

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ 1 – TOÁN 12 – ĐỀ SỐ 7

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án chọn.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án đúng nhất.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

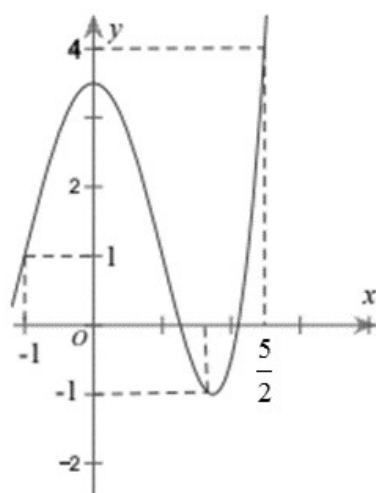
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
y'	$+$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$+\infty$	4	$-\infty$

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x(x+1)(x-4)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ là:

- A. $M = 4, m = 1$ B. $M = 4, m = -1$ C. $M = \frac{7}{2}, m = -1$ D. $M = \frac{7}{2}, m = 1$

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $m=3$

B. $m=0$

C. $m=-2$

D. $m=11$

Câu 5. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x-3}$ là

A. $x=-3$

B. $x=-1$

C. $x=1$

D. $x=3$

Câu 6. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = x + 3 + \frac{1}{2x+1}$ có phương trình là

A. $y=2x+1$

B. $y=x-3$

C. $y=x+3$

D. $y=2x-1$

Câu 7. Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	-5	-4	-3	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		$+\infty$		4	
		12		$-\infty$		$-\infty$

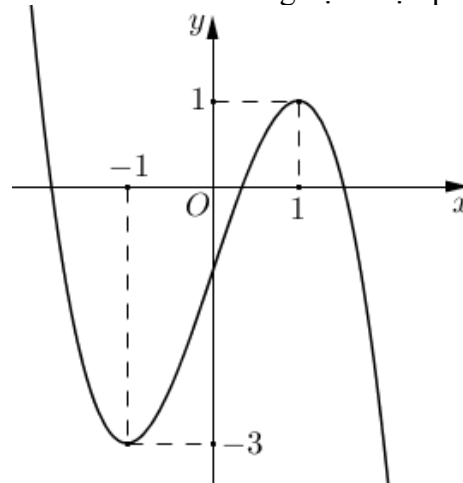
A. $y = \frac{-2x^2+8x+2}{x-4}$

B. $y = \frac{-x^2+13}{x+4}$

C. $y = \frac{-x^2+13}{-x-4}$

D. $y = \frac{2x^2+8x+2}{-x-4}$

Câu 8. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt?



A. 2

B. 5

C. 3

D. 4

Câu 9. Cho hình lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}, \overrightarrow{BC}=\vec{d}$. Trong các biểu thức véc-tơ sau đây, biểu thức nào **đúng**.

A. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$

B. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$

C. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$

D. $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$

Câu 10. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$

C. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$

D. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

A. $(1; -2; 3)$

B. $(1; 2; -3)$

C. $(-1; -2; -3)$

D. $(-1; 2; 3)$

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$

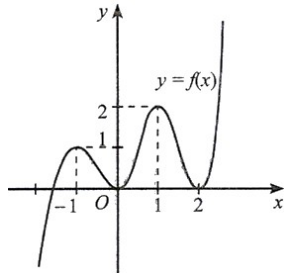
C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$

D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như Hình.



a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$ và $(2; +\infty)$.

b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; 2)$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $x = 2$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $x = 1$;

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

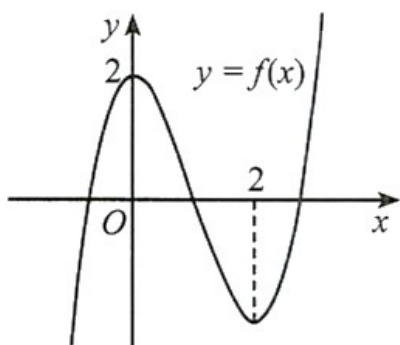
a) Đạo hàm của hàm số đã cho là

b) $x = 1$ là điểm cực tiểu của của hàm số.

c) Hàm số có hai điểm cực trị.

d) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị như Hình.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là 0 và 2.

b) Giá trị b bằng 0.

c) Giá trị $c = -2$.

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$

Câu 4. Cho hình tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB=3, AC=4, AD=6$. Xét hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với đỉnh A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AC, AD . Gọi E, F lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD và ACD . Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Tọa độ của đỉnh B là $(3; 0; 0)$.

b) Tọa độ của điểm E là $\left(0; \frac{4}{3}; 2\right)$.

c) $\vec{EF} = \left(-1; \frac{4}{3}; 0\right)$

d) $\vec{AD} \cdot \vec{EF} = 0$

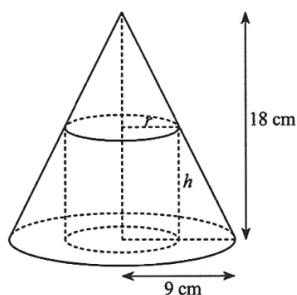
Phần 3. Câu trả lời ngắn.

Thí sinh trả lời đáp án từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Một công ty muốn thiết kế một loại hộp có dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông sao cho thể tích khối hộp được tạo thành là $8dm^3$ và diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất. Độ dài cạnh đáy của mỗi hộp muốn thiết kế là bao nhiêu decimet?

Câu 2. Cho hình thang cân có đáy nhỏ và hai cạnh bên bằng nhau và bằng 5. Tìm diện tích lớn nhất của hình thang cân đó. (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Câu 3. Hình bên cho biết một hình trụ bán kính đáy $r(cm)$, chiều cao $h(cm)$ nội tiếp hình nón có bán kính đáy 9 cm, chiều cao 18 cm. Tìm giá trị của r để thể tích của hình trụ là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của cm).



- Câu 4.** Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực (N) của ba lực trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
- Câu 5.** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 vector $u(2; 1; -1)$ và $v(1; -1; m)$. Tìm giá trị của m để hai vector u và v tạo với nhau một góc 60° .
- Câu 6.** Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 3^{x+y-4} + (x+y+1) \cdot 2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2)$ bằng $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

PHIẾU TRẢ LỜI

PHẦN I

	A	B	C	D
1	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐

	A	B	C	D
11	☐	☐	☐	☐
12	☐	☐	☐	☐

Điểm

Điểm phần I: đ

Điểm phần II: đ

Điểm phần III: đ

Tổng: đ

PHẦN II

Câu 1	Câu 2
Đúng Sai	Đúng Sai
a) ☐ ☐	☐ ☐
b) ☐ ☐	☐ ☐
c) ☐ ☐	☐ ☐
d) ☐ ☐	☐ ☐

Câu 3	Câu 4
Đúng Sai	Đúng Sai
a) ☐ ☐	☐ ☐
b) ☐ ☐	☐ ☐
c) ☐ ☐	☐ ☐
d) ☐ ☐	☐ ☐

PHẦN III

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
- ☐	- ☐	- ☐	- ☐	- ☐	- ☐
5 ☐	5 ☐	5 ☐	5 ☐	5 ☐	5 ☐
0 ☐	0 ☐	0 ☐	0 ☐	0 ☐	0 ☐
1 ☐	1 ☐	1 ☐	1 ☐	1 ☐	1 ☐
2 ☐	2 ☐	2 ☐	2 ☐	2 ☐	2 ☐
3 ☐	3 ☐	3 ☐	3 ☐	3 ☐	3 ☐
4 ☐	4 ☐	4 ☐	4 ☐	4 ☐	4 ☐
5 ☐	5 ☐	5 ☐	5 ☐	5 ☐	5 ☐
6 ☐	6 ☐	6 ☐	6 ☐	6 ☐	6 ☐
7 ☐	7 ☐	7 ☐	7 ☐	7 ☐	7 ☐
8 ☐	8 ☐	8 ☐	8 ☐	8 ☐	8 ☐
9 ☐	9 ☐	9 ☐	9 ☐	9 ☐	9 ☐

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án chọn.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án đúng nhất.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
y'	+		+	0	-
y	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	4	$-\infty$

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $(3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x(x+1)(x-4)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải

Chọn D

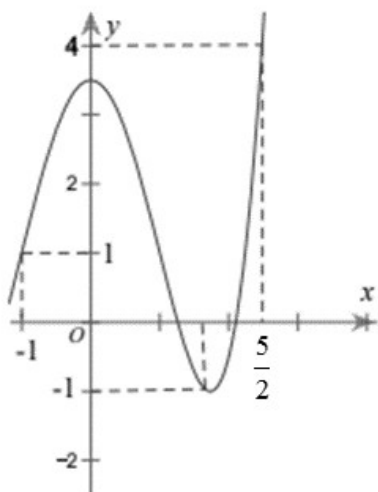
$$f'(x) = x(x+1)(x-4)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$		
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Vậy hàm số đã cho có hai điểm cực tiểu là $x = -1$ và $x = 4$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ là:

- A. $M=4, m=1$ B. $M=4, m=-1$ C. $M=\frac{7}{2}, m=-1$ D. $M=\frac{7}{2}, m=1$

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị $M=4, m=-1$.

- Câu 4.** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^3-7x^2+11x-2$ trên đoạn $[0; 2]$.
A. $m=3$ B. $m=0$ C. $m=-2$ D. $m=11$

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số trên đoạn $[0; 2]$. Ta có $y'=3x^2-14x+11$ suy ra $y'=0 \Leftrightarrow x=1$

Tính $f(0)=-2; f(1)=3, f(2)=0$. Suy ra $\min_{[0;2]} f(x)=f(0)=-2=m$.

- Câu 5.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x-3}$ là
A. $x=-3$ B. $x=-1$ C. $x=1$ D. $x=3$.

Lời giải.

Chọn D

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-1}{x-3} = -\infty$. Suy ra tiệm cận đứng là đường thẳng $x=3$.

- Câu 6.** Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)=x+3+\frac{1}{2x+1}$ có phương trình là
A. $y=2x+1$ B. $y=x-3$

C. $y = x + 3$.

D. $y = 2x - 1$.

Lời giải

Do $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 3)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x + 1} = 0$ nên đường thẳng $y = x + 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án

C.

Câu 7. Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	-5	-4	-3	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		$+\infty$		4	
		$\searrow$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\searrow$
		12		$-\infty$		$-\infty$

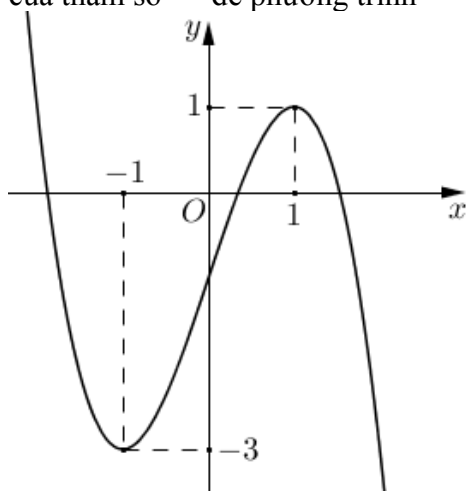
A. $y = \frac{-2x^2 + 8x + 2}{x - 4}$.

B. $y = \frac{-x^2 + 13}{x + 4}$.

C. $y = \frac{-x^2 + 13}{-x - 4}$.

D. $y = \frac{2x^2 + 8x + 2}{-x - 4}$.

Câu 8. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt?



A. 2.

B. 5.

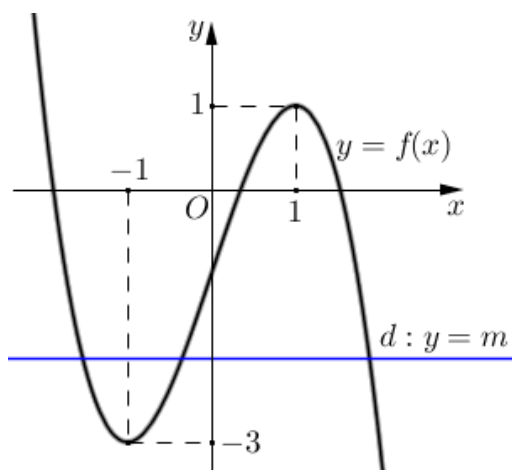
C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = m$.



Dựa vào hình vẽ, ta có:

Phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt, tức là $-3 < m < 1$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0\}$.

Câu 9. Cho hình lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$. Đặt $\vec{AA'} = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}, \vec{BC} = \vec{d}$. Trong các biểu thức vectơ sau đây, biểu thức nào **đúng**.

- A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$. B. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. C. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. D. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn D

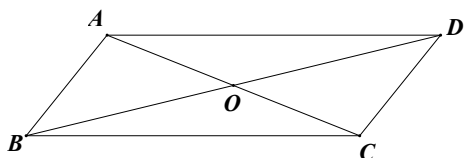
Ta có: $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BC} = \vec{CB} + \vec{BC} = \vec{0}$.

Câu 10. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

- A. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$. B. $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$.
C. $\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} = \vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{OD}$. D. $\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OC} = \vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OD}$.

Lời giải

Chọn B



Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

- A. $(1; -2; 3)$. B. $(1; 2; -3)$. C. $(-1; -2; -3)$. D. $(-1; 2; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ hình chiếu của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oxz) là $(1;0;3)$. Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là $(1;-2;3)$

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;0)$ và $\vec{b}=(-1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a},\vec{b})$

- A. $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{25}$ B. $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{5}$ C. $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{25}$ D. $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{5}$

Lời giải

Chọn B

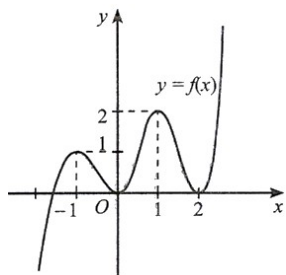
$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{-2}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=-\frac{2}{5}$$

Ta có:

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như Hình.



- a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $(0;1)$ và $(2;+\infty)$.
b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;2)$.
c) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $x=2$.
d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ và $x=1$;

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $(0;1)$ và $(2;+\infty)$.
- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;2)$.
- Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $x=1$; đạt cực tiểu tại $x=0$ và $x=2$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

- a) Đạo hàm của hàm số đã cho là

b) $x=1$ là điểm cực tiểu của của hàm số.

c) Hàm số có hai điểm cực trị.

d) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------------	---------------	----------------	----------------

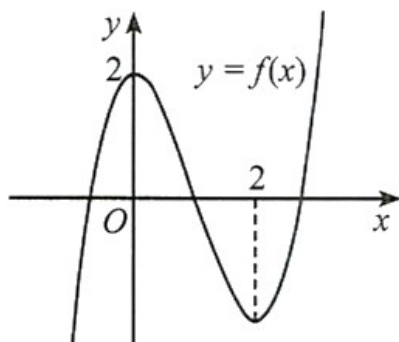
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		0		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
							0

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị như Hình.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là 0 và 2.

b) Giá trị b bằng 0.

c) Giá trị $c = -2$.

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là $x=2$, điểm cực đại là $x=0$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Vì 0; 2 là hai nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ nên $b = 0, a = -3$. Vì đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ (0;2) nên $c = 2$. Suy ra $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$.

Câu 4. Cho hình tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = 3, AC = 4, AD = 6$. Xét hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với đỉnh A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AC, AD . Gọi E, F lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD và ACD . Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Tọa độ của đỉnh B là $(3; 0; 0)$.

b) Tọa độ của điểm E là $\left(0; \frac{4}{3}; 2\right)$.

c) $\vec{EF} = \left(-1; \frac{4}{3}; 0\right)$

d) $\vec{AD} \cdot \vec{EF} = 0$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Từ giả thiết suy ra $B(3; 0; 0), C(0; 4; 0), D(0; 0; 6)$.

b) Áp dụng công thức xác định tọa độ trọng tâm tam giác suy ra $E(1; 0; 2)$ và $F\left(0; \frac{4}{3}; 2\right)$.

c) Ta có $\vec{AD} = (0; 0; 6)$ và $\vec{EF} = \left(-1; \frac{4}{3}; 0\right)$, suy ra

d) $\vec{AD} \cdot \vec{EF} = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot \frac{4}{3} + 6 \cdot 0 = 0$.

Phần 3. Câu trả lời ngắn.

Thí sinh trả lời đáp án từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Một công ty muốn thiết kế một loại hộp có dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông sao cho thể tích khối hộp được tạo thành là $8dm^3$ và diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất. Độ dài cạnh đáy của mỗi hộp muốn thiết kế là bao nhiêu decimet?

Lời giải

Đáp số: 2.

Gọi độ dài cạnh đáy là x , chiều cao là $h(x > 0, h > 0)$.

Ta có $V = 8 \Leftrightarrow x^2 h = 8 \Leftrightarrow h = \frac{8}{x^2}$.

Diện tích toàn phần của khối hộp là: $S_{tp} = 2x^2 + 4xh = 2x^2 + \frac{32}{x} = f(x)$.

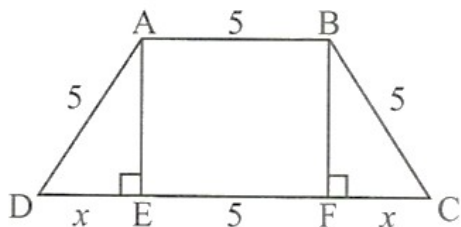
$$f'(x) = 4x - \frac{32}{x^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Câu 2. Cho hình thang cân có đáy nhỏ và hai cạnh bên bằng nhau và bằng 5. Tìm diện tích lớn nhất của hình thang cân đó. (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 32,5

Xét hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$ như hình bên.

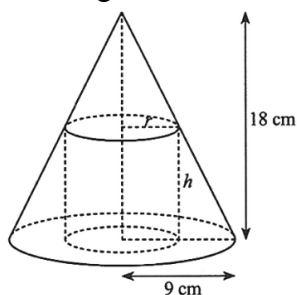


Ta có diện tích hình thang cân $ABCD$ là $S = \frac{1}{2}(AB + CD)AE = (5 + x)\sqrt{25 - x^2} \quad (0 \leq x < 5)$.

$$S' = \frac{-2x^2 - 5x + 25}{\sqrt{25 - x^2}}; S' = 0 \Leftrightarrow x = 2,5.$$

Lập bảng biến thiên, ta có $\max_{(0;5)} S = S\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{75\sqrt{3}}{4} \approx 32,5$.

Câu 3. Hình bên cho biết một hình trụ bán kính đáy $r(\text{cm})$, chiều cao $h(\text{cm})$ nội tiếp hình nón có bán kính đáy 9 cm, chiều cao 18 cm. Tìm giá trị của r để thể tích của hình trụ là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của cm).



Lời giải

Trả lời: 6

$$\frac{r}{9} = \frac{18 - h}{18} \Rightarrow h = 18 - 2r \quad (0 < r < 9)$$

Thể tích của hình trụ: $V = \pi r^2 h = \pi r^2 (18 - 2r) = 2\pi(9r^2 - r^3)$

$$V' = 2\pi(18r - 3r^2); V' = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ (loại) hoặc } r = 6.$$

Bảng biến thiên:

r	0	6	9
V'		+	-
V		0	

Từ đó, V đạt giá trị lớn nhất khi $r = 6\text{cm}$.

- Câu 4.** Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực (N) của ba lực trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời: 26

Hợp lực của hai lực đầu tiên là $\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

→ Độ lớn hợp lực của hai lực đó là $|\vec{F}_{12}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(F_1, F_2)} = 25,78(N)$

Lực F_3 vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho → Vector $\vec{F}_3$ vuông góc với mọi vector nằm trong mặt phẳng tạo bởi $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$

→ $|F| = |\vec{F}_3 + \vec{F}_{12}| = \sqrt{F_3^2 + F_{12}^2 + 2 \cdot F_3 \cdot F_{12} \cdot \cos(F_3, F_{12})} = 26(N)$

- Câu 5.** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 vector $u(2; 1; -1)$ và $v(1; -1; m)$. Tìm giá trị của m để hai vector u và v tạo với nhau một góc 60° .

Lời giải

Trả lời: - 2

Ta có: $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2 + 2}} = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{1 - m}{\sqrt{6} \sqrt{m^2 + 2}} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ 6(m^2 + 2) = 4(1 - m)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ 2m^2 + 8m + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

- Câu 6.** Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 3^{x+y-4} + (x+y+1) \cdot 2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2)$ bằng $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 151

Điều kiện $x \geq 2; y \geq -3$.

$$x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}) \Leftrightarrow (x+y+1)^2 = 4(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}) \quad (*)$$

Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \leq x+y+1$ nên từ (*) suy ra $(x+y+1)^2 \leq 8(x+y+1) \Leftrightarrow x+y \leq 7$.

Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \geq 0$ nên từ (*) suy ra $(x+y+1)^2 \geq 4(x+y+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 \leq 0 \\ x+y+1 \geq 4 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ x+y+1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x+y \geq 3 \end{cases}$.

Do $x \geq 2$ nên $x^2 \geq 2x$, $y^2+1 \geq 2y$, suy ra $x^2+y^2+1 \geq 2(x+y)$. Từ đó ta có
 $M = 3^{x+y-4} + (x+y+1).2^{7-x-y} - 3(x^2+y^2) \leq 3^{x+y-4} + (x+y+1).2^{7-x-y} - 6(x+y)+3$.

Đặt $t = x+y$ với $t = -1$ hoặc $3 \leq t \leq 7$.

Xét hàm số $f(t) = 3^{t-4} + (t+1)2^{7-t} - 6t + 3$, ta có $f(-1) = \frac{2188}{243}$.

$$f'(t) = 3^{t-4} \ln 3 + 2^{7-t} - (t+1).2^{7-t} \ln 2 - 6$$

$$f''(t) = 3^{t-4} \ln^2 3 + [(t+1) \ln 2 - 2] 2^{7-t} \ln 2 > 0, \forall t \in [3; 7].$$

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(3; 7)$, mà $f'(t)$ liên tục trên $[3; 7]$ và $f'(3).f'(7) < 0$ nên phương trình $f'(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t_0 \in (3; 7)$.

t	3	t_0	7
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\frac{148}{3}$	$f(t_0)$	-4

Suy ra $M = 3^{x+y-4} + (x+y+1).2^{7-x-y} - 3(x^2+y^2) \leq \frac{148}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=2, y=1$.