

**Bài 1. (3 điểm)**

Cho biểu thức: 
$$A = \left[ \frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left( \frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị nguyên của  $x$  để A có giá trị nguyên.

**Bài 2. (4 điểm)**

a) Chứng minh rằng:  $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$  với  $a + b \geq 1$

b) Ký hiệu  $[a]$  (phần nguyên của  $a$ ) là số nguyên lớn nhất không vượt quá  $a$ .

Tìm  $x$  biết rằng: 
$$\left[ \frac{34x + 19}{11} \right] = 2x + 1$$

**Bài 3. (3 điểm)**

Lúc 7 giờ, một ca nô xuôi dòng từ A đến B cách nhau  $36km$ , rồi ngay lập tức quay trở về A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc ca nô khi xuôi dòng, biết vận tốc dòng nước chảy là  $6km/h$

**Bài 4. (5 điểm)**

a) Hãy tính số bị chia, số chia và thương số trong phép chia sau đây:

$\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$  biết rằng cả ba số đều là bình phương của những số nguyên (những chữ khác nhau là các chữ số khác nhau)

b) Cho  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

**Bài 5. (5 điểm)**

Cho đoạn thẳng  $AB = a$ . Gọi M là một điểm nằm giữa A và B. Vẽ về một phía của AB các hình vuông  $AMNP, BMLK$  có tâm theo thứ tự là C, D. Gọi I là trung điểm của  $CD$ .

a) Tính khoảng cách từ I đến AB

b) Khi điểm  $M$  di chuyển trên đoạn thẳng  $AB$  thì điểm  $I$  di chuyển trên đường nào ?

## ĐÁP ÁN

### Bài 1.

a) ĐKXD:  $x \neq \pm 1; x \neq 0$

$$\begin{aligned} A &= \left[ \frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left( \frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x} \\ &= \left[ \frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left( \frac{x+1-3x^2-3x}{3x} \right) \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \left[ \frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{1-2x-3x^2}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} \\ &= \left[ \frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(1-3x)}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2-2+6x}{3x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

b)  $A = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$

Để  $A$  có giá trị nguyên  $\Leftrightarrow \frac{2}{x-1}$  có giá trị nguyên  $\Rightarrow x \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$   
 $\Rightarrow x \in \{-1; 0; 2; 3\}$  vì  $x \neq -1; x \neq 0 \Rightarrow \{x\} = \{2; 3\}$

### Bài 2.

a) Theo bài ra ta có:  $a+b \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 1$  (1)

Mặt khác:  $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra:  $2(a^2 + b^2) \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

b)  $\left[ \frac{34x+19}{11} \right] = 2x+1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{34x+19}{11} - (2x+1) < 1$  và  $2x+1 \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 12x+8 < 11 \Leftrightarrow -8 \leq 12x < 3 \Leftrightarrow \frac{-4}{3} \leq 2x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{3} \leq 2x+1 < \frac{3}{2}$$

$$2x+1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ 2x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ x=0 \end{cases}$$

Do

### Bài 3.

Gọi  $x(km/h)$  là vận tốc ca nô xuôi dòng ( $x > 12$ )

Vận tốc ca nô khi nước lặng:  $x - 6(km/h)$

Vận tốc ca nô khi ngược dòng:  $x - 12(km/h)$

Thời gian cả đi và về của ca nô là  $4,5$  giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{36}{x} + \frac{36}{x-12} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x-4)(x-24) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4(km) \\ x=24(tm) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là  $24km/h$

#### Bài 4.

a)  $\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$

Vì  $q \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} q=4 \\ q=9 \end{cases} \Rightarrow a, d$  phải là những số thuộc  $\{1; 4; 5; 6; 9\}, a, d \neq 0$

Do  $\overline{abcd} = \overline{dcba} \times q$  nên  $d < 3 \Rightarrow d = 1$

Giả sử  $q = 4$  khi đó  $\overline{1cba} \cdot 4 = \overline{abcd}$  (vô lý) vì  $\overline{1cba} \cdot 4$  phải là một số chẵn nên  $q = 9$

Với  $q=9$  ta có:  $\overline{1cba} \times 9 = \overline{abcd}$  suy ra  $a=9, c < 2$  vì tích  $\overline{1cba} \times 9$  là số có 4 chữ số nên ta lại có  $c \neq d$  tức là  $c \neq 1 \Rightarrow c = 0$

Ta thấy  $\overline{abcd} = \overline{9b01} = \overline{10b9} \times 9$  vậy  $\overline{9b01}$  là số chia hết cho 9 nên  $b = 8$

Tóm lại ta có:  $9801 : 1089 = 9$

b) Đặt  $x = b + c - a; y = a + c - b; z = a + b - c \Rightarrow x, y, z > 0$   
 $\Rightarrow x + y + z = a + b + c$

$$2a = a + b + c - (b + c - a) = x + y + z - x = y + z \Rightarrow a = \frac{y+z}{2}$$

Tương tự:  $b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$

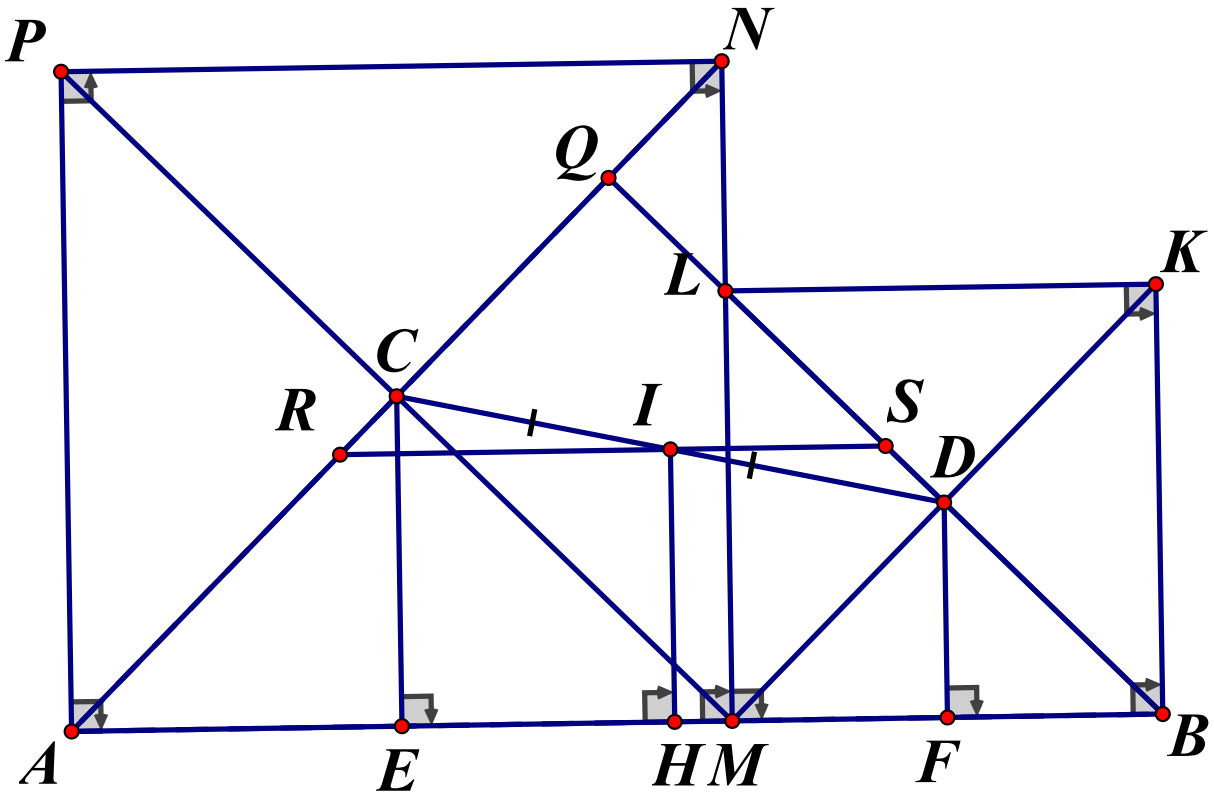
$$\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6$$

BĐT chứng minh tương đương với:

$$\Rightarrow \left( \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left( \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \geq 6 \quad \text{do} \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh

Bài 5.



- a) Kẻ  $CE, IH, DF$  cùng vuông góc với  $AB$  suy ra tứ giác  $CDFE$  là hình thang vuông.

Chứng minh được: 
$$CE = \frac{AM}{2}, DF = \frac{BM}{2} \Rightarrow CE + DF = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow IH = \frac{a}{4}$$

- b) Khi  $M$  di chuyển trên  $AB$  thì  $I$  di chuyển trên đoạn  $RS$  song song với  $AB$  và

cách  $AB$  một khoảng bằng  $\frac{a}{4}$  ( $R$  là trung điểm của  $AQ$ )

$S$  là trung điểm của  $BQ$ ,  $Q$  là giao điểm của  $BL$  và  $AN$ )