x + 3y - 2z - 29 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt GTNN. Tính tổng $a + b + c$.

- A. 8.** B. 10. C. -10. D. -8.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức: $\vec{IA} + \vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0}$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \vec{OI} = \frac{1}{5}\vec{OA} + \frac{1}{5}\vec{OB} + \frac{3}{5}\vec{OC} = (2; 1; 1) \Leftrightarrow I(2; 1; 1)$$

Khi đó,

Mặt khác, áp dụng tính chất tâm tỉ cự của hệ điểm $\Rightarrow T = 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + 3IC^2$.

Vì $IA^2 + IB^2 + 3IC^2$ là hằng số nên suy ra T đạt GTNN $\Leftrightarrow MI$ đạt GTNN

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ IM \perp \text{ng ph } \text{ng}(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 3b - 2c = 29 \\ \frac{a-2}{3} = \frac{b-1}{3} = \frac{c-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases}$$

Vậy $a + b + c = 8$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 2; 3), B(0; 1; 1), C(1; 0; -2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho giá trị của biểu thức $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(Q): 2x - y - 2z + 3 = 0$?

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{121}{54}$ C. 24 **D. $\frac{91}{54}$**

Lời giải

Chọn D

Gọi $I(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0}$.

Ta có $\vec{IA}(1-a; 2-b; 3-c), \vec{IB}(-a; 1-b; 1-c), \vec{IC}(1-a; -b; -2-c)$

$$\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a-2a+3-3a=0 \\ 2-b+2-2b-3b=0 \\ 3-c+2-2c-6-3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a=4 \\ 6b=4 \\ 6c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=\frac{2}{3} \\ c=-\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{6}\right)$$

Ta chứng minh được $T = 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2$. Do đó T đạt GTNN khi MI đạt GTNN $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) .

$$MI: \begin{cases} x = \frac{2}{3} + t \\ y = \frac{2}{3} + t \\ z = -\frac{1}{6} + t \end{cases} \quad M \in MI \Rightarrow M\left(t + \frac{2}{3}; t + \frac{2}{3}; t - \frac{1}{6}\right), M \in (P) \Rightarrow 3t + \frac{19}{6} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{19}{18}$$

Ta có

$$\Rightarrow M\left(-\frac{7}{18}; -\frac{7}{18}; -\frac{11}{9}\right) \Rightarrow d(M; (Q)) = \frac{\left|-\frac{7}{9} + \frac{7}{18} + \frac{22}{9} + 3\right|}{3} = \frac{91}{54}$$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$, $C(-1; -1; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 8 = 0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P) , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2MA^2 + MB^2 - MC^2$.

A. 102.

B. 105.

C. 30.

D. 35.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn: } 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) - (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} &= (1; 0; 4) \\ \Leftrightarrow I(1; 0; 4) \end{aligned}$$

Khi đó, với mọi điểm $M(x; y; z) \in (P)$, ta luôn có:

$$\begin{aligned} T &= 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}) + 2\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 - \overrightarrow{IC}^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 - \overrightarrow{IC}^2 \end{aligned}$$

Ta tính được $2\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 - \overrightarrow{IC}^2 = 30$.

Do đó, T đạt GTNN $\Leftrightarrow MI$ đạt GTNN $\Leftrightarrow MI \perp (P)$.

$$IM = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 0 + 2 \cdot 4 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 6$$

Lúc này,

$$\text{Vậy } T_{\min} = 2 \cdot 6^2 + 30 = 102$$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1; 2; 0)$, $B(1; -1; 3)$, $C(1; -1; -1)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z - 15 = 0$. Xét $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 3.

B. 7.

C. 2.

D. -1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn: } 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}) - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OI} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB}}{2} \Rightarrow I(1; 2; -2)$$

Ta có $2MA^2 = 2MA^2 = 2(\vec{MI} + \vec{IA})^2 = 2MI^2 + 2IA^2 + 4\vec{MI} \cdot \vec{IA}$

$$MB^2 = MB^2 = (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = MI^2 + IB^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IB}$$

$$MC^2 = MC^2 = (\vec{MI} + \vec{IC})^2 = MI^2 + IC^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IC}$$

Suy ra $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + 2IA^2 + IC^2 - IB^2 + 2\vec{MI} \cdot (2\vec{IA} + \vec{IC} - \vec{IB})$

Suy ra $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + 2IA^2 + IC^2 - IB^2$. Do I cố định nên $2IA^2 + IC^2 - IB^2$ không đổi.

Vậy $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (P) .

• Đường thẳng Δ qua $I(1; 2; -2)$ và vuông góc với (P) là:
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = -2 + 2t \\ 3x - 3y + 2z - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow M(4; -1; 0)$$

Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

Suy ra $a + b + c = 3$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(3; 1; -5)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ lớn nhất.

A. $M(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0)$

B. $M(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; 0)$

C. $M(0; 0; 5)$

D. $M(3; -4; 0)$

Lời giải

Chọn D

Gọi điểm E thỏa $\vec{EA} - 2\vec{EB} = \vec{0}$. Suy ra B là trung điểm của AE , suy ra $E(3; -4; 5)$.

Khi đó: $MA^2 - 2MB^2 = (\vec{ME} + \vec{EA})^2 - 2(\vec{ME} + \vec{EB})^2 = -ME^2 + EA^2 - 2EB^2$.

Do đó $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất $\cup ME$ nhỏ nhất $\cup M$ là hình chiếu của $E(3; -4; 5)$ lên (Oxy)
 $\hat{=} M(3; -4; 0)$

Chú ý: Ta có thể làm trắc nghiệm như sau

+ Loại C vì $M(0; 0; 5)$ không thuộc (Oxy) .

+ Lần lượt thay $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$, $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$, $M(3; -4; 0)$ vào biểu thức $MA^2 - 2MB^2$ thì $M(3; -4; 0)$ cho giá trị lớn nhất nên ta chọn $M(3; -4; 0)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10; -5; 8)$, $B(2; 1; -1)$, $C(2; 3; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 9 = 0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$.

A. 54

B. 282

C. 256

D. 328

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (-10 - x; -5 - y; 8 - z)$, $\overrightarrow{IB} = (2 - x; 1 - y; -1 - z)$, $\overrightarrow{IC} = (2 - x; 3 - y; -z)$.

$$\text{Khi đó, } \begin{cases} (-10 - x) + 2(2 - x) + 3(2 - x) = 0 \\ (-5 - y) + 2(1 - y) + 3(3 - y) = 0 \\ (8 - z) + 2(-1 - z) + 3(-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0; 1; 1)$$

Với điểm M thay đổi trên (P) , ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) \\ &= 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 \quad (\text{Vì } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}). \end{aligned}$$

Ta lại có $IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 = 185 + 2.8 + 3.9 = 228$.

Do đó, $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P) .

Khi đó, $MI = d(I, (P)) = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ bằng

$$6MI^2 + 228 = 6.9 + 228 = 282.$$

Giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt được khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P) .

Lưu ý thêm cách tìm điểm M như sau:

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P) . Phương trình của Δ :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Ta có $M = \Delta \cap (P)$. Xét phương trình

$$t + 2(1 + 2t) - 2(1 - 2t) - 9 = 0 \Leftrightarrow 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1; 3; -1)$$

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 1)$, $B(5; 0; -1)$, $C(3; 1; 2)$ và mặt phẳng $(Q): 3x + y - z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc (Q) thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + 5c$.

A. 11.

B. 9.

C. 15.

D. 14.

Lời giải

Chọn B

Gọi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Rightarrow E(3; 0; 1)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{MC}^2 \\ &= (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 + 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC})^2 \\ &= 4ME^2 + EA^2 + EB^2 + 2EC^2. \end{aligned}$$

Vì $EA^2 + EB^2 + 2EC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất khi và chỉ khi ME nhỏ nhất.

$\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của E lên (Q) .

$$\text{Phương trình đường thẳng } ME: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Tọa độ điểm } M \text{ là nghiệm của hệ phương trình: } & \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ 3x + y - z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ t = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M(0; -1; 2) \Rightarrow a = 0, b = -1, c = 2.$$

$$\Rightarrow a + b + 5c = 0 - 1 + 5 \cdot 2 = 9.$$

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1; 1; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(-2; 1; 4)$ và mặt phẳng $(P): x - y + z + 2 = 0$. Tìm điểm $N \in (P)$ sao cho $S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $N\left(-\frac{4}{3}; 2; \frac{4}{3}\right)$.

B. $N(-2; 0; 1)$.

C. $N\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

D. $N(-1; 2; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Với mọi điểm I ta có

$$S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 2(\overline{NI} + \overline{IA})^2 + (\overline{NI} + \overline{IB})^2 + (\overline{NI} + \overline{IC})^2$$

$$= 4NI^2 + 2\overline{NI}(2\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC}) + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$$

Chọn điểm I sao cho $2\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} = 0$

$$2\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} = 0 \Leftrightarrow 4\overline{IA} + \overline{AB} + \overline{AC} = 0 \text{ Suy ra tọa độ điểm } I \text{ là: } I(0;1;2)$$

Khi đó $S = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$, do đó S nhỏ nhất khi N là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) .

Phương trình đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là:
$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Tọa độ điểm $N(t; 1-t; 2+t) \in (P) \Rightarrow t - 1 + t + 2 + t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow N(-1; 2; 1)$

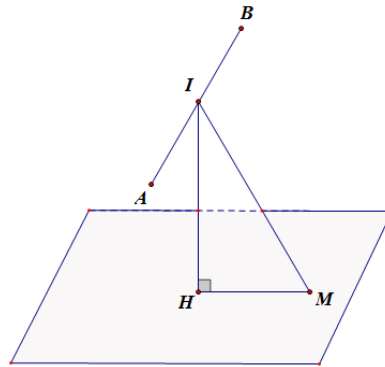
Câu 21. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(4; -2; 6)$, $B(2; 4; 2)$, $M \in (\alpha): x + 2y - 3z - 7 = 0$ sao cho $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ nhỏ nhất. Tọa độ của M bằng

- A. $\left(\frac{29}{13}; \frac{58}{13}; \frac{5}{13}\right)$ B. $(4; 3; 1)$ C. $(1; 3; 4)$ D. $\left(\frac{37}{3}; -\frac{56}{3}; \frac{68}{3}\right)$

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Phương pháp hình học



Gọi I là điểm thỏa mãn $\overline{IA} + \overline{IB} = 0$. Suy ra I là trung điểm $AB \Rightarrow I(3; 1; 4)$.

Ta có $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = (\overline{MI} + \overline{IA})(\overline{MI} + \overline{IB}) = \overline{MI}^2 + \overline{MI}(\overline{IA} + \overline{IB}) = \overline{MI}^2$

Gọi H là hình chiếu của I xuống mặt phẳng (α) .

Do IA không đổi nên $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI = IH \Leftrightarrow M \equiv H$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) .

Khi đó Δ nhận $\overline{n_{(\alpha)}} = (1; 2; -3)$ làm vector chỉ phương. Do đó Δ có phương trình
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$$

$$H \in \Delta \Leftrightarrow H(3+t; 1+2t; 4-3t)$$

$$H \in (\alpha) \Leftrightarrow (3+t) + 2(1+2t) - 3(4-3t) - 7 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow H(4; 3; 1)$$

Vậy $M(4; 3; 1)$

Cách 2: Phương pháp đại số

Gọi $M(x; y; z) \in (\alpha) \Rightarrow x + 2y - 3z - 7 = 0$

$$\overline{MA} = (4-x; -2-y; 6-z), \overline{MB} = (2-x; 4-y; 2-z)$$

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = (4-x)(2-x) + (-2-y)(4-y) + (6-z)(2-z)$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 8z + 12 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 - 12$$

Áp dụng bất B. C. S:

$$\left[1^2 + 2^2 + (-3)^2 \right] \left[(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 \right] \geq [x-3 + 2(y-1) - 3(z-4)]^2$$

$$\Leftrightarrow 14 \left[(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 \right] \geq [x + 2y - 3z + 7]^2$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 \geq \frac{(7+7)^2}{14}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 - 12 \geq 2$$

$$\min(\overline{MA} \cdot \overline{MB}) = 2 \quad \text{xảy ra khi và chỉ khi} \quad \begin{cases} x + 2y - 3z - 7 = 0 \\ \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M(4; 3; 1)$$

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1; -1; 2)$, $B(-2; 0; 3)$, $C(0; 1; -2)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S = \overline{MA} \cdot \overline{MB} + 2\overline{MB} \cdot \overline{MC} + 3\overline{MC} \cdot \overline{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T = 12a + 12b + c$ có giá trị là

A. $T = 3$.

B. $T = -3$.

C. $T = 1$.

D. $T = -1$.

Lời giải

Chọn D

Xét $S = \overline{MA} \cdot \overline{MB} + 2\overline{MB} \cdot \overline{MC} + 3\overline{MC} \cdot \overline{MA}$

$$= (\overline{MI} + \overline{IA})(\overline{MI} + \overline{IB}) + 2(\overline{MI} + \overline{IB})(\overline{MI} + \overline{IC}) + 3(\overline{MI} + \overline{IC})(\overline{MI} + \overline{IA})$$

$$= 6MI^2 + MI(4IA + 3IB + 5IC) + IAIB + 2IBIC + 3ICIA$$

$$\begin{cases} x_I = \frac{4x_A + 3x_B + 5x_C}{12} \\ y_I = \frac{4y_A + 3y_B + 5y_C}{12} \\ z_I = \frac{4z_A + 3z_B + 5z_C}{12} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{2}{12}, \frac{1}{12}, \frac{7}{12}\right)$$

Gọi I là điểm thỏa mãn

Mà: $(4IA + 3IB + 5IC) = 0 \Rightarrow IAIB + 2IBIC + 3ICIA = \text{const}$. Nên $S_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min}$

Suy ra M là hình chiếu của I lên mặt Oxy $\Rightarrow M\left(-\frac{2}{12}, \frac{1}{12}, 0\right) \Rightarrow T = 12a + 12b + c = -1$

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4;1;5), B(3;0;1), C(-1;2;0)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ lớn nhất. Tính $P = a - 2b + 4c$.

A. $P = 23$

B. $P = 31$

C. $P = 11$

D. $P = 13$.

Lời giải

Chọn D

+ Đặt $Q = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$

$$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})^2 = MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2 - AB^2)$$

$$(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2 = MB^2 + MC^2 - 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} \Rightarrow 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MB^2 + MC^2 - BC^2$$

$$(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA})^2 = MC^2 + MA^2 - 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} \Rightarrow \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(MC^2 + MA^2 - AC^2)$$

$$\Rightarrow Q = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$$

$$= \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2 - AB^2) + MB^2 + MC^2 - BC^2 - \frac{5}{2}(MC^2 + MA^2 - AC^2)$$

$$= -2MA^2 + \frac{3}{2}MB^2 - \frac{3}{2}MC^2 - \frac{1}{2}AB^2 - BC^2 + \frac{5}{2}AC^2$$

$$- \frac{1}{2}AB^2 - BC^2 + \frac{5}{2}AC^2 \text{ không đổi nên } Q \text{ lớn nhất khi } T = -2MA^2 + \frac{3}{2}MB^2 - \frac{3}{2}MC^2 \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

$$T = -2MA^2 + \frac{3}{2}MB^2 - \frac{3}{2}MC^2$$

$$-2EA + \frac{3}{2}EB - \frac{3}{2}EC = 0$$

$$\Leftrightarrow -4EA + 3EB - 3EC = 0 \Leftrightarrow 4EA = 3CB \Leftrightarrow EA = \frac{3}{4}CB$$

$$\Rightarrow E\left(1; \frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right)$$

$$T = -2MA^2 + \frac{3}{2}MB^2 - \frac{3}{2}MC^2 = -2\left(\overline{ME} + \overline{EA}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\overline{ME} + \overline{EB}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\overline{ME} + \overline{EC}\right)^2$$

$$= -2ME^2 - 2EA^2 + \frac{3}{2}EB^2 - \frac{3}{2}EC^2 \leq -2EA^2 + \frac{3}{2}EB^2 - \frac{3}{2}EC^2$$

Vì $-2EA^2 + \frac{3}{2}EB^2 - \frac{3}{2}EC^2$ không đổi nên T đạt giá trị lớn nhất khi $ME = 0 \Rightarrow M \equiv E$.

$$\Rightarrow M\left(1; \frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right)$$

$$P = a - 2b + 4c = 1 - 2 \cdot \frac{5}{2} + 4 \cdot \frac{17}{4} = 13$$

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-8; 1; 1)$, $B(2; 1; 3)$ và $C(6; 4; 0)$. Một điểm M di động trong không gian sao cho $\overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} + 34$. Cho biết $|\overline{MA} - \overline{MB}|$ đạt giá trị lớn nhất khi điểm M trùng với điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Tính tích số $x_0 y_0 z_0$.

A. 16.

B. 18.

C. 14.

D. 12.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M = (a; b; c)$.

$$\text{Ta có } \overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} + 34 \Leftrightarrow \overline{MA}(\overline{MC} - \overline{MB}) = 34 \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{BC} = 34$$

$$\text{Mặt khác } \overline{MA} = (-8 - a; 1 - b; 1 - c), \quad \overline{BC} = (4; 3; -3)$$

$$\text{Suy ra } 4(-8 - a) + 3(1 - b) - 3(1 - c) = 34 \Leftrightarrow -4a - 3b + 3c - 66 = 0$$

$$\text{Vậy } M \in (P) \text{ có phương trình } -4x - 3y + 3z - 66 = 0$$

$$\text{Ký hiệu } f(M) = f(x; y; z) = -4x - 3y + 3z - 66, \text{ với } M(x; y; z)$$

$$\text{Ta có } f(A) \cdot f(B) = (-4(-8) - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 66)((-4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 66)) = (-34) \cdot (-68) = 2312 > 0$$

Suy ra điểm $A(-8; 1; 1)$ và điểm $B(2; 1; 3)$ nằm về cùng 1 phía so với mặt phẳng (P) .

Khi đó $|\overline{MA} - \overline{MB}| \leq \overline{AB}$ (tính chất 3 cạnh của tam giác) suy ra $|\overline{MA} - \overline{MB}|$ đạt giá trị lớn nhất khi M, A, B thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn thẳng AB hay M là giao điểm của đường thẳng AB với (P) .

Đường thẳng AB có véc tơ chỉ phương $\overline{AB} = (10; 0; 2)$ và qua điểm $B(2; 1; 3)$ nên có phương trình

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } -4(2 + 5t) - 3 \cdot 1 + 3(3 + t) - 66 = 0 \Leftrightarrow -17t = 68 \Leftrightarrow t = -4$$

$$\text{Vậy } M(-18; 1; -1) \text{ hay } x_0 y_0 z_0 = 18.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3;2;1)$, $B(-2;3;6)$. Điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) . Tìm giá trị của biểu thức $T = x_M + y_M + z_M$ khi $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = 2$

Gọi điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}$ khi đó:

$$\begin{cases} x_H = \frac{x_A + 3x_B}{1+3} \\ y_H = \frac{y_A + 3y_B}{1+3} \\ z_H = \frac{z_A + 3z_B}{1+3} \Rightarrow H\left(-\frac{3}{4}; \frac{11}{4}; \frac{19}{4}\right) \end{cases}$$

Phương trình mặt phẳng (Oxy) là $z = 0$.

Xét $T = \frac{z_H}{1} = \frac{19}{4}$ do đó tọa độ điểm M cần tìm là:

$$\begin{cases} x_M = x_H - aT \\ y_M = y_H - bT \\ z_M = z_H - cT \Rightarrow M\left(-\frac{3}{4}; \frac{11}{4}; 0\right) \end{cases}$$

Vậy $T = x_M + y_M + z_M = -\frac{3}{4} + \frac{11}{4} + 0 = 2$.

Câu 26. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;3)$, $B(6;-5;8)$ và $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{k}$ trong đó a, b là các số thực luôn thay đổi. Nếu $|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị $a - b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $a - b = 0$

Ta có: $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{k} \Rightarrow M(a; 0; b)$

$\overrightarrow{MA} = (-1-a; 2; 3-b)$; $\overrightarrow{MB} = (6-a; -5; 8-b) \Rightarrow -2\overrightarrow{MB} = (-12+2a; 10; -16+2b)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = (a-13; 12; b-13)$

$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}| = \sqrt{(a-13)^2 + 12^2 + (b-13)^2} \geq 12$

Vậy $|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|_{\min} = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ b = 13 \end{cases}$. Do đó $a - b = 0$

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 2; 5)$, $B(3; -1; 0)$, $C(-4; 0; -2)$. Gọi I là điểm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $|\vec{IA} - 2\vec{IB} + 3\vec{IC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(P): 4x + 3y + 2 = 0$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $d(I; (P)) = 6$

Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC} = \vec{0}$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} -1 - a - 2(3 - a) + 3(-4 - a) = 0 \\ 2 - b - 2(-1 - b) + 3(0 - b) = 0 \\ 5 - c - 2(0 - c) + 3(-2 - c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{19}{2} \\ b = 2 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M\left(-\frac{19}{2}; 2; -\frac{1}{2}\right)$$

$$|\vec{IA} - 2\vec{IB} + 3\vec{IC}| = |\vec{IM} + \vec{MA} - 2\vec{IM} - 2\vec{MB} + 3\vec{IM} + 3\vec{MC}|$$

Ta có:

$$= |\vec{2IM} + (\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC})| = 2|\vec{IM}| = 2IM$$

Biểu thức $|\vec{IA} - 2\vec{IB} + 3\vec{IC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow I$ là hình chiếu vuông góc của M

$$\text{lên } (Oxy) \Leftrightarrow I\left(-\frac{19}{2}; 2; 0\right)$$

$$\text{Khoảng cách từ điểm } I \text{ đến mặt phẳng } (P) \text{ là: } d(I; (P)) = \frac{\left|4 \cdot \left(-\frac{19}{2}\right) + 3 \cdot 2 + 2\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 6$$

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$, $B(2; -1; 3)$ và điểm $M(a; b; 0)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị của $a + b$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $a + b = 2$

Ta thấy $M(a; b; 0) \in (Oxy)$.

Gọi $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB , ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = (\vec{IA} - \vec{IM})^2 + (\vec{IB} - \vec{IM})^2 \\ &= (\vec{IA}^2 + \vec{IM}^2 - 2\vec{IA} \cdot \vec{IM}) + (\vec{IB}^2 + \vec{IM}^2 - 2\vec{IB} \cdot \vec{IM}) \end{aligned}$$

$$=IM^2 + 2IA^2 - 2IM(\vec{IA} + \vec{IB}) = IM^2 + \frac{AB^2}{2} = IM^2 + 7$$

Bởi vậy $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ ngắn nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng

$$(Oxy). \text{ Bởi vậy } M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right). \text{ Như vậy } a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

Câu 29. Trong không gian cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;6;-5)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $M(1;3;0)$

Lấy $G(1;3;-1)$ là trọng tâm của tam giác ABC .

$$\text{Ta có: } MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2$ bé nhất khi MG bé nhất.

Hay M là hình chiếu của điểm G lên mặt phẳng Oxy . Vậy $M(1;3;0)$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;2)$, $B(1;1;0)$, $C(3;0;1)$ và mặt phẳng $(Q): x + y + z - 5 = 0$.

Xét điểm M thay đổi thuộc (Q) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

$$\frac{34}{3}$$

Đáp án:

Gọi điểm G thỏa mãn $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$, suy ra $G\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$. Khi đó

$$\begin{aligned} P &= MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + 2\vec{MG} \cdot (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ &= 3d^2(G, (Q)) + GA^2 + GB^2 + GC^2. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Q) .

$$\text{Ta có } d(G, (Q)) = \frac{\left| \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 1 - 5 \right|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{GA} = \left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; 1\right), GA^2 = \frac{26}{9}, \vec{GB} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -1\right), GB^2 = \frac{11}{9}, \vec{GC} = \left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; 0\right), GC^2 = \frac{29}{9}$$

Vậy $\min P = 3 \cdot \frac{4}{3} + \frac{26}{9} + \frac{11}{9} + \frac{29}{9} = \frac{34}{3}$ khi M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Q) .

Câu 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x + y + z$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{21}{4}$

Xét điểm $I(a;b;c)$ thỏa mãn $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$. Khi đó $I\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{2}; 0\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 + (\vec{MI} + \vec{ID})^2 \\ &= 4MI^2 + 2\vec{MI}(\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID}) + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \\ &= 4MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \geq IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \quad (\text{vì } MI^2 \geq 0 \text{ với mọi điểm } M) \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv I$ tức là $M\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{2}; 0\right) \Rightarrow x + y + z = \frac{7}{4} + \frac{7}{2} = \frac{21}{4}$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;-1)$. Điểm M thuộc mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 2 = 0$ sao cho $3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\min(3MA^2 + 2MB^2 + MC^2) = \frac{61}{6}$

$$\vec{3IA} + 2\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{3x_A + 2x_B + x_C}{6} = -\frac{1}{6} \\ y_I = \frac{3y_A + 2y_B + y_C}{6} = \frac{1}{3} \\ z_I = \frac{3z_A + 2z_B + z_C}{6} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

Gọi I là điểm thỏa mãn

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2 &= 3(\vec{IA} - \vec{IM})^2 + 2(\vec{IB} - \vec{IM})^2 + (\vec{IC} - \vec{IM})^2 \\ &= 3IA^2 + 2IB^2 + IC^2 + 6IM^2 + 2\vec{MI}(3\vec{IA} + 2\vec{IB} + \vec{IC}) \\ &= 3IA^2 + 2IB^2 + IC^2 + 6IM^2 \end{aligned}$$

Do đó $3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi IM nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (P)
 $\Rightarrow M\left(-\frac{11}{18}; -\frac{1}{9}; \frac{5}{9}\right) \Rightarrow \min(3MA^2 + 2MB^2 + MC^2) = \frac{61}{6}$

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -2; 4), B(-3; 3; -1), C(-1; -1; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 8 = 0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P) , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2MA^2 + MB^2 - MC^2$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\min T = 102$

Gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{2IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{2x_A + x_B - x_C}{2} = 1 \\ y_I = \frac{2y_A + y_B - y_C}{2} = 0 \\ z_I = \frac{2z_A + z_B - z_C}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0; 4)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} T &= 2MA^2 + MB^2 - MC^2 = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{2IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} \right) + (2IA^2 + IB^2 - IC^2) = 2MI^2 + (2IA^2 + IB^2 - IC^2) \end{aligned}$$

T nhỏ nhất thì $2MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ ngắn nhất M là hình chiếu của điểm $I/(P)$. Khi đó

$$MI = d(I, (P)) = 6; 2IA^2 + IB^2 - IC^2 = 30 \Rightarrow \min T = 102$$

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 4; 5), B(3; 4; 0), C(2; -1; 0)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x - 3y - 2z - 12 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ thuộc (α) sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $S = a + b + c = 3$.

Gọi điểm $I(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Mà } \begin{cases} \vec{IA} = (1-x; 4-y; 5-z) \\ \vec{IB} = (3-x; 4-y; -z) \\ \vec{IC} = (2-x; -1-y; -z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{IA} = (1-x; 4-y; 5-z) \\ \vec{IB} = (3-x; 4-y; -z) \\ 3\vec{IC} = (6-3x; -3-3y; -3z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{IA} + \vec{IB} + 3\vec{IC} = (10-5x; 5-5y; 5-5z)$$

$$\vec{IA} + \vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow I(2; 1; 1).$$

Do đó:

$$\text{Mặt khác: } MA^2 + MB^2 + 3MC^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + 3(\vec{MI} + \vec{IC})^2$$

$$= 5MI^2 + 2\vec{MI} \cdot \left(\vec{IA} + \vec{IB} + 3\vec{IC} \right) + IA^2 + IB^2 + 3IC^2$$

Vì I, A, B, C cố định nên $IA^2 + IB^2 + 3IC^2$ không đổi

Do đó: $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng (α) .

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-2}.$$

Gọi $\{M\} = d \cap (\alpha)$. Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-2} \\ 3x-3y-2z-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+6=3y-3 \\ -2x+4=3z-3 \\ 3x-3y-2z-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right).$$

$$\text{Vậy } a=\frac{7}{2}, b=-\frac{1}{2}, c=0 \Rightarrow S=a+b+c=3.$$

Câu 35. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 2), B(-2; 2; 0)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$. Xét các điểm M, N di động trên (P) sao cho $MN = 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2AM^2 + 3BN^2$.

Trả lời:

Lời giải

$$\text{Đáp án: } \min(2AM^2 + 3BN^2) = \frac{143}{3}$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2AM^2 + 3BN^2$ bằng 49,8

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng (P)

$\Rightarrow AH = BK = 3, H(1; -1; 0), K(0; 1; 2), HK = 3$. Đặt $HM = t$ ta có:

$$HM + MN + NK \geq HK = 3 \Rightarrow NB \geq 2 - t$$

$$2AM^2 + 3BN^2 = 2AH^2 + 2HM^2 + 3BK^2 + 3KN^2 \geq 45 + 2t^2 + (2 - t)^2 = \left(\sqrt{3}t - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{143}{3} \geq \frac{143}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $M, N \in$ đoạn thẳng HK .

Vậy Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2AM^2 + 3BN^2$ bằng $\frac{143}{3}$

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a; b; c)$ với a, b, c là các số thực dương thỏa

mãn $5(a^2 + b^2 + c^2) = 9(ab + 2bc + ca)$ và $Q = \frac{a}{b^2 + c^2} - \frac{1}{(a + b + c)^3}$ có giá trị lớn nhất. Gọi M, N, P lần

lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox, Oy, Oz . Viết phương trình mặt phẳng (MNP) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: Phương trình mặt phẳng $(MNP) 3x + 12y + 12z - 1 = 0$.

Đặt $t = b + c$ ($t > 0$); $b^2 + c^2 \geq \frac{t^2}{2}$; $bc \leq \frac{t^2}{4}$.

$$5(a^2 + b^2 + c^2) = 9(ab + 2bc + ca) \Leftrightarrow 5a^2 + 5(b + c)^2 - 9a(b + c) = 28bc \Rightarrow 5a^2 + 5t^2 - 9at \leq 7t^2$$

$$\Leftrightarrow (5a + t)(a - 2t) \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 2t.$$

Vậy $Q \leq \frac{4}{t} - \frac{1}{27t^3} = f(t)$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = -\frac{4}{t^2} + \frac{1}{9t^4} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{6}$ (vì $t > 0$).

Ta có bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{6}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$-\infty$	16	0

Vậy $Q_{\max} = 16 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}; b = c = \frac{1}{12}$.

Suy ra tọa độ điểm $A\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}\right)$; tọa độ các điểm $M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$; $N\left(0; \frac{1}{12}; 0\right)$; $P\left(0; 0; \frac{1}{12}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) $\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{12}} + \frac{z}{\frac{1}{12}} = 1 \Leftrightarrow 3x + 12y + 12z - 1 = 0$.

DẠNG 2

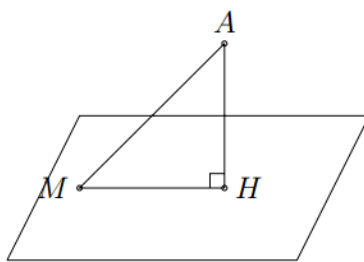
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN KHOẢNG CÁCH

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ cố định và điểm M di động trên mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$. Tìm tọa độ điểm M để AM có giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



- + Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P) .
- + Khi đó, tam giác AHM vuông tại H do đó $AM \geq AH$.
- + Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$.
- + Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P) .

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M ($M \equiv H$)

- + Lập phương trình tham số đường thẳng AH với $\begin{cases} \text{Qua } A \\ \vec{u}_{AH} = \vec{n}_P = (A; B; C) \end{cases}$.
- + Ta có $M \equiv H = AH \cap (P) \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bunhiacôpxki

Với $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có:

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

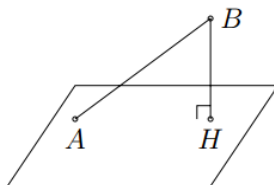
Dấu "=" xảy ra

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm A, B cố định. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



+ Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P) .

+ Khi đó $d(B, (P)) = BH \leq BA$

+ Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB

Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) với $\begin{cases} \text{Qua } A \\ n_p \perp AB \end{cases}$.

Cách 2: Phương pháp đại số

+ Gọi $n_p = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

+ Khi đó phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A là: $a(x - x_A) + (y - y_A) + (z - z_A) = 0$

+ Khi đó $n_p \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).

+ Ta có: $d(B, (P)) = f(t)$, với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$.

+ Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

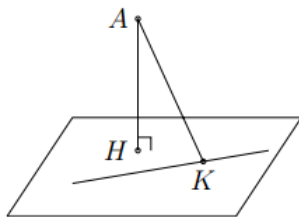
Chú ý: Để tìm vector pháp tuyến n_p của mặt phẳng (P) đơn giản hơn thì nên gọi $n_p = (1; b; c)$.

Bài toán 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm A và đường thẳng Δ cố định. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



+ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ .

+ Khi đó $d(A, (P)) = AH \leq AK$

+ Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK .

Bước 2:

+ Tìm tọa độ điểm K .

+ Lập phương trình mặt phẳng (P) với $\begin{cases} \text{Qua } K \\ n_p = AK \end{cases}$.

Cách 2: Phương pháp đại số

+ Gọi $n_p = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

+ Khi đó $n_p \cdot u_\Delta = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).

+ Ta có: $d(A, (P)) = f(t)$, với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$.

+ Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Chú ý: Để tìm vector pháp tuyến n_p của mặt phẳng (P) đơn giản hơn thì nên gọi $n_p = (1; b; c)$.

Bài toán 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B . Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.

2. $|MA - MB|$ lớn nhất.

Phương pháp giải

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.

Ta xét hai trường hợp sau:

- **TH 1:** Nếu A và B nằm về hai phía so với (P) .

Khi đó $AM + BM \geq AB$

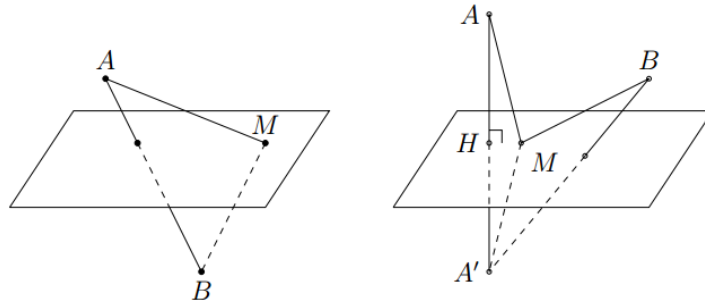
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P) .

- **TH 2:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P) .

Gọi A' đối xứng với A qua (P) .

Khi đó $AM + BM = A'M + BM \geq A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P) .



2. $|MA - MB|$ lớn nhất.

Ta xét hai trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P) .

+ Khi đó $|AM - BM| \leq AB$

+ Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P) .

- **TH 2:** Nếu A và B nằm khác phía so với (P) .

+ Gọi A' đối xứng với A qua (P) ,

+ Khi đó $|AM - BM| = |A'M - BM| \leq A'B$

+ Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P) .

Bài toán 5. Trong không gian $Oxyz$, cho các số thực dương α, β và ba điểm A, B, C . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua C và có $T = \alpha d(A, (P)) + \beta d(B, (P))$ nhỏ nhất.

Phương pháp giải

1. Xét A, B nằm về cùng phía so với (P) .

- Nếu $AB \parallel (P)$ thì $P = (\alpha + \beta)d(A, (P)) \leq (\alpha + \beta)AC$

- Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I . Gọi D là điểm thỏa mãn $\frac{\vec{IB}}{\beta} = \frac{\vec{ID}}{\alpha}$ và E là trung điểm BD . Khi

đó: $P = \alpha d(A, (P)) + \beta \cdot \frac{IB}{ID} \cdot d(D, (P)) = 2\alpha d(E, (P)) \leq 2(\alpha + \beta)EC$

2. Xét A, B nằm về hai phía so với (P) .

Gọi I là giao điểm của AB và (P) , B' là điểm đối xứng với B qua I .

Khi đó $P = \alpha d(A, (P)) + \beta d(B', (P))$

Đến đây ta chuyển về **bài toán 4** trên.

Bài toán 6. Trong không gian $Oxyz$, cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và điểm A . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm $A_i (i = \overline{1, n})$ lớn nhất.

Phương pháp giải

- Xét n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ nằm cùng phía so với (P) . Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho.

Khi đó: $\sum_{i=1}^n d(A_i, (P)) = nd(G, (P)) \leq nGA$

- Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác ($m + k = n$). Khi đó, gọi G_1 là trọng tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của k điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A .

Khi đó $P = md(G_3, (P)) + kd(G_2, (P))$

Đến đây ta chuyển về **bài toán 5** trên.

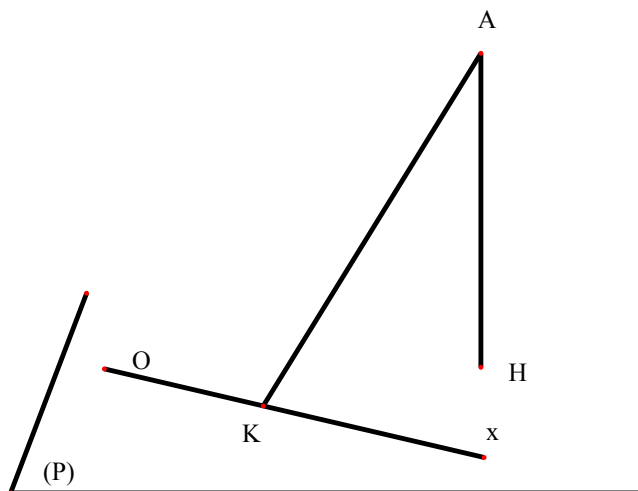
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Phương trình của (P) là

- A. $2y + z = 0$. B. $2y - z = 0$. C. $y + z = 0$. D. $y - z = 0$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi K là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; -2)$ lên trục Ox .

Ta có $K(1;0;0)$, $\overrightarrow{AK} = (0; -2; 2)$.

Gọi H là điểm chiếu của A lên mặt phẳng (P) .

Ta có $d(A, (P)) = AH \leq AK = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $\max d(A, (P)) = 2\sqrt{2}$, đạt được khi $H \equiv K(1;0;0)$.

Khi đó mặt phẳng (P) qua $O(0;0;0)$ có một vector pháp tuyến là $\overrightarrow{AK} = (0; -2; 2)$.

Nên phương trình mặt phẳng (P) là $0 \cdot (x - 1) - 2(y - 0) + 2(z - 0) = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$.

Vậy $(P): y - z = 0$.

Câu 38. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;7;2)$ và cách $M(-2;4;-1)$ một khoảng lớn nhất có phương trình là

A. $(P): 3x + 3y + 3z - 10 = 0$

B. $(P): x + y + z - 1 = 0$

C. $(P): x + y + z - 10 = 0$

D. $(P): x + y + z + 10 = 0$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $d(M, (P)) \leq MA$

Nên $d(M, (P))_{\max} = MA$ khi A là hình chiếu của M trên mặt phẳng (P) .

Suy ra $AM \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-3; -3; -3)$ là vector pháp tuyến của (P) .

(P) đi qua $A(1;7;2)$ và nhận $\overrightarrow{AM} = (-3; -3; -3)$ là vector pháp tuyến nên có phương trình $-3(x - 1) - 3(y - 7) - 3(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 10 = 0$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2; -1; -2)$ và đường thẳng (d) có phương trình

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x - y - 6 = 0$

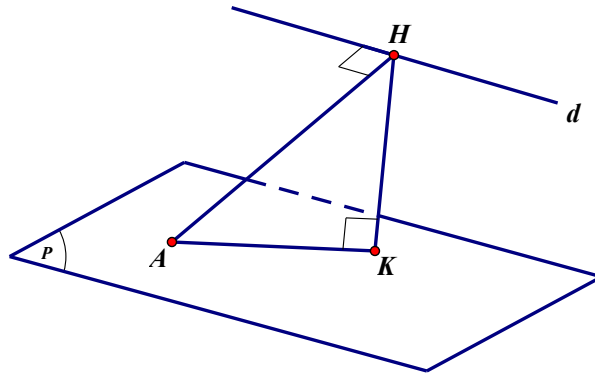
B. $x + 3y + 2z + 10 = 0$

C. $x - 2y - 3z - 1 = 0$

D. $3x + z + 2 = 0$

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d . Ta suy ra $H(1;1;1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và (P) song song với đường thẳng d . Gọi K là hình chiếu của H lên mặt phẳng (P) . Do $d \parallel (P)$ nên ta có $d(d, (P)) = d(H, (P)) = HK$.

Ta luôn có bất đẳng thức $HK \leq HA$. Như vậy khoảng cách từ (d) đến (P) lớn nhất bằng AH . Và khi đó (P) nhận $\vec{AH} = (-1; 2; 3)$ làm vector pháp tuyến.

Do (P) đi qua $A(2; -1; -2)$ nên ta có phương trình của (P) là: $x - 2y - 3z - 10 = 0$.

Do đó (P) vuông góc với mặt phẳng có phương trình: $3x + z + 2 = 0$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1; -7; -8)$, $B(2; -5; -9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7; -1; -2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; 4)$, khi đó giá trị của tổng $a + b$ là

- A. -1. B. 3. C. 6. D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -7 + 2t \\ z = -8 - t \end{cases}$$

Phương trình tham số của đường thẳng AB là

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên (P) và đường thẳng AB .

Ta tìm được điểm $K(3; -3; -10)$. Ta luôn có bất đẳng thức $d(M, (P)) = MH \leq MK$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv K$. Khi đó $\vec{MH} = (-4; -2; -8) = -2(2; 1; 4)$.

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 1; 4)$. Vậy ta có $a + b = 3$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A. $x + y - z - 2 = 0$

B. $x + y - z = 0$

C. $x + y - z + 1 = 0$

D. $-x + 2y + z + 5 = 0$

Lời giải

Chọn B

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (α) và d . Khi đó ta có $AH \leq AK$.

Vì $H \in d$ nên $H(2-t; -1+2t; 1+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-1-t; 2t; 1+t)$.

Do $AH \perp d$ nên ta có $-(-1-t) + 2 \cdot 2t + 1 + t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$. Khi đó $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi và chỉ khi $AH = AK$. Do đó (α) có vector pháp tuyến là $n = (1; 1; -1)$. Vậy $(\alpha): 1(x-2) + 1(y+1) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$.

Vẫn là đánh giá bất đẳng thức $AH \leq AK$ nói trên, nhưng bài toán sau đây lại phát biểu hơi khác một chút.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng cách lớn nhất. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) .

A. $n = (1; 0; 2)$

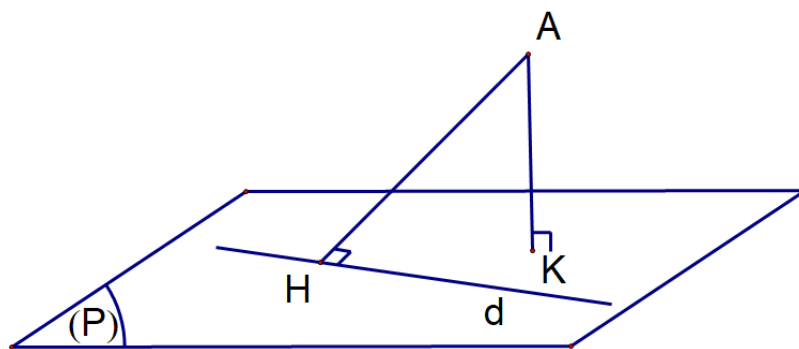
B. $n = (1; 0; -2)$

C. $n = (1; 1; 1)$

D. $n = (1; 1; -1)$

Lời giải

Chọn C



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d , gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên (P) .

Do đó khoảng cách từ A đến (P) là: $d(A; (P)) = AK$.

Ta có $d: \begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}$. Vì $H \in d$ nên $H(-2t-1; t; t+1)$.

$\overrightarrow{AH} = (-2t-2; t-2; t-2)$, VTCP của đường thẳng d là $\vec{u}_d = (-2; 1; 1)$.

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow -2(-2t-2) + t-2 + t-2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Do đó $H(-1; 0; 1)$ và $\overrightarrow{AH}(-2; -2; -2) \Rightarrow AH = 2\sqrt{3}$ (không đổi).

Vì $AK \leq AH$ (đường vuông góc luôn ngắn hơn đường xiên) nên AK lớn nhất khi $AK = AH$ hay $K \equiv H$.

Ta có $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AH} = (-2; -2; -2) = -2(1; 1; 1)$. Vậy, một vec tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x + my + (2m+1)z - m - 2 = 0$, m là tham số. Gọi $H(a; b; c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P) . Tính $a+b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất?

- A. $a+b = -\frac{1}{2}$. B. $a+b = 2$. C. $a+b = 0$. D. $a+b = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$x + my + (2m+1)z - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m(y + 2z - 1) + x + z - 2 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có nghiệm với } \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (P) \text{ luôn đi qua đường thẳng } d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

$$K \in d \Rightarrow K(2-t; 1-2t; t) \quad \overrightarrow{AK}(-t; -2t; t-3)$$

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}(-1; -2; 1)$

$$\overrightarrow{AK} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t + 4t + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow K\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Ta có } AH \leq AK \Rightarrow AH_{\max} = AK \Leftrightarrow H \equiv K$$

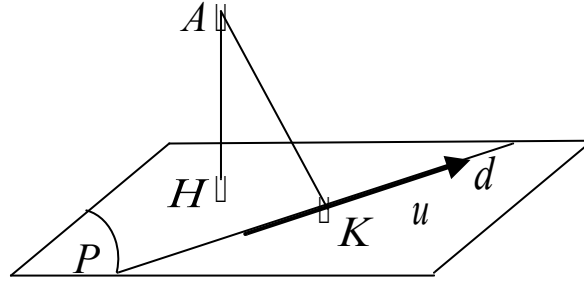
$$\text{Vậy } a+b = \frac{3}{2}$$

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Biết rằng $(P): ax + by + cz - 3 = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) là mặt phẳng chứa d và khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Khi đó tổng $T = a + b + c$ bằng

- A. 3 . B. -3 . C. -2 . D. -5 .

Lời giải

Chọn C



Đường thẳng d đi qua $M(1; 0; 2)$, có 1 VTCP $u = (2; 1; 2)$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên (P) và trên d thì $AH \leq AK$ (cố định).

Do đó, khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi $H \equiv K$ hay $(P) \perp AK$.

$K(2t+1; t; 2t+2) \in d$ là hình chiếu của A trên d khi $\vec{AK} \perp u$, với $\vec{AK} = (2t-1; t-5; 2t-1)$.

$$\vec{AK} \cdot u = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1) + (t-5) + 2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

(P) qua $M(1; 0; 2)$, có một VTPT $\vec{AK} = (1; -4; 1)$ nên $(P): x - 4y + z - 3 = 0$.

Suy ra $T = a + b + c = 1 + (-4) + 1 = -2$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng cách lớn nhất. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

A. $n = (1; 0; 2)$

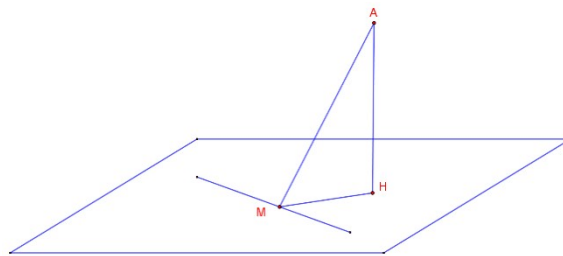
B. $n = (1; 0; -2)$

C. $n = (1; 1; 1)$

D. $n = (1; 1; -1)$

Lời giải

Chọn C



Gọi H là hình chiếu của A xuống mặt phẳng (P) . Từ H kẻ $HM \perp d$. Dễ thấy $AM \perp d$.

Ta có $AH \leq AM$. Suy ra khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi $M \equiv H$, hay $AM \perp (P)$.

Phương trình tham số của $d: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$, véc-tơ chỉ phương là $u = (-2; 1; 1)$.

$$M \in d \Rightarrow M(-1-2t; t; 1+t) \Rightarrow \vec{MA} = (2-2t; 2-t; 2-t)$$

$$\overrightarrow{MA} \perp u \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot u = 0 \Leftrightarrow (-2) \cdot (2+2t) + 1 \cdot (2-t) + 1 \cdot (2-t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Suy ra $M(-1; 0; 1) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (2; 2; 2)$.

Do $n = (1; 1; 1)$ cùng hướng với $\overrightarrow{MA}$ nên $n = (1; 1; 1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3), B(5; -4; -1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d_{(B, (P))} = 2d_{(A, (P))}$, (P) cắt AB tại $I(a; b; c)$ nằm giữa AB . Tính $a + b + c$

A. 8

B. 6

C. 12

D. 4

Lời giải

Chọn D

Do mặt phẳng (P) qua Ox nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $by + cz = 0$ ($b^2 + c^2 > 0$)

$$d_{(B, (P))} = 2d_{(A, (P))} \Leftrightarrow \frac{|-4b - c|}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 2 \cdot \frac{|2b + 3c|}{\sqrt{b^2 + c^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} -4b - c = 4b + 6c \\ -4b - c = -4b - 6c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8b + 7c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $8b + 7c = 0$ chọn $b = 7; c = -8$ khi đó $(P): 7y - 8z = 0$

Xét $f(y, z) = 7y - 8z$

Thay tọa độ A, B vào ta được $(7 \cdot 2 - 8 \cdot 3)(7 \cdot (-4) - 8 \cdot (-1)) > 0$ suy ra A, B nằm cùng phía so với (P) (loại)

Trường hợp 2: $c = 0$ suy ra phương trình $(P): y = 0$

Thay tọa độ A, B vào ta được $2 \cdot (-4) < 0$ suy ra A, B nằm khác phía so với (P) . Do đó đường thẳng

AB cắt (P) tại I nằm giữa AB

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 6t \\ z = 3 - 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Phương trình tham số của đường thẳng AB :

Tọa độ điểm I là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 6t \\ z = 3 - 4t \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ x = \frac{7}{3} \\ y = 0 \\ z = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{3}; 0; \frac{5}{3}\right)$$

Vậy $a+b+c = \frac{7}{3} + 0 + \frac{5}{3} = 4$

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;3;-1)$, $B(2;3;2)$, $C(-1;0;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) để $S = |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

- A. $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$ B. $M(0;3;0)$ C. $M\left(1;0;\frac{7}{3}\right)$ D. $M\left(-\frac{1}{2};0;2\right)$

Lời giải

Chọn A

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , suy ra $G(1;2;1)$.

Gọi $H(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{HA} - 4\overrightarrow{HC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-x=4(-1-x) \\ 3-y=4(0-y) \\ -1-z=4(2-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow H(-2;-1;3)$$

Nhận thấy G và H nằm về hai phía đối với mặt phẳng (Oxz) ; $HG = \sqrt{22}$.

Ta có:
$$S = |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$$

$$= |\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA} - 4\overrightarrow{MH} - 4\overrightarrow{HC}| + |\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}| = |-3\overrightarrow{MH}| + |3\overrightarrow{MG}|$$

$$= 3(MH + MG) \geq 3GH = 3\sqrt{22}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi H, M, G thẳng hàng theo thứ tự.

Lại do $M \in (Oxz)$ nên S đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của đường thẳng GH với mặt phẳng (Oxz) .

Đường thẳng GH có phương trình $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+3t \\ z=1-2t \end{cases}$; mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y=0$.

$$M \in GH \Rightarrow M(1+3t; 2+3t; 1-2t)$$

$$M \in (Oxz) \Rightarrow 2+3t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{2}{3}$$

Vậy $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C (A, B, C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

- A. $\frac{81}{2}$. B. $\frac{243}{2}$. C. $\frac{81}{6}$. D. 243 .

Lời giải

Chọn A

Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$.

Mặt phẳng (P) có phương trình (theo đoạn chắn): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ nên $\frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Ta có $1 = \frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{9}{a \cdot b \cdot c}} \Rightarrow a \cdot b \cdot c \geq 243$.

$V_{OABC} = \frac{1}{6} a \cdot b \cdot c \geq \frac{243}{6} = \frac{81}{2}$. Vậy thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{81}{2}$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m;0;0), N(0;n;0), P(0;0;p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2 + n^2 + p^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) .

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{1}{27}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng (MNP) có phương trình là $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$.

Theo bất đẳng thức Bunhia-Copsky ta có:

$$(m^2 + n^2 + p^2) \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \geq \frac{9}{m^2 + n^2 + p^2} = 3$$

$$d(O; (P)) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Khi đó: . Dấu bằng xảy ra khi $m = n = p = 1$.

Vậy khoảng cách lớn nhất từ O đến (MNP) bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

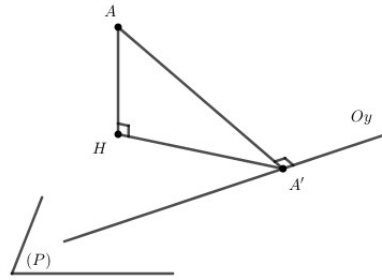
PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Viết phương trình của (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: phương trình của (P) $2x - z = 0$



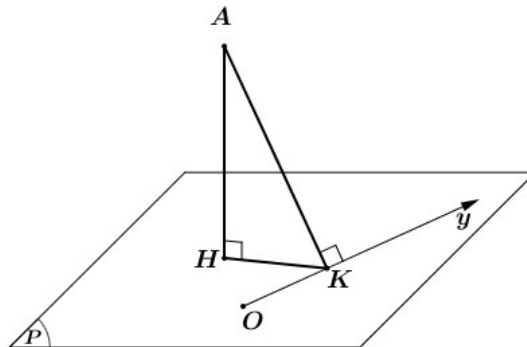
Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P) , A' là hình chiếu vuông góc của điểm A lên trục Oy suy ra $A'(0;1;0)$. Khi đó khoảng cách từ A đến (P) là đoạn thẳng $AH \leq AA'$. Độ dài đoạn thẳng AH dài nhất khi H và A' trùng nhau. Khi đó mặt phẳng (P) nhận $\vec{A'A} = (2;0;-1)$ làm véc tơ pháp tuyến. Suy ra phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A'(0;1;0)$ có VTPT: $\vec{A'A} = (2;0;-1)$ là: $2(x - 0) + 0(y - 1) + (-1)(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x - z = 0$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Viết phương trình của (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: phương trình của (P) $2x + z = 0$



Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên (P) và trục Oy .

Ta có $d(A, (P)) = AH \leq AK$. Do đó khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi $H \equiv K(0;1;0)$.

Khi đó (P) đi qua $K(0;1;0)$ và có một vector pháp tuyến là $\vec{AK} = (-2;0;-1) = -(2;0;1)$ nên có phương trình là $2x + z = 0$.

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Lập phương trình của (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $y + z = 0$

Gọi hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 2)$ lên trục Ox là $M(1; 0; 0)$.

Khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất nên mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{MA} = (0; 2; 2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 0; 0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{MA} = (0; 2; 2)$ nên $0.(x - 1) + 2(y - 0) + 2(z - 0) = 0 \Leftrightarrow y + z = 0$.

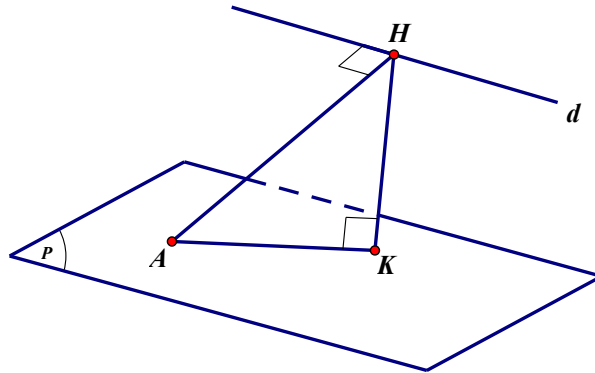
Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2; -1; -2)$ và đường thẳng (d) có phương trình

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $x - 2y - 3z - 10 = 0$



Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d . Ta suy ra $H(1; 1; 1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và (P) song song với đường thẳng d . Gọi K là hình chiếu của H lên mặt phẳng (P) . Do $d \parallel (P)$ nên ta có $d(d, (P)) = d(H, (P)) = HK$.

Ta luôn có bất đẳng thức $HK \leq HA$. Như vậy khoảng cách từ (d) đến (P) lớn nhất bằng AH . Và khi đó (P) nhận $\vec{AH} = (-1; 2; 3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do (P) đi qua $A(2; -1; -2)$ nên ta có phương trình của (P) là: $x - 2y - 3z - 10 = 0$.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) .

A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{3}{\sqrt{6}}$. C. $\frac{11\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Gọi $n=(a;b;c)$ là một vector pháp tuyến của (P) , với $a^2+b^2+c^2 \neq 0$.

Điểm $M(1;0;2) \in d \Rightarrow M \in (P)$.

Phương trình của $(P): ax+by+cz-(a+2c)=0$.

Một vector chỉ phương của d là $u=(2;1;2) \Rightarrow n \perp u \Leftrightarrow n.u=0 \Leftrightarrow 2a+b+2c=0$.

$$\Rightarrow b=-(2a+2c) \Rightarrow d(A,(P))=\frac{|a+5b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{9|a+c|}{\sqrt{a^2+c^2+4(a+c)^2}}.$$

Ta có $(a+c)^2 \leq 2(a^2+c^2) \Leftrightarrow \frac{(a+c)^2}{2} \leq a^2+c^2$ với $\forall a,c \in \mathbb{R}$.

Suy ra: $a^2+c^2+4(a+c)^2 \geq \frac{(a+c)^2}{2}+4(a+c)^2=\frac{9}{2}(a+c)^2$.

$$d(A,(P))=\frac{9|a+c|}{\sqrt{a^2+c^2+4(a+c)^2}} \leq \frac{9|a+c|}{\sqrt{\frac{9}{2}(a+c)^2}}=\frac{9|a+c|\sqrt{2}}{3|a+c|}=3\sqrt{2}.$$

Do đó

$$\Rightarrow \max d(A,(P))=3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=-4a \end{cases}. \text{ Chọn } a=c=1 \Rightarrow b=-4.$$

$$(P): x-4y+z-3=0 \Rightarrow d(O,(P))=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Phương trình

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P):(m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Tính m .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m=5$

Ta có
$$d(A,(P))=\frac{|m-1+1+2m-1|}{\sqrt{(m-1)^2+1+m^2}}=\sqrt{\frac{(3m-1)^2}{2(m^2-m+1)}}$$

Xét $f(m) = \frac{(3m-1)^2}{2(m^2-m+1)} \Rightarrow f'(m) = \frac{(5-m)(3m-1)}{2(m^2-m+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ m = 5 \end{cases}$.

m	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		5	$+\infty$	
$f'(m)$		-	0	+	0	-
$f(m)$	$\frac{9}{2}$		0		$\frac{14}{3}$	$\frac{9}{2}$

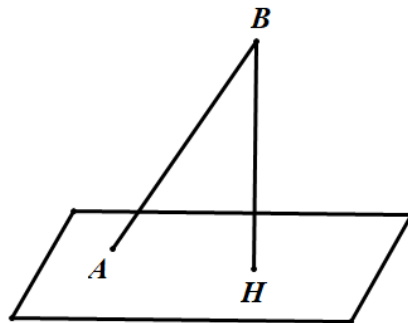
Vậy $\max d(A; (P)) = \sqrt{\frac{14}{3}}$ khi $m = 5$.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1), B(3; 0; 3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(P): x - y + 2z + 3 = 0$



Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 4) \Rightarrow AB = 2\sqrt{6}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (P) .

Ta có $d(B, (P)) = BH \leq BA = 2\sqrt{6} \Rightarrow \max d(B, (P)) = 2\sqrt{6}$, đạt được khi $H \equiv A$.

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 4)$ là vectơ pháp tuyến.

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là $2(x-1) - 2(y-2) + 4(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z + 3 = 0$.

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mp $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d qua A và vuông góc với mp $(Q): 3x + 4y - 4z + 5 = 0$, cắt mp (P) tại B . Điểm M nằm trong mp (P) sao cho M luôn nhìn AB dưới góc vuông. Tính độ dài lớn nhất của MB .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $MB = \sqrt{5}$

Đường thẳng d qua A và vuông góc với mp $(Q): 3x + 4y - 4z + 5 = 0 \Rightarrow d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$

B là giao điểm của d và mặt phẳng $(P) \Rightarrow B(-2; -2; 1)$.

$\angle AMB = 90^\circ \Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (S) có đường kính AB .

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn (C) giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) .

$\Rightarrow BM$ lớn nhất bằng đường kính của đường tròn (C) .

Ta có (S) có tâm $I\left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{41}}{2}$.

$d(I, (P)) = 3$.

Bán kính của đường tròn (C) là: $r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{\frac{41}{4} - 9} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy BM lớn nhất bằng $2r = \sqrt{5}$.

Câu 58. Cho $A(4; 5; 6); B(1; 1; 2)$, M là một điểm di động trên mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 1 = 0$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $|MA - MB|$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $|MA - MB|$ nhận giá trị lớn nhất là: $\sqrt{41}$

Ta có $|MA - MB| \leq AB$ với mọi điểm $M \in (P)$

Vì $(2 \cdot 4 + 5 + 2 \cdot 6 + 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot 2 + 1) = 208 > 0$ nên hai điểm A, B nằm cùng phía với (P)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M = AB \cap (P)$

Khi đó, $|MA - MB|$ nhận giá trị lớn nhất là: $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{41}$.

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(3; 2; 1)$, $C(5; 3; 7)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $MA = MB$ và $MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + b + c$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $P = 5$

Gọi I là trung điểm của AB , suy ra $I(1; 1; 1)$, $\overline{AB} = (4; 2; 0)$.

Điểm M thỏa mãn $MA = MB$ khi $M \in (\alpha)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của AB : $(\alpha): 2x + y - 3 = 0$.

Vì $(2.3 + 1.2 - 3) \cdot (2.5 + 1.3 - 3) = 50 > 0$ nên B, C nằm về một phía so với (α) , suy ra A, C nằm về hai phía so với (α) .

Khi đó $MB + MC = MA + MC \geq AC$.

$MB + MC$ nhỏ nhất bằng AC khi $M = AC \cap (\alpha)$.

Phương trình đường thẳng AC : $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;1;1)$, $B(5;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$, $(Q): -x + y + z - 1 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm nằm trên hai mặt phẳng (P) và (Q) sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Từ giả thiết ta có M thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $n_P = (1; 2; 1)$. Mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến là $n_Q = (-1; 1; 1)$. Khi đó đường thẳng d đi qua $N(1; 1; 1)$ và có một vector chỉ phương là

$u_d = [n_P, n_Q] = (1; -2; 3)$ nên có phương trình tham số là $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ suy ra $M(1+t; 1-2t; 1+3t)$.

$$MA + MB = \sqrt{(t+4)^2 + 4t^2 + 9t^2} + \sqrt{(t-4)^2 + 4t^2 + 9t^2} = \sqrt{14t^2 + 8t + 16} + \sqrt{14t^2 - 8t + 16}$$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(t) = \sqrt{14t^2 + 8t + 16} + \sqrt{14t^2 - 8t + 16} = \sqrt{14} \left[\sqrt{t^2 + \frac{4}{7}t + \frac{8}{7}} + \sqrt{t^2 - \frac{4}{7}t + \frac{8}{7}} \right]$$

$$= \sqrt{14} \left[\sqrt{\left(t + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2} + \sqrt{\left(t - \frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2} \right]$$

Đặt $\vec{u} = \left(t + \frac{2}{7}; \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$, $\vec{v} = \left(\frac{2}{7} - t; \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$.

Khi đó $f(t) = \sqrt{14} [|\vec{u}| + |\vec{v}|] \geq \sqrt{14} |\vec{u} + \vec{v}|$. Suy ra $f(t) \geq \sqrt{14} \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{8\sqrt{7}}{49}$.

$$\frac{t + \frac{2}{7}}{\frac{2}{7} - t} = \frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\frac{2}{\sqrt{7}}} > 0 \Rightarrow t = 0$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vectơ u và v cùng hướng hay

Do đó $M(1;1;1)$. Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

$$d: \begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=1 \end{cases}$$

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): y - 1 = 0$, đường thẳng

$A(-1; -3; 11)$, $B\left(\frac{1}{2}; 0; 8\right)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d(M, d) = 2$ và $NA = 2NB$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $MN_{\min} = 1$

Gọi $I = d \cap (P) \Rightarrow I(1; 2 - t; 1)$

$I \in (P) \Rightarrow 2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow I(1; 1; 1)$

Ta có $d \perp (P) \Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $I(1; 1; 1), R_1 = 2$.

$N(x; y; z) \Rightarrow NA(-1 - x; -3 - y; 11 - z); NB\left(\frac{1}{2} - x; -y; 8 - z\right)$

$$NA = 2NB \Leftrightarrow (1+x)^2 + (3+y)^2 + (11-z)^2 = 4\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)^2 + y^2 + (8-z)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 6y - 42z + 126 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14z + 42 = 0$$

Vậy $N \in S(J(1; 1; 7); R_2 = 3)$ và $J \in (P): y = 1$

Nên N thuộc đường tròn tâm $J(1; 1; 7); R_2 = 3$

Ta có $IJ = 6 > R_1 + R_2 \Rightarrow MN_{\min} = IJ - R_1 - R_2 = 1$

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 0; 1)$, $B(3; 1; 5)$, $C(1; 2; 0)$, $D(4; 2; 1)$. Gọi

(α) là mặt phẳng đi qua D sao cho ba điểm A, B, C nằm cùng phía đối với (α) và tổng khoảng cách từ

các điểm A, B, C đến mặt phẳng (α) là lớn nhất. Giả sử phương trình (α) có dạng:

$2x + my + nz - p = 0$. Khi đó, tính giá trị của $T = m + n + p$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = m + n + p = 9$

Vì mặt phẳng (α) đi qua $D(4;2;1)$ nên phương trình (α) có dạng:

$$a.(x - 4) + b.(y - 2) + c.(z - 1) = 0$$

Đặt
$$S = d[A, (\alpha)] + d[B, (\alpha)] + d[C, (\alpha)] = \frac{|-2a - 2b| + |-a - b + 4c| + |-3a - c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Theo giả thiết, A, B, C nằm cùng phía đối với (α) nên không mất tính tổng quát, ta giả sử:

$$\begin{cases} -2a - 2b > 0 \\ -a - b + 4c > 0 \\ -3a - c > 0 \end{cases}$$

Khi đó,
$$S = \frac{-2a - 2b - a - b + 4c - 3a - c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{-6a - 3b + 3c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức $B.C.S$ cho hai bộ số $(-6; -3; 3)$ và $(a; b; c)$, ta được:

$$-6a - 3b + 3c \leq |-6a - 3b + 3c| \leq \sqrt{(6^2 + 3^2 + 3^2) \cdot (a^2 + b^2 + c^2)} \Rightarrow S \leq 3\sqrt{6}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} -6a - 3b + 3c \geq 0 \\ \frac{a}{-6} = \frac{b}{-3} = \frac{c}{3} \end{cases}$. Ta chọn $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$.

$$\Rightarrow (\alpha): -2x - y + z + 9 = 0 \text{ hay } (\alpha): 2x + y - z - 9 = 0 \Rightarrow m = 1, n = -1, p = 9$$

Vậy $T = m + n + p = 9$

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ gọi $(P): ax + by + cz - 3 = 0$ (a, b, c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) là phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0; -1; 2), N(-1; 1; 3)$ và không đi qua $H(0; 0; 2)$. Biết rằng khoảng cách từ $H(0; 0; 2)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị của $P = a - 2b + 3c + 12$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $P = a - 2b + 3c + 12 = 16$

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $M(0; -1; 2), N(-1; 1; 3)$ nên ta có
$$\begin{cases} -b + 2c - 3 = 0 \\ -a + b + 3c - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c - 3 \\ a = 5c - 6 \end{cases}$$
 (*)

Mặt khác
$$d(H; (P)) = \frac{|2c - 3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (**).$$

Thay (*) vào (**) ta được
$$d(H; (P)) = \frac{|2c - 3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2c - 3|}{\sqrt{30c^2 - 72c + 45}}$$

Xét hàm số $y = \frac{2c-3}{\sqrt{30c^2-72c+45}}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = \frac{18c-18}{30c^2-72c+45}; y' = 0 \Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \lim_{c \rightarrow +\infty} y = \frac{2}{\sqrt{30}}; \lim_{c \rightarrow -\infty} y = -\frac{2}{\sqrt{30}}$$

$$\Rightarrow \min_D y = y(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Xét hàm số $g(c) = \frac{|2c-3|}{\sqrt{30c^2-72c+45}}$

Từ đó suy ra $\max g(c) = f(1) = g(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ đạt tại $c = 1$.

Với $c = 1 \Rightarrow a = 1; b = -1$

Vậy $P = a - 2b + 3c + 12 = 16$

Câu 64. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. Tính $T = a + 2b + 3c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = 18$

Từ giả thiết ta có $a > 0, b > 0, c > 0$ và thể tích khối tứ diện $OABC$ là $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc$.

Ta có phương trình đoạn chắn mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Mà $M \in (P) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho ba số ta có: $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \Rightarrow abc \geq 27$.

Do đó $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc \geq \frac{9}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

Vậy $\min_{V_{OABC}} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow a = b = c = 3$. Khi đó $T = a + 2b + 3c = 18$.

Câu 65. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $d = \frac{36}{7}$.

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$.

Phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

$$M(1; 4; 9) \in (P) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = 1$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \right) (a + b + c) = \left(\left(\sqrt{\frac{1}{a}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4}{b}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{9}{c}} \right)^2 \right) \left((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \right) \geq (1 + 2 + 3)^2.$$

$$\Rightarrow a + b + c \geq 49.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} \end{cases} \xrightarrow{a+b+c=49} \begin{cases} a = 6 \\ b = 12 \\ c = 18 \end{cases}$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$(P): \frac{x}{6} + \frac{y}{12} + \frac{z}{18} = 1.$$

Nên

Vậy $d = \frac{36}{7}$.

Câu 66. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 2; 1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (A, B, C không trùng với gốc O) sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$

Gọi (P) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$ ($a, b, c > 0$)

Ta có $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Vì $M \in (P)$ nên ta có $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1$

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow abc \geq 54$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có

Thể tích khối chóp $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc \geq 9$

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{1}{c} \end{cases} \Leftrightarrow a=3, b=6; c=3$$

Dấu bằng xảy ra khi các số tham gia cô si bằng nhau nghĩa là

Vậy pt mặt phẳng $(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$

Câu 67. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, trong đó

a, b, c là các số thực thỏa mãn $\frac{2}{a} - \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $d_{\max}(O; (ABC)) = 3$

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Nhận thấy, điểm $M(2; -2; 1) \in (ABC)$; $\overrightarrow{OM} = (2; -2; 1)$, $OM = 3$.

Ta có: $d(O; (ABC)) = OH \leq OM \Rightarrow$ khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) có giá trị lớn

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(ABC)}} = k \cdot \overrightarrow{OM}, (k \neq 0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 2k \\ \frac{1}{b} = -2k \\ \frac{1}{c} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2k} \\ b = -\frac{1}{2k} \\ c = \frac{1}{k} \end{cases}$$

nhất khi $OM \perp (ABC)$

Mà $\frac{2}{a} - \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1$ nên $\frac{2}{\frac{1}{2k}} - \frac{2}{-\frac{1}{2k}} + \frac{1}{\frac{1}{k}} = 1 \Leftrightarrow 9k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{9}$. Do đó $a = \frac{9}{2}; b = -\frac{9}{2}; c = 9$.

Vậy $d_{\max}(O; (ABC)) = OM = 3$ khi $a = \frac{9}{2}; b = -\frac{9}{2}; c = 9$.

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 4; 9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm A , B , C (khác O) sao cho $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $d(O; (P)) = \frac{36}{7}$

Gọi mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;4;9)$ cắt các tia tại $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$

ta có $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ suy ra $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = 1$ và $OA + OB + OC = a + b + c$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = \frac{1^2}{a} + \frac{2^2}{b} + \frac{3^2}{c} \geq \frac{(1+2+3)^2}{a+b+c} \Rightarrow a+b+c \geq 36$$

$$\begin{cases} a=6 \\ b=12 \\ c=18 \end{cases} \Rightarrow (P): \frac{x}{6} + \frac{y}{12} + \frac{z}{18} = 1$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$d(O; (P)) = \frac{\left| \frac{0}{6} + \frac{0}{12} + \frac{0}{18} - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{18}\right)^2}} = \frac{36}{7}$$

Nên

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ với a, b, c là những số dương thay đổi thỏa mãn $a^2 + 4b^2 + 16c^2 = 49$. Tính tổng $S = a^2 + b^2 + c^2$ khi khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất.

Trả lời:

Lời giải

$$S = \frac{49}{4}$$

Đáp án:

Dựng $OH \perp (ABC); (H \in (ABC))$ vì $OABC$ là tứ diện vuông nên ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2^2}{4b^2} + \frac{4^2}{16c^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2^2}{4b^2} + \frac{4^2}{16c^2} \geq \frac{(1+2+4)^2}{a^2 + 4b^2 + 16c^2} = 1 \Rightarrow OH \leq 1$$

Vậy khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất là 1 khi:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{2}{4b^2} = \frac{4}{16c^2} = \frac{1+2+4}{a^2 + 4b^2 + 16c^2} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 7 \\ b^2 = \frac{7}{2} \\ c^2 = \frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow S = \frac{49}{4}$$

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ và hai điểm $A(3; 4; 1); B(7; -4; -3)$. Điểm $M(a; b; c) (a > 2)$ thuộc (P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = 0$

Ta có: $S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MH$ với H là hình chiếu vuông góc của M lên AB .

Do AB không đổi nên S_{ABM} nhỏ nhất khi MH nhỏ nhất.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4; -8; -4) \\ \overrightarrow{n_P} = (1; 1; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_P} = 0 \Rightarrow AB // (P)$$

MH nhỏ nhất khi M nằm trên giao tuyến của mặt phẳng (Q) và (P) ;

với (Q) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mp (P) .

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4; -8; -4) \\ \overrightarrow{n_P} = (1; 1; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = (3; 0; 3) \Rightarrow \text{phương trình mp } (Q) \text{ là } x + z - 4 = 0.$$

M nằm trên giao tuyến của mặt phẳng (Q) và (P) nên tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \Rightarrow M(t; 2 - 2t; 4 - t) \text{ với } t > 2.$$

Ta có $\overrightarrow{AM} = (t - 3; -2 - 2t; 3 - t); \overrightarrow{BM} = (t - 7; 6 - 2t; 7 - t)$.

Tam giác ABM vuông tại M nên $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t - 7) + (-2 - 2t)(6 - 2t) + (3 - t)(7 - t) = 0$

$$\Leftrightarrow (t - 3)(t - 7) + 2(t - 3)(t + 1) = 0 \Leftrightarrow (t - 3)(3t - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (n)} \\ t = \frac{5}{3} \text{ (l)} \end{cases}$$

+ $t = 3 \Rightarrow M(3; -4; 1) \Rightarrow a + b + c = 3 - 4 + 1 = 0$.

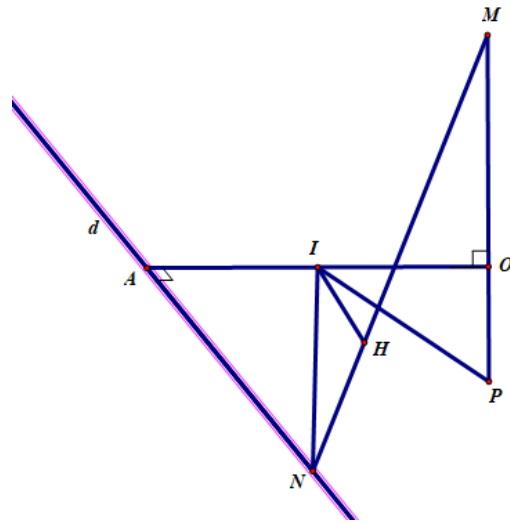
$$d: \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 3 + 4t \\ z = 0 \end{cases}$$

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d . Gọi A là hình chiếu vuông góc của O trên d . Điểm M di động trên tia Oz , điểm N di động trên đường thẳng d sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AN}$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng OA . Trong trường hợp diện tích tam giác IMN đạt giá trị nhỏ nhất, lập phương trình của mặt phẳng chứa điểm M và đường thẳng d .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $4x + 3y + 5\sqrt{2}z - 10 = 0$



Gọi $A(4 - 3t; 3 + 4t; 0)$ là hình chiếu vuông góc của O trên d

$$\Leftrightarrow OA \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow A(4; 3; 0)$$

Trên Oz lấy điểm P sao cho $OP = AN \Rightarrow MP = OM + OP = MN$

và $\triangle AIN = \triangle OIP \Rightarrow IN = IP$

Ta có $\triangle IMP = \triangle IMN$, kẻ $IH \perp MN \Rightarrow IH = IO \Rightarrow S_{\triangle IMN} = \frac{1}{2}IH \cdot MN \Rightarrow S_{\triangle IMN} \min \Leftrightarrow MN_{\min}$

$$MN^2 = MO^2 + OA^2 + AN^2 \geq 2 \left(\frac{MO + AN}{2} \right)^2 + 25 \Rightarrow MN \geq 5\sqrt{2}$$

Ta có

$$MN_{\min} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow OM = AN = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M \left(0; 0; \frac{5\sqrt{2}}{2} \right)$$

Vậy

Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (M, d) là $\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{u_d} \right] = \left(10\sqrt{2}; \frac{15}{\sqrt{2}}; 25 \right)$

$$n = (4; 3; 5\sqrt{2})$$

Chọn

lập phương trình củaa mặt phẳng (M, d) : $4x + 3y + 5\sqrt{2}z - 10 = 0$

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 4; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2y - z = 0$. Biết điểm B thuộc (P) , điểm C thuộc (Oxy) sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(P_{\triangle ABC})_{\min} = 4\sqrt{5}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(1; 4; 3)$ lên mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow H(1; 4; 0)$

Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oxy) , ta tìm được $A_1(1; 4; -3)$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của $A(1; 4; 3)$ lên mặt phẳng (P)

$$AK : \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}, \text{ Gọi } K(1; 4 + 2t; 3 - t) \in AK$$

Mặt khác, $K \in (P) \Rightarrow 5t + 5 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow K(1; 2; 4)$

Gọi A_2 là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P) thì K là trung điểm của AA_2 .

$$\begin{cases} x_{A_2} = 2x_K - x_A = 1 \\ y_{A_2} = 2y_K - y_A = 0 \\ z_{A_2} = 2z_K - z_A = 5 \end{cases} \Rightarrow A_2(1; 0; 5)$$

Ta có chu vi tam giác ABC là $P_{\Delta ABC} = AC + AB + BC = A_1C + A_2B + BC \geq A_1A_2$.

Dấu bằng xảy ra khi A_1, A_2, B, C thẳng hàng

Suy ra $(P_{\Delta ABC})_{\min} = A_1A_2 = 4\sqrt{5}$.

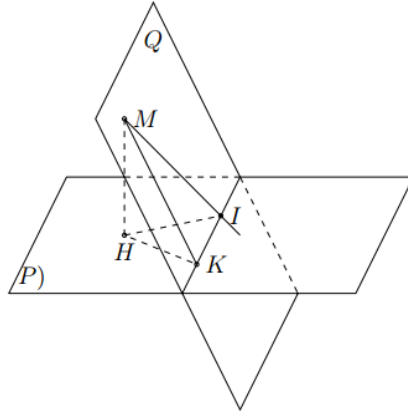
DẠNG 3

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN GÓC

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau. Lập phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học



Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) và lấy điểm $M \in d, M \neq I$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên (P) và giao tuyến Δ của (P) và (Q) .

Đặt ϕ là góc giữa (P) và (Q) , ta có $\phi = \angle MKH$, do đó $\tan \phi = \frac{HM}{HK} \geq \frac{HM}{HI}$

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (MHI) , nên (Q) đi qua M và nhận

$[[n_P, u_d], u_d]$ làm VTPT.

Cách 2: Phương pháp đại số

Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

• Gọi $n_Q = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một VTPT của mặt phẳng (Q) .

• Khi đó $n_Q \cdot u_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).

• Gọi ϕ là góc giữa (P) và (Q) , ta có: $\cos \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_P|}{|\vec{n}| |\vec{n}_P|} = f(t)$

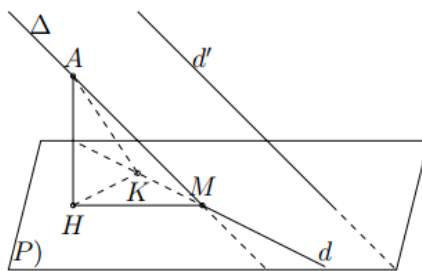
với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Chú ý: Để tìm vector pháp tuyến n_Q của mặt phẳng (Q) đơn giản hơn thì nên gọi $n_Q = (1; b; c)$.

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học



- Trên đường thẳng d , lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d' .

Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d' và (P) .

- Trên đường thẳng Δ , lấy điểm A . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d , ϕ là góc giữa Δ và (P) .

$$\text{Khi đó } \phi = \angle AMH \text{ và } \cos \phi = \frac{HM}{AM} \geq \frac{KM}{AM}$$

Suy ra (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK) . Do đó (P) đi qua M và nhận $(u_d \wedge u_{d'}) \wedge u_d$ làm VTPT.

Cách 2: Phương pháp đại số

Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Gọi $n_p = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một VTPT của mặt phẳng (P) .
- Khi đó $n_p \cdot u_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).

$$\sin \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}_{d'}|}{|\vec{n}| |\vec{u}_{d'}|} = f(t)$$

- Gọi ϕ là góc giữa (P) và d' , ta có

$$\text{với } t = \frac{b}{c}, c \neq 0. \text{ Khảo sát } f(t) \text{ ta tìm được max của } f(t)$$

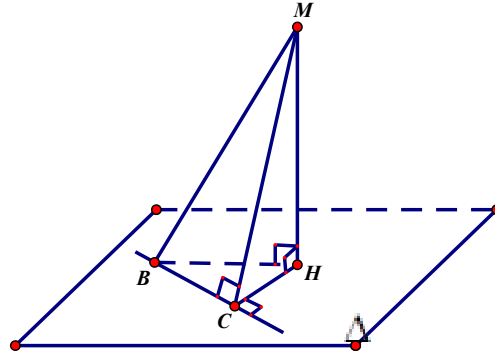
Chú ý: Để tìm vector pháp tuyến n_p của mặt phẳng (P) đơn giản hơn thì nên gọi $n_p = (1; b; c)$.

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{2-z}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng $(Q): 2x - y - 2z - 2 = 0$ một góc có số đo nhỏ nhất. Điểm $A(1; 2; 3)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng:

- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{7\sqrt{11}}{11}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



$$d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{2-z}{1} \text{ có VTCP } u = (1; -2; -1)$$

$$(Q): 2x - y - 2z - 2 = 0 \text{ có VTPT } n = (2; -1; -2)$$

Gọi α là góc tạo bởi d và (Q) , ta có $\sin \alpha = \left| \cos(u, n) \right| = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Từ hình vẽ, ta có $(d, (P)) = \angle MBH$ và $((P), (Q)) = \angle MCH$.

Ta thấy $\sin \angle MCH = \frac{MH}{MC} \geq \frac{MH}{MB} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Vậy góc $((P), (Q)) = \angle MCH$ nhỏ nhất khi $\sin \angle MCH = \frac{\sqrt{6}}{3}$ hay $\cos \angle MCH = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

*Viết phương trình mặt phẳng (P)

-CÁCH 1:

Mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$

Ta có
$$\begin{cases} n_{(Q)} \cdot u = 0 \\ \cos(n, n_{(Q)}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - 2B - C = 0 \\ \frac{|2A - B - 2C|}{3\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 2B + C \\ |3B| = \sqrt{3(2B + C)^2 + B^2 + C^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2B + C \\ 6B^2 + 6C^2 + 12BC = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Nếu $B = 0$ suy ra $A = C = 0$ loại.

Nếu $B \neq 0$ từ (1) suy ra $\left(\frac{C}{B}\right)^2 + 2\frac{C}{B} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{C}{B} = -1 \Rightarrow C = -B$ suy ra $A = B$.

Mặt phẳng $(P): Bx + By - Bz + D = 0$ đi qua điểm $N(0; -1; 2) \in d$ suy ra $D = 3B$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$. Suy ra $d(A; (P)) = \sqrt{3}$.

-CÁCH 2

Gọi $\Delta = (P) \cap (Q)$ thì góc giữa (P) và (Q) nhỏ nhất khi và chỉ khi $\Delta \perp d$. Do đó, mặt phẳng (P) thỏa đề bài là mặt phẳng chứa d và cắt (Q) theo giao tuyến Δ sao cho $\Delta \perp d$.

$\begin{cases} \Delta \subset (Q) \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow \Delta$ nhận $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_d, \vec{n}_Q]$ làm vec tơ chỉ phương.

(Q) chứa d và $\Delta \Rightarrow (P)$ qua $M(0; -1; 2) \in d$ và nhận $\vec{n} = [\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta] = (6; 6; -6)$ làm vector

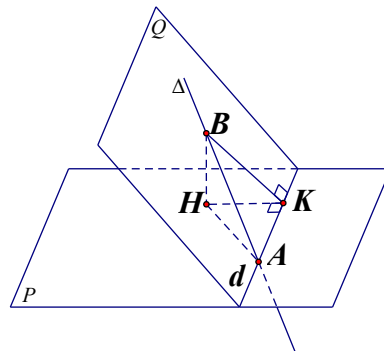
pháp tuyến $\Rightarrow (P): x + y - z + 3 = 0$. Vậy $d(A; (P)) = \sqrt{3}$.

Câu 74. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (Q) là

- A. $x - 2y + z = 0$. B. $x + 22y + 10z = 0$. C. $x - 2y - z = 0$. D. $x + 10y - 22z = 0$.

Lời giải

Chọn D



Đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ được viết lại dưới dạng tham số $\Delta: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = t \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Do đó Δ cắt (P) tại điểm $A(0; 0; 0) \equiv O$.

Lại có Δ và (P) không vuông góc nhau nên ta đi chứng minh góc nhỏ nhất giữa (P) và (Q) là góc giữa Δ và (P) . Thật vậy trên Δ lấy B khác A , kẻ BH vuông góc với (P) tại H và BK vuông góc d tại K (d là giao tuyến của (P) và (Q)) tại K . Khi đó góc giữa (Q) và (P) là góc BKH .

$$HA \geq HK \Rightarrow \tan BKH = \frac{BH}{HK} \geq \frac{BH}{HA} = \tan BAH$$

$$\begin{cases} \angle BKH, \angle BAH < 90^\circ \\ \tan \angle BKH \geq \tan \angle BAH \end{cases} \Rightarrow \angle BKH \geq \angle BAH = \left(\Delta, (P) \right) = \arcsin \frac{4}{9}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow K \equiv A \Leftrightarrow \Delta \perp d$.

Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là nhỏ nhất khi và chỉ khi (Q) chứa Δ và cắt (P) theo một giao tuyến vuông góc Δ .

***Viết phương trình của (Q)**

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 2; 1)$, (P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; 2; -2)$ nên d có

vector chỉ phương $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{n}_1 \end{bmatrix} = (-6; 5; 2)$.

(Q) chứa Δ và d nên nhận $\vec{n}_2 = \begin{bmatrix} \vec{u}_2 & \vec{u}_1 \end{bmatrix} = (1; 10; -22)$ làm vector pháp tuyến.

Vậy mặt phẳng (Q) đi qua $A(0; 0; 0)$ và nhận $\vec{n}_2 = (1; 10; -22)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình $x + 10y - 22z = 0$.

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$. (Q) là mặt phẳng chứa d và tạo với mp (P) một góc nhỏ nhất. Gọi $\vec{n}_Q = (a; b; 1)$ là một vector pháp tuyến của (Q) . Đẳng thức nào **đúng**?

- A. $a - b = -1$ B. $a + b = -2$ C. $a - b = 1$ D. $a + b = 0$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d đi qua điểm $M(0; -1; 2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_d = (-1; 2; 1)$.

Theo giả thiết, $d \subset (Q)$ và $\vec{n}_Q = (a; b; 1)$ là một vector pháp tuyến của (Q) nên ta có $\vec{u}_d \cdot \vec{n}_Q = 0$

$$\hat{U} \cdot a + 2b + 1 = 0 \hat{U} \quad a = -2b - 1 \quad (1)$$

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_P = (2; -1; -2)$.

$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| |\vec{n}_Q|} = \frac{|2a - b - 2|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \quad (2)$$

Ta có

Thế (1) vào (2) ta được $\cos((P), (Q)) = \frac{|b|}{\sqrt{5b^2 + 4b + 2}}$

Khi góc giữa (P) và (Q) nhỏ nhất thì $\cos((P), (Q))$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số $f(b) = \frac{b}{\sqrt{5b^2 + 4b + 2}}$, có $f'(b) = \frac{b+1}{\sqrt{(5b^2 + 4b + 2)^3}} = 0 \Leftrightarrow b = -1$.

Bảng biến thiên

b	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(b)$	$-$	0	$+$
$f(b)$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$

Từ đó suy ra với hàm số $g(b) = \frac{|b|}{\sqrt{5b^2 + 4b + 2}}$ có $\max_i g(b) = g(-1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ khi $b = -1$ và $a = -1$.

Vậy: $a + b = -2$.

Câu 76. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$ và tạo với trục Oy góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

- A. $E(-3; 0; 4)$. B. $M(3; 0; 2)$. C. $N(-1; -2; -1)$. D. $F(1; 2; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có VTCP của đường thẳng d là $u_d = (1; -1; -2)$ và VTCP của trục Oy là $j = (0; 1; 0)$.

Gọi α là góc giữa d và Oy , ta có $\cos \alpha = \frac{|\vec{u_d} \cdot \vec{j}|}{|\vec{u_d}| |\vec{j}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \neq 0$ với

Gọi β là góc giữa mặt phẳng (P) và Oy , do (P) chứa d nên ta có $\beta \leq \alpha$. Dấu bằng xảy ra khi mặt

phẳng (P) tạo với Oy một góc β thỏa mãn $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

(P) chứa d nên (P) có dạng $m(x+y+1) + n(2x+z-2) = 0, m^2 + n^2 > 0$

$\Leftrightarrow (m+2n)x + my + nz + m - 2n = 0, m^2 + n^2 > 0$

$\sin \beta = \frac{|m|}{\sqrt{(m+2n)^2 + m^2 + n^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \Rightarrow 4m^2 + 20mn + 25n^2 = 0 \Leftrightarrow 2m + 5n = 0$

Chọn $m = 5, n = -2$ suy ra phương trình mặt phẳng (P): $x + 5y - 2z + 9 = 0$.

Vậy điểm $N(-1; -2; -1) \in (P)$.