Phần thứ nhất

MỞ ĐẦU

I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong các kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia và Olympic Vật lí quốc tế thì kiến thức về phần cơ học nói chung và phần chuyển động ném của chất điểm nói riêng đều không thể thiếu được.

Lý thuyết và bài tập về chuyển động ném của chất điểm (các bài khó) xuất hiện ít trong sách giáo khoa Vật lí phổ thông mà nằm rải rác trong các tài liệu sách tham khảo hay trong các đề thi học sinh giỏi Quốc Gia, Olympic Vật lí các nước.

Vì vậy việc sưu tầm, tuyển chọn thành hệ thống các bài tập về chuyển động ném của chất điểmlà việc làm rất cần thiết trong công tác giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Chính vì vậy, để tạo điều kiện thuận lợi cho công tác giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi và việc tự nghiên cứu tài liệu, chuyên đề của học sinh giỏi tôi đã chọn đề tài: "*Chuyển động ném của chất điểm dưới tác dụng của trọng lực*" nhằm giúp cho việc nghiên cứu kiến thức, giảng dạy về chuyển động némđược thuận lợi và hiệu quả.

II. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

Xây dựng lý thuyết và hệ thống các bài tập về chuyển động ném của chất điểm dưới tác dụng của trọng lựctrong giảng dạy các lớp chuyên và bồi dưỡng học sinh giỏi.

III. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU, ĐÓNG GÓP MỚI CỦA CHUYÊN ĐỀ

1. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu lý thuyết vàcác bài toán nâng cao về chuyển động ném của chất điểm dưới tác dụng của trọng lực.

2. Đóng góp mới của chuyên đề

- Xây dựng lý thuyết về chuyển động ném của chất điểm dưới tác dụng của trọng lực.
- Xây dựng hệ thống bài tập có lời giảiđa dạng, phong phú.

IV. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Để hoàn thành nhiệm vụ của chuyên đề, tôi sử dụng các phương pháp sau:

- Phương pháp nghiên cứu lý luận.
- Phương pháp nghiên cứu tài liệu.

V. CẤU TRÚC CỦA CHUYÊN ĐỀ

Chuyênđề gồm ba phần: phần mở đầu, phần nội dung, phần kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Phần nội dung củachuyên đề được chia thành hai phần là lý thuyết và bài tập.

Phần thứ hai

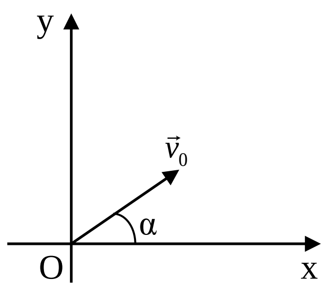
NỘI DUNG CHUYÊN ĐỀ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Chuyển động ném của chất điểm chỉ chịu tác dụng của trọng lực

Xét vật được ném với vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$ hợp với phương ngang một góc α

Chọn hệ trục tọa độ Oxy: O trùng với vị trí ném; Ox nằm ngang; Oy hướng thẳng đứng lên trên (hình 1)



Hình 1

- Theo phương Ox: Vật không chịu lực tác dụng lên chuyển động đều

Vận tốc: $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ (1)

Tọa độ: $x(t) = v_x.t = v_0 \cos\alpha.t$ (2)

- Theo phương Oy: Vật chuyển động với gia tốc rơi tự do g

Vận tốc: $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$; $v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt$ (3)

Tọa độ: $y(t) = v_0 \sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$ (4)

- Phương trình quỹ đạo của vật:

Từ (2) ta có $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ thay vào (4) ta được

$$y = \tan\alpha.x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \quad (5)$$

Vậy quỹ đạo của vật có dạng là đường parabol.

- Độ cao cực đại mà vật đạt được:

Tại độ cao cực đại thì $v_y = 0$ từ (3) suy ra $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ thay vào (4) ta được:

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \quad (6)$$

- Tầm bay xa:Giả sử vật được ném từ mặt đất.

Khi vật chạm đất thì $y = 0$ thay vào (4) suy ra $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ thay vào (2) ta được:

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (7)$$

Tầm bay xa cực đại: $L_{max} = \dfrac{v_0^2}{g}$ khi $\alpha = 45^0$ (8)

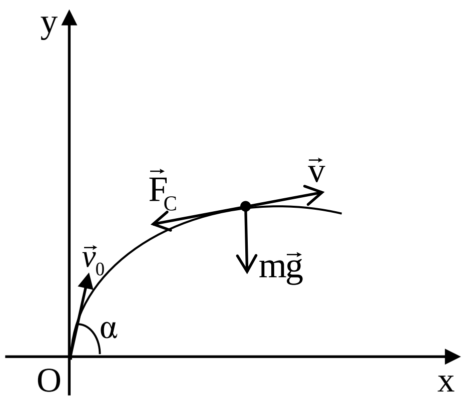
- Vận tốc của chất điểm tại thời điểm t:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(v_0 \cos\alpha\right)^2 + \left(v_0 \sin\alpha - gt\right)^2} \quad (9)$$

Véctơ $\vec{v}$ tiếp tuyến với quỹ đạo và hợp với trục Ox một góc: $\tan\beta = \dfrac{v_y}{v_x}$ (10)

<u>2. Chuyển động ném của chất điểm khi có lực cản của không khí</u>

Chọn hệ trục tọa độ Oxy: O trùng với vị trí ném; Oy hướng thẳng đứng lên trên; Ox nằm ngang sao cho vật chuyển động trong mặt phẳng Oxy (hình 2).



Hình 2

Chất điểm chịu tác dụng của hai lực: Trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$; lực cản không khí $\vec{F}_C$ có độ lớn $F_C = kv$ hoặc $F_C = kv^2$ trong đó v là vận tốc tương đối của vật đối với không khí, $\vec{F}_C$ ngược hướng với $\vec{v}$

Áp dụng định luật II Niutơn cho chất điểm:

$$m\vec{g} + \vec{F}_C = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Theo phương Ox: $-F_{Cx} = m\dfrac{dv_x}{dt}$

Theo phương Oy: $-mg - F_{Cy} = m\dfrac{dv_y}{dt}$

B. BÀI TẬP

Bài 1:

Một quả bóng nằm trên mặt đất, cách đều hai cột khung thành và cách đường thẳng nối hai khung thành một đoạn x_0 = 50 m.Quả bóng được đá với vận tốc v_0 = 25 m/s mà $\vec{v}_0$ nằm trong mặt phẳng thẳng đứng,vuông góc với mặt phẳng khung thành và hợp với mặt đất một góc là α. Khung thành cao 3,44 m.Hỏi góc α là bao nhiêu để quả bóng lọt vào khung thành? Lấy g = 9,8 m/s^2.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy: O trùng với vị trí ném; Oy hướng thẳng đứng lên trên; Ox nằm ngang sao cho vật chuyển động trong mặt phẳng Oxy.

- Phương trình chuyển động của vật

Phương Ox: $x = v_0 \cos\alpha.t$

Phương Oy: $y = v_0 \sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$

- Phương trình quỹ đạo: $y = \tan\alpha.x - \dfrac{gx^2}{2v_0^2.\cos^2\alpha}$

Vị trí sút bóng cách cung thành 50m ta có:

$y = -19,6\tan^2\alpha + 50\tan\alpha - 19,6$

Để bóng chui vào khung thành thì $0 < y < 3,44\,m$

=> $25,8^0 < \alpha < 31,1^0$ và $62,8^0 < \alpha < 64,2^0$

Bài 2:

Viên đạn 1 được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc đầu v. Viên đạn 2 cũng được bắn lên theo phương thẳng đứng sau viên thứ nhất t_0 giây. Viên đạn 2 vượt qua viên đạn 1 đúng vào lúc viên 1 đạt độ cao cực đại. Hãy tìm vận tốc ban đầu của viên đạn 2.

Giải

Độ cao cực đại của viên đạn 1: $h_{1max} = \dfrac{v^2}{2g}$

Thời gian để viên đạn 1 đạt độ cao trên: $t_{1max} = \dfrac{v}{g}$

Gọi vận tốc ban đầu của viên đạn 2 là v_2

Ta có quãng đường viên đạn 2 bay được khi gặp viên đạn 1:

$$h = v_2\left(t_{1max} - t_0\right) - \frac{1}{2}g\left(t_{1max} - t_0\right)^2 = h_{1max}$$

$$v_2\left(\frac{v}{g} - t_0\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v}{g} - t_0\right)^2 = \frac{v^2}{2g}$$

Vậy vận tốc viên đạn thứ 2: $v_2 = \dfrac{v^2 + \left(v - gt\right)^2}{2\left(v - gt_0\right)}$

Bài 3:

Một bức tường cao H = 40m, dày a = 10m. Một người có thể đứng ở khoảng cách x tùy ý đến chân tường ném một vật nhỏ với tốc độ v_0 nhỏ nhất bằng bao nhiêu hđể vật vượt qua tường, không chạm vào tường. Bỏ qua chiều cao của người. Lấy g = 10 m/s^2.

<u>Giải</u>

Áp dụng tính thuận nghịch của quỹ đạo ném, ta có thể đứng ở mép trên bên trái của tường ném ngược lại (hình 3).

- Công thức tầm xa:

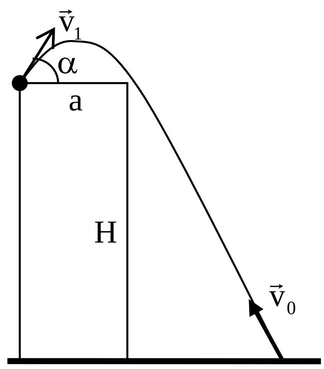
$$x = \frac{v_1^2.\sin\left(2\alpha\right)}{g} = a$$

- Để vận tốc v_0 nhỏ nhất thì v_1 nhỏ nhất ứng với góc ném 45^0.

$$\frac{v_1^2.\sin\left(2.45^0\right)}{g} = a \Rightarrow v_1 = 10\,m/s$$

- Bảo toàn cơ năng:

$$v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2gH} = 30\,m/s$$



Hình 3

Bài 4:

Một người ném hòn đá với vận tốc $\vec{v}_0$ hợp với phương ngang một góc α. Bỏ qua sức cản của không khí và chiều cao của người ném. Cho gia tốc trọng trường tại nơi ném là g. Tính tầm bay xa cực đại của hòn đá. Xét hai trường hợp:

a) Người đứng tại chỗ.

b) Người đó đang chạy với vận tốc $\vec{v}$ theo phương ngang (với $v < v_0$). Trong trường hợp này hòn đá có thể rơi xa thêm một khoảng bao nhiêu so với trường hợp ở câu a?

<u>Giải</u>

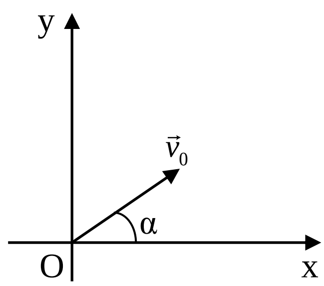
a) Trường hợp người đứng yên

Chọn hệ tọa độ xOy như hình.

- Phương trình chuyển động của vật:

Phương Ox: $x = v_0.\cos\alpha.t$

Phương Oy: $y = v_0\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$



Hình 4

- Vật chạm đất khi $y = 0$ nên $y = \left(v_0\sin\alpha. - \frac{1}{2}gt\right)t = 0$

$$\Rightarrow t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g} \quad (\text{loại nghiệm } t = 0)$$

- Khi đó tầm bay xa của vật: $L = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$

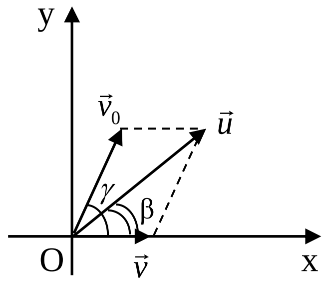
- Để tầm bay xa cực đại thì α = 45^0

Vậy tầm bay xa cực đại khi người đứng yên là:

$$x_0 = L_{0\max} = \frac{v_0^2}{g} \qquad (1)$$

b) Trường hợp người chạy với vận tốc $\vec{v}$ theo phương ngang

Chọn hệ tọa độ xOy (hình 5)



Hình 5

- Gọi $\vec{u}$ là vận tốc của vật đối với đất thì

$$\vec{u} = \vec{v}_0 + \vec{v} \qquad (2)$$

- Để vật đạt được tầm xa cực đại thì $\vec{u}$

Cũng phải hợp với Ox một góc $\beta = 45^0$

- Khi đó

$$\begin{cases} u_{Ox} = v_0\cos\gamma + v \\ u_{Oy} = v_0 \sin\gamma \end{cases}$$

- Do $\beta = 45^0$ nên $u_{Ox} = u_{Oy}$ hay $v_0\cos\gamma + v = v_0 \sin\gamma$

- Bình phương hai vế và biến đổi ta được

$$2v_0^2\cos^2\gamma + 2v_0 v\cos\gamma + v^2 - v_0^2 = 0$$

- Giải phương trình ta được

$$\begin{cases} \cos\gamma = \dfrac{\sqrt{2v_0^2 - v^2} - v}{2v_0} \\ \cos\gamma = \dfrac{-2v_0 v - \sqrt{4v_0^2(2v_0^2 - v^2)}}{4v_0^2} < 0 \end{cases} \qquad (3)$$

- Áp dụng định lí hàm số cosin cho (2) ta có:

$$u^2 = v_0^2 + 2vv_0\cos\gamma + v^2 \qquad (4)$$

- Thay (3) vào (4) được

$$u^2 = v_0^2 + 2vv_0 \frac{\sqrt{2v_0^2 - v^2} - v}{2v_0} + v^2$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{v_0^2 + v\sqrt{2v_0^2 - v^2}}$$

- Tầm bay xa cực đại lúc này là

$$x = L_{\max} = \frac{u^2}{g} = \frac{v_0^2 + v\sqrt{2v_0^2 - v^2}}{g}$$

- Vật rơi thêm một khoảng xa nhất là $\Delta x = x - x_0$

$$\Delta x = \frac{v_0^2 + v\sqrt{2v_0^2 - v^2}}{g} - \frac{v_0^2}{g}$$

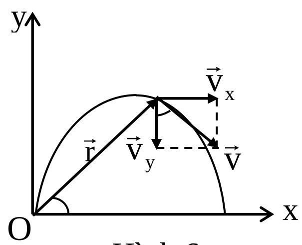
$$\Delta x = \frac{v\sqrt{2v_0^2 - v^2}}{g} \qquad (\text{với } v \le v_0\sqrt{2}\ )$$

Bài 5:

Một viên đạn được bắn từ mặt đất theo phương hợp với phương ngang một góc α. Xác định α để khoảng cách từ viên đạn đến điểm bắn luôn tăng. Bỏ qua sức cản của không khí.

Giải

Chọn hệ trục Oxy như hình 6



Hình 6

Ta có:

$$v_x = v_0 \cos\alpha ; x = v_x.t = v_0 \cos\alpha.t$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha ;\ y = v_0 \sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$$

Khoảng cách từ viên đạn tới điểm bắn là:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha.t)^2 + \left(v_0 \sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2\right)^2}$$

*** Cách 1:**Khoảng cách từ hòn đá tới điểm ném r sẽ cực đại khi $\vec{r}$ vuông góc với véctơ vận tốc tức thời $\vec{v}$.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{y}{x} = -\frac{v_x}{v_y}$

$$\Leftrightarrow \frac{v_0 \sin\alpha - g\frac{t}{2}}{v_0 \cos\alpha} = -\frac{v_0 \cos\alpha}{v_0 \sin\alpha - gt}$$

$$\Rightarrow g^2t^2 + 3v_0 \sin\alpha.g.t + 2v_0^2 = 0$$

Để $|\vec{r}|$ luôn tăng thì phương trình trên phải vô nghiệm, tức là:

$$\Delta = 9v_0^2 \sin\alpha.g^2 - 8v_0^2g^2 < 0$$

Vậy $\sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3} \ \Rightarrow\ \alpha < 70,5^0$

*** Cách 2:** $r^2 = (v_0 \cos\alpha.t)^2 + \left(v_0 \sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2\right)^2$ luôn tăng

Tức là $\frac{dr^2}{dt} > 0$ ta tìm được kết quả: $\sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3} \ \Rightarrow\ \alpha < 70,5^0$

Bài 6:

Một vật được ném xiên với tốc độ ban đầu v_0 và với điểm ném là x = z = 0. Vật chuyển động trong trọng trường đều trong mặt phẳng Oxz, trong đó, trụcx nằm ngang, và trục z thẳng đứng, song song và ngược chiều với gia tốc rơi tự do g; bỏ qua sự cản của không khí. Hãy chứng minh rằng vùng không gian mà vật có thể đi qua có ranh giới là parabol. Tìm phương trình đường ranh giới này.

Giải

- Phương trình quỹ đạo của vật

$$z = \tan\alpha.x - \frac{gx^2}{2v_0^2.\cos^2\alpha}$$

- Đưa về phương trình bậc 2 ẩn $k = \tan\alpha$. Với $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + k^2$

$$\frac{g.x^2}{2.v_0^2}.k^2 - x.k + \left(z + \frac{g.x^2}{2.v_0^2}\right) = 0$$

- Điều kiện có nghiệm k: $\Delta = x^2 - 4.\frac{g.x^2}{2.v_0^2}.(z + \frac{g.x^2}{2.v_0^2}) \geq 0$

Chuyển vế ta tìm được vùng ranh giới: $z \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$

Bài 7:

Từ đỉnh tháp cao H, người ta ném một hòn đá với vận tốc tối thiểu bằng bao nhiêu để hòn đá rơi cách chân tháp một khoảng L cho trước. Tính góc ném ứng với vận tốc tối thiểu đó.

<u>Giải</u>

Phương trình chuyển động của vật là:

$$x = v_0\cos\alpha.t \ ; \ y = H + v_0\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$$

Thời gian chuyển động của hòn đá từ lúc ném tới lúc chạm đất là: $t_0 = \frac{L}{v_0\cos\alpha}$

Do đó $\frac{gL^2}{2v_0^2}\tan^2\alpha - L.\tan\alpha + \left(\frac{gL^2}{2v_0^2} - H\right) = 0$ (*)

Để phương trình(*) có nghiệm $\tan\alpha$ thì

$$\Delta = L^2 - \frac{4gL^2}{2v_0^2}(\frac{gL^2}{2v_0^2} - H) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{gL^2}{v_0^4} - \frac{2gH}{v_0^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow v_0^4 + 2gHv_0^2 - g^2L^2 \geq 0$$

$v_{0\min} = \sqrt{g\sqrt{H^2 + L^2} - H}$ ứng với $\Delta = 0$.

Khi đó: $tg\alpha = \frac{v_0^2}{gL} = \frac{\sqrt{H^2 + L^2} - H}{L}$

Bài 8:

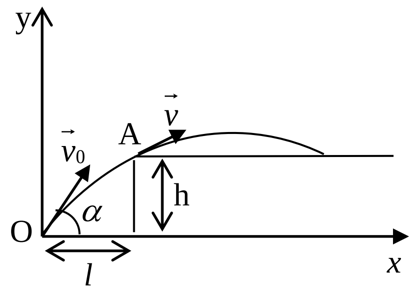
Người ta đặt một súng cối dưới một căn hầm có độ sâu h. Biết vận tốc đầu của đạn khi rời súng là v_0.

a) Hỏi phải đặt súng cách vách hầm một khoảng *l*bao nhiêu so với phương ngang để tầm xa S của đạn trên mặt đất là lớn nhất?

b) Tính tầm xa lớn nhất của đạn trên mặt đất?

Giải

a) Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình 7.



Hình 7

- Phương trình vận tốc của vật:

Phương Ox: $v_x = v_0\cos\alpha$

Phương Oy: $v_y = v_0\sin\alpha - gt$

- Phương trình chuyển động:

Phương Ox: $x = v_0\cos\alpha.t$

Phương Oy: $y = v_0\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$

Để tầm xa là lớn nhất thì tại A vận tốc của vật phải hợp với mặt ngang một góc 45^0

Vậy tại A: $v_x = v_y \Rightarrow t = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{g}.v_0$ (1)

Hơn nữa ta phải có sau thời gian này:

$x = l \Leftrightarrow v_0\cos\alpha.t = l$ (2)

$y = h \Leftrightarrow v_0\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2 = h$ (3)

Từ (2) suy ra $t = \frac{l}{v_0\cos\alpha}$ kết hợp với (1)

Ta được $l = \frac{v_0^2}{g}\cos\alpha\left(\sin\alpha - \cos\alpha\right)$ (4)

Thay t từ (1) vào (3) ta được:

$$\sin^2\alpha = \frac{gh}{v_0^2} + \frac{1}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2}$$

Thế vào (4) ta được $l = \frac{v_0^2}{g}\left(\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{g^2h^2}{v_0^4}} - \frac{1}{2} + \frac{gh}{v_0^2}\right)$

b) Từ (1) suy ra $t = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{gh}{v_0^2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2}}}{g}.v_0$

Ta có $v_y = v_0\sin\alpha.t - gt = v_0\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{gh}{v_0^2}} - \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{gh}{v_0^2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2}}}{g}\right).v_0$

$$v_y = v_0\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2}}$$

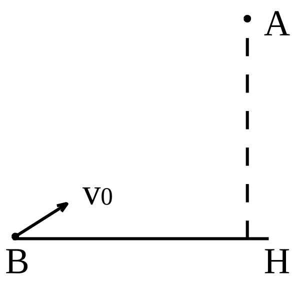
$$v_x = v_0\cos\alpha = v_0\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2}}$$

Mà $v_A = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_x\sqrt{2} = v_0\sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}$

Suy ra $S_{max} = \frac{v_A^2}{g} = \frac{v_0^2}{g} - 2h$

Bài 9:

Từ một điểm A có độ cao AH = 45 m so với mặt đất (Hình 8), người ta thả rơi tự do không vận tốc đầu một vật nhỏ thứ nhất. Sau khi thả vật thứ nhất được 1,0 giây thì từ điểm B trên mặt đất, vật thứ hai được ném lên với vận tốc đầu v_0 = 20 m/s. Biết $\vec{v}_0$ nằm trong mặt phẳng thẳng đứng chứa hai điểm A và B, khoảng cách BH = 40 m. Xác định góc ném α của $\vec{v}_0$ tạo với phương ngang để vật thứ hai ném trúng vật thứ nhất. Tính thời gian bay của vật thứ hai kể từ lúc ném tới khi hai vật gặp nhau. Bỏ qua ma sát, lấy g = 10 m/s².



Hình 8

Giải

Vận tốc và quãng đường vật 1 đi được sau khi thả 1,0 s:

$$v_1 = gt = 10\,m/s\ ;\ AC = \frac{1}{2}gt^2 = 5\,m.$$

- Chọn hệ quy chiếu gắn với vật 1 (hình 9).

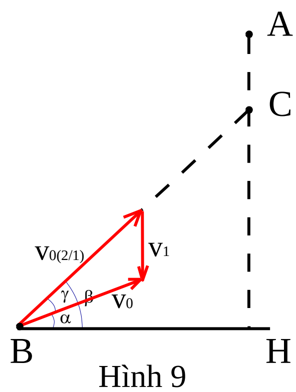
Gia tốc vật 2 so với vật 1 là $\vec{a}_{2/1} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{0}$

Vận tốc đầu của vật 2 so với vật 1 là: $\vec{v}_{0(2/1)} = \vec{v}_0 - \vec{v}_1$

$\vec{v}_{0(2/1)}$ không đổi cả độ lớn và hướng.

Vậy trong HQC này vật 2 chuyển động thẳng đều với vận tốc $v_{0(2/1)}$.

- Để vật 2 bắn trúng vật 1 thì véctơ $v_{0(2/1)}$ phải có phương BC tạo với phương ngang một góc:



Hình 9

$$\tan\beta = \frac{CH}{BH} = 1 \Rightarrow \beta = 45^0$$

- Định lý hàm số sin cho tam giác tạo bởi ba véc tơ vận tốc:

$$\frac{v_0}{\sin 45^0} = \frac{v_1}{\sin\gamma} \Rightarrow 20,7^0$$

Vậy v_0 tạo với phương ngang một góc α = 45⁰ – γ = 24,3⁰.

- Thời gian vật 2 chuyển động cho tới khi gặp nhau:

$$t' = \frac{BC}{v_{0(2/1)}}\ ;\ v_{0(2/1)} = \frac{v_0 \sin 114,3^0}{\sin 45^0} = 25,778\,m/s$$

Suy ra $t' \approx 2,2$ (s).

Bài 10:

Trong một trận đấu bóng đá, một cầu thủ thực hiện một quả phạt penalty 11m, bóng bay sát xà ngang vào cầu môn đối phương. Biết độ cao của xà ngang là h = 2,5m và khối lượng quả bóng là m = 0,5kg. Lấy $g = 10\,m/s^2$. Bỏ qua ma sát và sức cản của không khí. Tính vận tốc tối thiểu và động năng nhỏ nhất mà cầu thủ đó đã truyền cho quả bóng để cú sút phạt thành công?

<u>Giải</u>

Chọn hệ trục Oxy: O là điểm đặt quả bóng, Ox nằm ngang, Oy thẳng đứng.

- Gọi α là góc tạo bởi véctơ vận tốc cần truyền cho quả bóng với trục Ox.
- Chuyển động đều theo phương ngang Ox:

Vận tốc $v_x = v_0\cos\alpha$

Phương trình chuyển động: $x = v_x t = v_0\cos\alpha.t$ (1)

- Chuyển động theo phương Oy:

Vận tốc ban đầu $v_{0y} = v_0\sin\alpha$

Phương trình chuyển động: $y = v_0\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$ (2)

Từ (1) rút t sau đó thay vào (2) ta được:

$$y = x.\tan\alpha - \frac{1}{2}.g.\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Thay $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$ ta có $y = x.\tan\alpha - \frac{1}{2}g(1+\tan^2\alpha)\frac{x^2}{v_0^2}$

Khi x = L = 11m thì y = h = 2,5m.

Ta có $h = L.\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{gL^2}{v_0^2}(1+\tan^2\alpha)$

Từ đó ta tìm được $v_0^2 = \frac{gL^2(1+\tan^2\alpha)}{L.\tan\alpha - h}$

Đặt $A = \frac{1+\tan^2\alpha}{L.\tan\alpha - h} \Rightarrow v_0^2 = gL^2.A \Rightarrow v_0 = L\sqrt{g.A}$. Do đó v_{0min} khi A_{min}

Ta có $A = \frac{1+\tan^2\alpha}{L.\tan\alpha - h} = \frac{1+\tan^2\alpha}{11.\tan\alpha - 2,5}$

Suy ra $\tan^2\alpha - 11A.\tan\alpha + 2,5A + 1 = 0$.

$$\Delta = 121.A^2 - 4(2,5A + 1) = (11A - \frac{5}{22})^2 - \frac{509}{484} \geq 0.$$

$$A \geq \frac{\sqrt{509} + 5}{242} \Rightarrow A_{min} = \frac{\sqrt{509} + 5}{242}$$

Thay vào ta tìm được $v_{0min} = 11\sqrt{\frac{10\sqrt{509} + 5}{242}} = 11,75$ m/s

Động năng nhỏ nhất cần cung cấp cho quả bóng để cú sút phạt thành công là $W_{0min} = 34,5$ J.

Bài 11:

Hai vật được ném đồng thời từ một điểm trên mặt đất với vận tốc có độ lớn như nhau, cùng bằng v_0. Vật 1 được ném nghiêng góc α so với phương ngang, vật 2 được ném lên theo phương thẳng đứng. Bỏ qua sức cản của không khí.Hỏi góc α bằng bao nhiêu để khoảng cách giữa hai vật là cực đại? Tính khoảng cách cực đại đó.

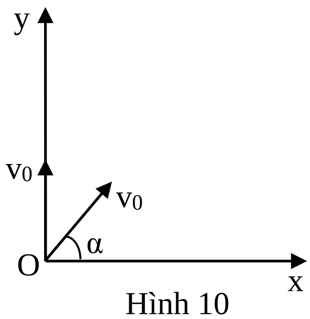
<u>Giải</u>

Chọn hệ quy chiếu gắn với đất, hệ trục tọa độ như hình vẽ, gốc thời gian tại thời điểm ném (hình 10).

Phương trình chuyển động của hai vật:

- Vật 1: $x_1 = v_0\cos\alpha.t$; $y_1 = v_0\sin\alpha.t - \frac{gt^2}{2}$ với $t \leq \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$

- Vật 2: $x_2 = 0$; $y_2 = v_0t - \frac{gt^2}{2}$ với $t \leq \frac{2v_0}{g}$



Hình 10

Khoảng cách giữa hai vật ở thời điểm t là

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 2v_0^2t^2(1 - \sin\alpha)$$

với $t \leq \frac{2v_0\sin\alpha}{g} \Rightarrow d^2 \leq \frac{8v_0^4}{g^2}\sin^2\alpha.(1 - \sin\alpha)$

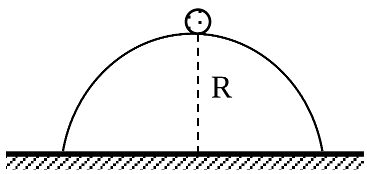
Ta có $\frac{8v_0^4}{g^2}\sin^2\alpha.(1-\sin\alpha) = \frac{32v_0^4}{g^2}.\frac{\sin\alpha}{2}.\frac{\sin\alpha}{2}.(1-\sin\alpha)$

Từ bất đẳng thức Côsi $\Rightarrow d^2 \leq \frac{32v_0^4}{g^2}.\frac{\left(\frac{\sin\alpha}{2} + \frac{\sin\alpha}{2} + 1 - \sin\alpha\right)^3}{27} = \frac{32v_0^4}{27g^2}$ (Côsi ba số)

Vậy $d_{max} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}.\frac{v_0^2}{g}$, $d = d_{max}$ khi $\frac{\sin\alpha}{2} = 1 - \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 42^0$

Bài 12:

Một bán cầu có bán kính R trượt đều theo đường thẳng nằm ngang. Một quả cầu nhỏ cách mặt phẳng ngang một đoạn bằng R. Ngay khi đỉnh bán cầu đi qua quả cầu



Hình 11

nhỏ thì nó được buông rơi tự do (hình 11). Tìm vận tốc nhỏ nhất của bán cầu để nó không cản trở chuyển động rơi tự do của quả cầu nhỏ. Cho R = 80cm.

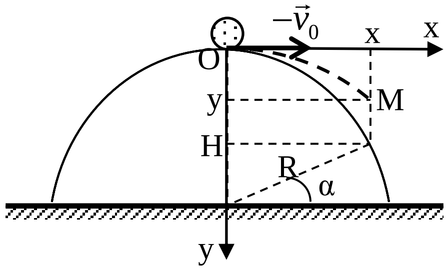
Giải

- Chọn hệ quy chiếu gắn với bán cầu: Gốc tọa độ O là đỉnh của bán cầu, trục Ox nằm ngang, trục Oy thẳng đứng, hướng xuống (hình 12)

Trong hệ quy chiếu này, vận tốc ban đầu của quả cầu nhỏ là $v_{10} = v_0$

- Các phương trình chuyển động của quả cầu nhỏ

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$



Hình 12

- Phương trình quỹ đạo $y = \dfrac{g}{2v_0^2} x^2$

- Quỹ đạo của quả cầu trong hệ quy chiếu gắn với bán cầu là một parabol.

- Để quả cầu nhỏ rơi tự do thì parabol này phải không cắt mặt bán cầu.

Xét một điểm M trên parabol, ta phải có $y_M \le OH$ với $OH = R - \sqrt{R^2 - x_M^2}$

$$\Rightarrow \frac{g}{2v_0^2} x_M^2 \le R - \sqrt{R^2 - x_M^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{R^2 - x_M^2} \le R - \frac{g}{2v_0^2} x_M^2$$

$$\Rightarrow R^2 - x_M^2 \le R^2 - 2R\frac{g}{2v_0^2} x_M^2 + \frac{g^2}{4v_0^4} x_M^4 \Rightarrow \frac{g^2}{4v_0^2} x_M^2 \ge \frac{Rg}{v_0^2} - 1$$

- Bất đẳng thức trên thỏa mãn với mọi giá trị của x khi

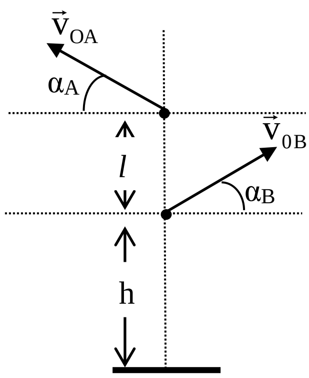
$$\frac{Rg}{v_0^2} - 1 \le 0 \Rightarrow v_0 \ge \sqrt{Rg}$$

Vậy vận tốc nhỏ nhất của bán cầu để nó không cản trở sự rơi tự do của quả cầu nhỏ là:

$$v_{0\min} = \sqrt{Rg} = \sqrt{0{,}8.10} = 2\sqrt{2}\left(m/s^2\right)$$

Bài 13:

Hai vật nhỏ A và B cùng nằm trên một đường thẳng đứng nhưng có độ cao chênh lệch nhau *l* = 2m (hình 13). Ném đồng thời hai vật lên cao theo phương hợp với phương nằm ngang góc $\alpha_A = 30^0$ và



Hình 13

$\alpha_B = 45^0$. Hai vật chuyển động ngược chiều và có vận tốc ban đầu $v_{0A} = 4m/s$; $v_{0B} = 5m/s$. Bỏ qua sức cản của không khí và coi độ cao ban đầu đủ lớn, lấy g = 10m/s^2. Tính khoảng cách giữa hai vật khi vận tốc toàn phần của chúng vuông góc với nhau.

Giải

Sau khi được ném, chuyển động của hai vật là chuyển động của vật được ném xiên. Trong chuyển động này vật tham gia đồng thời hai chuyển động là chuyển động thẳng đều theo phương nằm ngang và chuyển động với gia tốc g theo phương thẳng đứng. Chọn hệ quy chiếu gồm hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ; chọn gốc thời gian là thời điểm khi ném vật.

- Khảo sát chuyển động của các vật theo hai phương Ox và Oy:

Vật A: $\begin{cases} v_{Ax} = v_{0A}\cos\alpha_{0A} \\ v_{Ay} = v_{0A}\sin\alpha_{0A} - gt \end{cases}$ Vật B: $\begin{cases} v_{Bx} = v_{0B}\cos\alpha_{0B} \\ v_{By} = v_{0B}\sin\alpha_{0B} - gt \end{cases}$

- Gọi α_A và α_B lần lượt là góc hợp bởi véctơ vận tốc toàn phần của vật A và vật B so với phương nằm ngang.

Ta có: $\begin{cases} \tan\alpha_A = \dfrac{v_{Ay}}{v_{Ax}} = \dfrac{v_{0A}\sin\alpha_{0A} - gt}{v_{0A}\cos\alpha_{0A}} \\ \tan\alpha_B = \dfrac{v_{By}}{v_{Bx}} = \dfrac{v_{0B}\sin\alpha_{0B} - gt}{v_{0B}\cos\alpha_{0B}} \end{cases}$

Điều kiện để vận tốc toàn phần của hai vật vuông góc với nhau là: $\alpha + \beta = 90^0$

Khi đó ta có: $\tan\alpha_A \tan\alpha_B = 1 \Leftrightarrow \dfrac{v_{0A}\sin\alpha_{0A} - gt}{v_{0A}\cos\alpha_{0A}} \cdot \dfrac{v_{0B}\sin\alpha_{0B} - gt}{v_{0B}\cos\alpha_{0B}} = 1$

$$\Leftrightarrow g^2t^2 - (v_{0A}\sin\alpha_{0A} + v_{0B}\sin\alpha_{0B})gt - v_{0A}v_{0B}\cos(\alpha_{0A} + \alpha_{0B}) = 0$$

Thay số ta thu được nghiệm của phương trình trên là: $\left[\begin{array}{l} t = 0,2569s \\ t = -0,2015s < 0 \text{ (loai)} \end{array}\right.$

- Trong khoảng thời gian từ khi ném hai vật tới khi véctơ vận tốc toàn phần của hai vật vuông góc với nhau thì khoảng cách giữa hai vật theo phương Ox và Oy là:

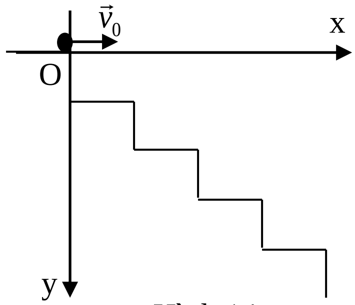
Phương Ox: $x_{AB} = (v_{Ax} + v_{Bx})t = 1,7982m$

Phương Oy: $y_{AB} = \left| l + (v_{By} - v_{Ay})t \right| = 2,0183m$

Vậy khoảng cách giữa hai vật tại thời điểm đó là: $r = \sqrt{x_{AB}^2 + y_{AB}^2} = 2,7032m$

Bài 14:

Một hòn bi rất nhỏ lăn ra khỏi cầu thang theo phương ngang với vận tốc v_0 = 4m/s. Mỗi bậc thang cao h = 20cm và rộng d = 30cm. Hỏi hòn bi sẽ rơi xuống bậc nào đầu tiên? Coi đầu cầu thang là bậc thứ 0, Lấy g = $10\,m/s^2$. Bỏ qua lực cản của không khí.



Hình 14

Giải

Chọn hệ trục toạ độ như hình 14.

- Phương trình đường thẳng mép cầu thang:

$$y = ax = \frac{h}{d}x = \frac{2}{3}x$$

- Phương trình chuyển động của bi:

$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

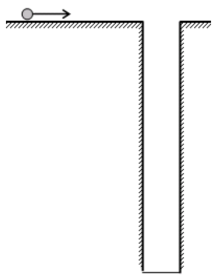
$$\frac{2}{3}x = \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

$$x = x = \sqrt{\frac{4v_0^2}{3g}} \approx 2{,}13\text{m} \Rightarrow n = \frac{2{,}13}{0{,}3} = 7{,}1$$

Vậy bậc thang mà bi rơi là bậc thứ 8.

Bài 15:

Một viên bi nhỏ chuyển động với vận tốc v = 10m/s trong mặt phẳng nằm ngang lại gần một chiếc hố bằng kim loại. Hố có hai thành thẳng đứng song song với nhau, cách nhau một khoảng là d = 5cm (hình 15). Vận tốc v của bi vuông góc với thành hố. Độ sâu của hố là H = 1m, bi va chạm hoàn toàn đàn hồi và xảy ra tức thì với thành hố.



Hình 15

a) Tính số lần bi va chạm với thành hố.

b) Tính tổng chiều dài quỹ đạo của viên bi từ thời điểm ban đầu đến lúc chạm đáy hố.

<u>Giải</u>

a)

- Thời gian bi rơi đến đáy hố: $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

- Thời gian giữa hai lần va chạm: $t_2 = \frac{d}{v}$, do vận tốc theo phương ngang không đổi nên t_2 không đổi. Do đó số lần va chạm: $n = \frac{t_1}{t_2} = \frac{v}{d}\sqrt{\frac{2H}{g}}$

b) Quá trình va chạm diễn ra nhanh coi như không mất thời gian va chạm, mặt khác do va chạm hoàn toàn đàn hồi nên hướng của vận tốc trước và sau va chạm cùng hợp với phương ngang góc giống nhau. Như vậy va chạm làm cho quỹ đạo parabol của viên bi cắt thành những đoạn nhỏ và đảo chiều. Tuy nhiên khi đảo chiều và ghép lại sẽ có được parabol như không va chạm.

Từ đó chiều dài quỹ đạo được xác định: $S = \int_0^{t_1} \sqrt{v^2 + (gt)^2}\,dt$

Bài 16:

Để tưới đều một sân cỏ hình tròn bán kính R, người ta đặt tại điểm giữa của sân một vòi phun hoa sen hình cầu bán kính r (r << R). Số lỗ N trên mặt cầu là rất lớn và có cùng kích thước như nhau. Xác định mật độ số lỗ của bầu phụ thuộc vào góc φ được tính từ trục thẳng đứng của vòi phun để vòi phun có thể phun đều nước trên toàn sân. Biết mặt cầu của bầu vòi phun nằm ngang trên mặt đất, góc mở $2\varphi_{max} < \frac{\pi}{2}$. Bỏ qua sức cản không khí.

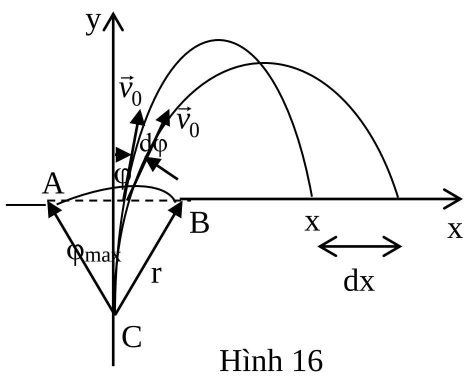
<u>Giải</u>

Gọi ρ, ρ_o là mật độ lỗ trên mặt cầu (ứng với góc lệch φ) và mật độ các điểm trên mặt sân được tới nước.

Ta có: $\rho = \frac{n}{ds}$; $\rho_0 = \frac{N}{\pi R^2}$ (n là số lỗ trên diện tích nhỏ ds trên mặt bầu phun)

$$n = \rho_0 dS = \rho ds$$

Xét 1 phần tử nhỏ của 1 tia nước, có vận tốc trước khi rời bầu phun là v_0 hợp với trục thẳng đứng 0y góc φ (hình 16).



Hình 16

- Phương trình chuyển động :

$$\begin{cases} x = v_0 \sin\varphi . t \\ y = v_0 \cos\varphi . t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

- Vị trí chạm sân: y = 0

$$\Rightarrow t = \frac{2v_0 \cos\varphi}{g} \Rightarrow x = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g} \quad (1)$$

- Để tưới hết toàn bộ sân cỏ ta có:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi_{max}}{g} \Rightarrow \frac{v_0^2}{g} = \frac{R}{\sin 2\varphi_{max}} \qquad (2)$$

+ Theo (1) ta có:

$$S = \pi x^2 \Rightarrow dS = 2\pi x dx = 2\pi \left(\frac{v_0^2}{g} \right)^2 \sin 4\varphi d\varphi \qquad (3)$$

$$\Rightarrow n = \rho_0 dS = 2\pi\rho_0 \frac{R^2}{\sin^2 2\varphi_{max}} \sin 4\varphi d\varphi \qquad (4)$$

+ Phần diện tích ds trên bầu phun mà ta xét là:

$$ds = 2\pi r^2 \sin\varphi d\varphi \qquad (5)$$

+ Từ (4) (5) ta có:

$$\rho = \frac{n}{ds} = 2\pi\rho_0 \frac{R^2}{\sin^2 2\varphi_{max}} \sin 4\varphi d\varphi . \frac{1}{2\pi r^2 \sin\varphi d\varphi}$$

$$= \frac{N}{\pi r^2} . \frac{\sin 4\varphi}{\sin^2 2\varphi_{max} . \sin\varphi}$$

Suy ra: Mật độ lỗ của bầu phụ thuộc vào góc ϕ theo biểu thức:

$$\rho = \frac{4N}{\pi r^2} . \frac{\cos\varphi . \cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi_{max}}$$

Bài 17:

Người ta ném một vật từ mặt đất lên với tốc độ đầu v_0 theo phương hợp với phương ngang một góc α. Gia tốc trọng trường là g, bỏ qua sức cản không khí. Chọn hệ quy chiếu có gốc tọa độ O tại vị trí ném, trục Oy hướng thẳng đứng lên trên, trục Ox hướng theo phương ngang sao cho vật chuyển động trong mặt phẳng Oxy.

1. Với giá trị v_0 xác định, vật chỉ có thể đi tới các vị trí nằm bên trong một đường giới hạn. Xác định phương trình đường giới hạn này.

2. Khi rơi trở lại mặt đất, vật không bị nảy lên khỏi mặt đất ($v_y = 0$). Hệ số ma sát giữa vật và mặt đất là μ .

a) Tìm tốc độ của vật ngay sau khi chạm đất. Coi lực va chạm lớn hơn rất nhiều so với trọng lực.

b) Với góc α bằng bao nhiêu thì vị trí vật dừng lại nằm xa O nhất.

<u>Giải</u>

1.

- Phương trình chuyển động của vật là

Theo phương Ox: $x = v_0 \cos\alpha . t$

Theo phương Oy: $y = v_0 \sin\alpha . t - \frac{1}{2} g t^2$

Phương trình qũy đạo của vật:

$$y = x . \tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = -\frac{gx^2}{2v_0^2}\tan^2\alpha - x . \tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Vật không thể đến được các vị trí không cho ta nghiệm $\tan\alpha$, tức là:

$$\Delta = x^2 - 4\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) < 0 \Rightarrow y > \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Vậy đường giới hạn cần tìm là Parabol: $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$

2a)

Khi rơi trở lại mặt đất, vật có tốc độ v_0 hợp với phương ngang một góc α như lúc ném.

Sử dụng định luật biến thiên động lượng:

Theo phương Ox: $F_{ms}.\Delta t = m\left(v_0\cos\alpha - v\right)$

Theo phương Oy: $N.\Delta t = mv_0\sin\alpha$

Với $F_{ms} = \mu N$

Suy ra: $\begin{cases} v = v_0\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right) & \text{khi } \cot\alpha \ge \mu \\ v = 0 & \text{khi } \cot\alpha < \mu \end{cases}$

2b)

Tầm xa: $L = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$

Sau khi vật chạm đất, vật đi được thêm một đoạn là:

$$S = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{v_0^2}{2\mu g}\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right)^2 \quad \left(\mu \le \cot\alpha\right)$$

Vị trí vật dừng lại cách nơi ném là:

$$d = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} + \frac{v_0^2}{2\mu g}\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right)^2$$

Lấy đạo hàm theo α rồi đặt bằng 0, ta có:

$$d'_{(\alpha)} = \frac{2v_0^2\cos 2\alpha}{g} - \frac{v_0^2}{\mu g}\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right)\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)$$

$$= \frac{2v_0^2}{g}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) - \frac{v_0^2}{\mu g}\left(\sin\alpha\cos\alpha + \mu\cos^2\alpha - \mu\sin^2\alpha - \mu^2\sin\alpha\cos\alpha\right)$$

$$= \frac{v_0^2}{g}\left[\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) - \frac{1-\mu^2}{\mu}\sin\alpha\cos\alpha\right]$$

$$= \frac{v_0^2}{g}\left[\cos 2\alpha - \frac{1-\mu^2}{2\mu}\sin 2\alpha\right]$$

$$d'_{(\alpha)} = 0 \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2\mu}{1-\mu^2} \Rightarrow \tan\alpha = \mu$$

Bài 18:

Một viên đá được ném theo phương tạo với phương ngang một góc α với vận tốc ban đầu v_0. Nếu một con muỗi bay theo quĩ đạo của viên đá với vận tốc không đổi v_0 thì gia tốc của muỗi bằng bao nhiêu ở điểm có độ cao bằng một nửa độ cao cực đại của viên đá? Bỏ qua lực cản không khí khi viên đá chuyển động.

<u>**Giải**</u>

Độ cao cực đại của viên đá là: $H = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$

Tốc độ v_1của vật ở độ cao $h = \frac{1}{2}H$ thoả mãn:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh \Rightarrow v_1 = v_0\sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{2}}$$

Tại thời điểm vật ở độ cao h thì vectơ vận tốc tạo với phương ngang góc ϕ thoả mãn:

$$\cos\phi = \frac{v_0\cos\alpha}{v_1} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{2}}}$$

Thành phần gia tốc theo phương bán kính quĩ đạo tại đó gọi là $\vec{a}_n$ thì vuông góc với $\vec{v}$ và do đó bằng $g\cos\phi$

Vậy bán kính cong tại đó là: $R = \frac{v_1^2}{g.\cos\phi}$

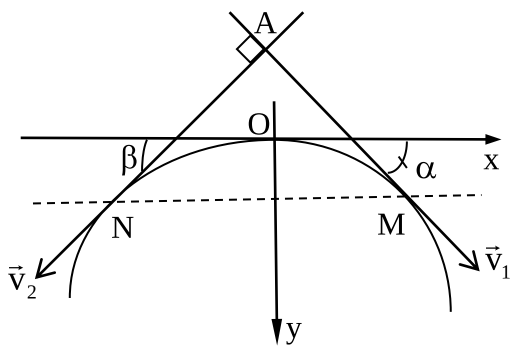
Gia tốc của con muỗi ở vị trí đó là: $a = \frac{v_0^2}{R} = \frac{g.\cos\alpha}{\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{2}\right)^{3/2}}$

Bài 19:

Hai hạt chuyển động trong trọng trường đều với gia tốc g. Ban đầu hai hạt ở cùng một điểm và có các vận tốc v_1 = 3,0 m/s, v_2=4,0 m/s đều nằm ngang và theo hai hướng ngược nhau. Hãy xác định khoảng cách giữa hai hạt tại thời điểm mà các véctơ vận tốc của chúng vuông góc nhau.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy (Hình 17):Gốc O trùng với điểm xuất phát của hai hạt, trục Oy hướng xuống.



Hình 17

Tọa độ của hạt 1:

$$x_1 = v_1.t;\ y_1 = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1)$$

Tọa độ của hạt 2:

$$x_2 = v_2.t;\ y_2 = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

Gọi t_v là lúc $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, lúc đó hạt 1 ở M, hạt 2 ở N suy ra các tiếp tuyến AM ở M và AN ở N cũng vuông góc với nhau.

Độ dốc $\tan\alpha;\tan\beta$ của các tiếp tuyến AM và AN là:

$$\tan\alpha = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_1/dt}{dx_1/dt} = \frac{gt}{v_1} \qquad (3)$$

$$\tan\beta = \frac{dy_2}{dx_2} = \frac{dy_2/dt}{dx_2/dt} = \frac{gt}{-v_2} \qquad (4)$$

Để $AM \perp AN$ thì $\tan\alpha.\tan\beta = -1$ (5)

Thay (3) và (4) vào (5) ta được:

$$\frac{gt}{v_1}.\frac{gt}{-v_2} = -1 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g} \qquad (6)$$

Khoảng cách MN là: $MN = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} = \left|x_2 - x_1\right|$ (vì $y_2 = y_1$)

Vậy: $MN = \left|-v_2 t - v_1 t\right| = \dfrac{\left(v_1 + v_2\right)}{g}\sqrt{v_1 v_2} = 2,47\,m$

Bài 20:

Trong trò chơi bóng rổ, để bóng rơi vào rổ, một người ném bóng dưới góc $\alpha_1 = 30^0$ và với vận tốc $v_1 = v$, hoặc ném bóng với góc $\alpha_2 = 60^0$ và với vận tốc $v_2 = \dfrac{1}{2}v$.

a) Hỏi rổ ở độ cao bao nhiêu so với điểm ném?
b) Đoạn thẳng nối điểm ném với rổ nghiêng so với phương ngang một góc bằng bao nhiêu?

<u>**Giải**</u>

Chọn hệ trục tọa độ Oxy: O trùng với vị trí ném; Oy hướng lên.
Phương trình chuyển động của quả bóng với vận tốc ban đầu v_0 và dưới góc ném α là:

$$y = \tan\alpha.x - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

Tại vị trí của rổ thì: $x = l$; $y = h$

Suy ra: $h = \tan\alpha.l - \dfrac{gl^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$

- Với $\alpha = \alpha_1$; $v_0 = v_1$ thì ta có:

$$h = \tan\alpha_1.l - \frac{gl^2}{2v_0^2\cos^2\alpha_1} \qquad (1)$$

- Với $\alpha = \alpha_2$; $v_0 = v_2$ thì ta có:

$$h = \tan\alpha_2.l - \frac{gl^2}{2v_0^2\cos^2\alpha_2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\left(\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2\right)l - \dfrac{gl^2}{2}\left(\dfrac{gl^2}{v_1^2\cos^2\alpha_1} - \dfrac{gl^2}{v_2^2\cos^2\alpha_2}\right) = 0$

Suy ra: $l = \dfrac{2\left(\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2\right)}{g\left(\dfrac{1}{v_1^2\cos^2\alpha_1} - \dfrac{1}{v_2^2\cos^2\alpha_2}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}v^2}{11g}$

Khi đó: $h = \dfrac{9v^2}{121g}$; $\tan\varphi = \dfrac{h}{l} = \dfrac{3\sqrt{3}}{11} \Rightarrow \varphi \approx 25,3^0$

Bài 21:

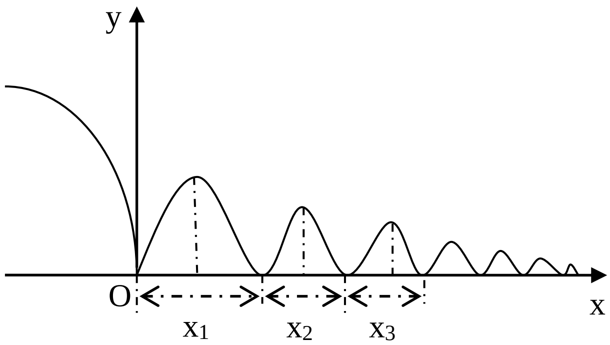
Một quả bóng nhỏ khối lượng m được ném theo phương ngang từ độ cao h so với mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = \sqrt{2gh}$, bỏ qua sức cản của không khí. Sau mỗi lần va chạm với mặt đất , quả bóng nảy trở lại với vận tốc theo phương ngang không đổi, còn vận tốc theo phương thẳng đứng giảm theo tỷ lệ như nhau. Tính từ lần nảy lên đầu tiên, diện tích của hình giới hạn bởi quỹ đạo quả bóng trong tất cả các lần nảy sau đó với mặt đất có giá trị là $\frac{8h^2}{21}$. Hãy tìm tổng xung lượng quả bóng trao đổi với mặt đất trong tất cả các lần va chạm.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình 18.

- Trong quá trình chuyển động vận tốc của quả bóng theo phương Ox có giá trị không đổi bằng $v_0 = \sqrt{2gh}$. Ngay trước khi va chạm với mặt đất vận tốc theo phương thẳng đứng của quả bóng là $v_0 = \sqrt{2gh}$

- Gọi λ hệ số hồi phục vận tốc (là tỉ số giữa vận tốc quả bóng sau và trước va chạm) với $0 < \lambda < 1$.



Hình 18

Vận tốc ngay sau khi va chạm lần đầu là:

$$v_1 = \lambda\sqrt{2gh}$$

Độ cao quỹ đạo sau lần va chạm lần một là: $h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \lambda^2 h$

Thời gian chuyển động của quả bóng cho đến khi nó va chạm tiếp lần hai là:

$$t_1 = 2\frac{v_1}{g} = 2\lambda\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Quãng đường mà quả bóng dịch chuyển theo phương ngang cho đến khi nó va chạm tiếp lần hai là: $x_1 = \sqrt{2gh}.t_1 = 4\lambda h$

Phương trình quỹ đạo parabol là: $y = -\frac{1}{4h}x^2 + \lambda x$

Parabol này cắt trục ox tại hoành độ x = 0 và $x = 4\lambda h$

Vậy diện tích quỹ đạo parabol với trục Ox là:

$$S = \int_0^{4\lambda h} ydx = \int_0^{4\lambda h}(-\frac{1}{4h}x^2 + \lambda x)dx = \frac{8}{3}\lambda^3 h^2 \Rightarrow S_1 = \frac{2}{3}h_1 x_1 = \frac{8}{3}\lambda^3 h^2$$

Diện tích chắn bởi quỹ đạo quả bóng với trục Ox ở các quỹ đạo n và n + 1 là:

$$S_{n+1} = \lambda^3 S_n$$

Tổng diện tích chắn bởi quỹ đạo:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}S_n=S_1(1+\lambda^3+\lambda^6+...)\approx\frac{S_1}{1-\lambda^3}$$

Theo giả thiết $S=\frac{8}{21}h^2$ vậy $\lambda=\frac{1}{2}$

- Gọi I_n là xung lượng trao đổi giữa quả bóng và sàn nhà ở lần va chạm thứ n. Áp dụng định luật biến thiên động lượng ta có:

$$I_n=mv_n-m(-v_{n-1})=m(1+\lambda)v_{n-1}$$

Tổng động lượng trao đổi của quả bóng và sàn trong tất cả các lần va chạm là:

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}mv_0(1+\lambda+\lambda^2+...)\approx mv_0\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$$

Với $\lambda=\frac{1}{2}$ thì ta có $I=3mv_0=3m\sqrt{2gh}$

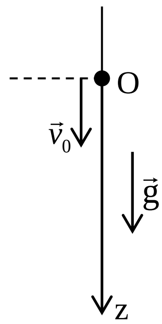
Bài 22:

Một quả cầu khối lượng m được ném thẳng đứng xuống phía dưới với vận tốc ban đầu v_0. Sau một thời gian đủ dài, quả cầu rơi xuống với vận tốc giới hạn v_{gh}. Lực ma sát của không khí là $F_c=kv^2$. Cho gia tốc rơi tự do là g.Xác định vận tốc v của quả cầu theo thời gian t.

<u>**Giải**</u>

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình 19.

Phương trình chuyển động của vật:



Hình 19

$$mg-kv^2=m\frac{dv}{dt}$$

Ta có: $mg=kv_{gh}^2\Rightarrow k=\frac{mg}{v_{gh}^2}$

Suy ra: $\frac{dv}{dt}=g-\frac{gv^2}{v_{gh}^2}$

$$\Rightarrow\frac{dv}{v_{gh}^2-v^2}=\frac{g}{v_{gh}^2}dt\Leftrightarrow\left(\frac{1}{v_{gh}-v}+\frac{1}{v_{gh}+v}\right)dv=\frac{2g}{v_{gh}}dt$$

Tích phân 2 vế: $\int_{v_0}^{v}\left(\frac{1}{v_{gh}-v}+\frac{1}{v_{gh}+v}\right)dv=\frac{2g}{v_{gh}}\int_0^t dt$

$$\Rightarrow\ln\left|\frac{v_{gh}-v}{v_{gh}-v_0}\right|+\ln\left|\frac{v_{gh}+v}{v_{gh}+v_0}\right|=\frac{2g}{v_{gh}}t\Leftrightarrow\ln\left|\frac{v_{gh}^2-v^2}{v_{gh}^2-v_0^2}\right|=\frac{2g}{v_{gh}}t$$

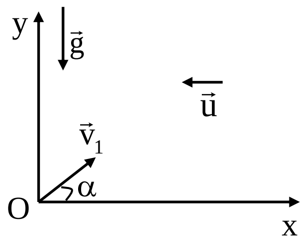
$$\Rightarrow v^2=v_{gh}^2-\left(v_{gh}^2-v_0^2\right)e^{\frac{2g}{v_{gh}}t}$$

Bài 23:

Một cầu thủ đá vào quả bóng có khối lượng m, truyền cho nó một vận tốc ban đầu bằng v_1 và có hướng lập với mặt phẳng nằm ngang một góc α ngược chiều gió thổi dọc theo mặt sân. Sau khi vẽ lên trong không trung một quỹ đạo nào đó, quả bóng quay trở lại vị trí xuất phát với vận tốc v_2. Hỏi quả bóng rơi xuống đất dưới một góc β bằng bao nhiêu? Vận tốc u của gió bằng bao nhiêu? Thời gian bay τ của quả bóng bằng bao nhiêu? Xem lực cản của không khí tỷ lệ với vận tốc của quả bóng đối với không khí là $\vec{F}_c = -k\vec{v}_{td}$, trong đó hệ số tỷ lệ k coi như đã biết.

<u>Giải</u>

Chọn hệ trục xoy như hình 20.



Hình 20

- Xét chuyển động theo trục Ox ta có:

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x = -\frac{k\left(u+v_x\right)}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{dv_x}{u+v_x} = -\frac{k}{m}dt$$

Tích phân hai vế: $\int_{v_1\cos\alpha}^{v_x} \frac{dv_x}{u+v_x} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$

Ta được: $\frac{u+v_x}{u+v_1\cos\alpha} = e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow v_x = \left(u+v_1\cos\alpha\right)e^{-\frac{k}{m}t} - u$ (1)

Tọa độ của vật theo phương Ox:

$$x = \int_0^\tau v_x dt \Rightarrow x_\tau = \frac{m}{k}v_1\cos\alpha\left(1-e^{-\frac{k\tau}{m}}\right) - u\tau - \frac{um}{k}\left(e^{-\frac{k\tau}{m}}-1\right)$$

Theo bài ra $x_\tau = 0 \Rightarrow v_1\cos\alpha - \frac{ku\tau}{m} = \left(v_1\cos\alpha + u\right)e^{-\frac{k\tau}{m}} - u$ (2)

- Xét theo trục Oy tương tự ta có:

$$\frac{dv_y}{dt} = a_y = -g - \frac{k}{m}v_y \Rightarrow v_y = \left(v_1\sin\alpha + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k} \qquad (3)$$

Tọa độ của vật theo phương Oy:

$$y = \int_0^\tau v_y dt \Rightarrow y = \frac{mv_1}{k}\sin\alpha\left(1-e^{-\frac{k\tau}{m}}\right) - \frac{mg}{k}\tau - \frac{m^2g}{k^2}\left(1^{-\frac{k\tau}{m}}-1\right) = 0$$

$$\Rightarrow v_1\sin\alpha - g\tau = \left(v_1\sin\alpha + \frac{mg}{k}\right).e^{-\frac{k\tau}{m}} - \frac{mg}{k} \qquad (4)$$

Từ (2) và (4) $\Rightarrow \frac{v_1\cos\alpha + u - \frac{ku\tau}{m}}{v_1\cos\alpha + u} = \frac{v_1\sin\alpha + \frac{mg}{k} - g\tau}{v_1\sin\alpha + \frac{mg}{k}}$

$$\Rightarrow \frac{ku\tau}{m\left(v_1\cos\alpha + u\right)} = \frac{g\tau}{v_1\sin\alpha + \frac{mg}{k}} \Rightarrow u = \frac{mg}{k\tan\alpha}$$

+ Từ (1) và (2) ta có: $v_1\cos\alpha - v_2\cos\beta = \frac{ku\tau}{m} = \frac{g\tau}{\tan\alpha}$

$\Rightarrow v_1\sin\alpha - v_2\cos\beta.\tan\alpha = g\tau$ (5)

+ Từ (2) và (4) ta có: $v_1\sin\alpha - v_2\cos\beta = g\tau$ (6)

+ Đối chiếu (5) và (6) ta có: $\sin\beta = \cos\beta.\tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \tan\beta \Rightarrow \alpha = \beta$

Khi đó $\tau = \frac{\left(v_1 - v_2\right)\sin\alpha}{g}$.

Vậy $\beta = \alpha$; $u = \frac{mg}{k\tan\alpha}$; $\tau = \frac{\left(v_1 - v_2\right)\sin\alpha}{g}$

Bài 24:

Một vật được ném lên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$ theo phương hợp với mặt phẳng nằm ngang một góc α. Ngoài tác dụng của trọng lực, vật còn chịu tác dụng của lực cản không khí $\vec{F} = -k\vec{v}$ với k là một hằng số dương.

a) Viết phương trình chuyển động của vật.

b) Tìm thời gian để vật bay đến điểm cao nhất và độ cao cực đại mà vật đạt được trong quá trình chuyển động.

c) Viết phương trình quỹ đạo của vật.

<u>Giải</u>

Phương trình định luật II Newton cho vật: $m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}$.

Chọn trục toạ độ Oxyz sao cho $\vec{v}$ nằm trong mặt phẳng Oxz.

Chiếu phương trình trên các trục tọa độ, ta có:

Phương Ox: $mx'' = -kx'$ (1)

Phương Oy: $my'' = -ky'$ (2)

Phương Oz: $mz'' = -kz' - mg$ (3)

Đặt $\tau = \frac{m}{k}$

Từ phương trình (1) suy ra: $\frac{dv_x}{dt} + \frac{k}{m}v_x = 0 \Rightarrow v_x = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

Từ điều kiện ban đầu $t = 0$; $x = 0$; $v_{0x} = v_0\cos\alpha \Rightarrow v_x = v_0\cos\alpha.e^{-\frac{t}{\tau}}$

Mặt khác: $x = \int_0^t v_x dt = \tau v_0 \cos\alpha\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ (4)

Từ phương trình (2) suy ra: $\dfrac{dv_y}{dt} + \dfrac{k}{m}v_y = 0 \Rightarrow v_y = Be^{-\frac{t}{\tau}}$

Điều kiện ban đầu $t = 0$; $y = 0$; $v_{0y} = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow v_y = 0$

Từ phương trình (3) suy ra:

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{k}{m}v_z = -g \Rightarrow \frac{d\left(v_z + \frac{mg}{k}\right)}{dt} + \frac{k}{m}\left(v_z + \frac{mg}{k}\right) = 0$$

Ta được: $v_z = C.e^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau$

Khi t = 0 thì vận tốc: $v_{0z} = v_0 \sin\alpha = C - g\tau \Rightarrow v_z = \left(v_0 \sin\alpha + g\tau\right)e^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau$

Ta có: $z = \int_0^t v_z dt = \tau\left(v_0 \sin\alpha + g\tau\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - g\tau t$ (5)

Từ phương trình (4) suy ra $t = -\tau \ln\left(1 - \dfrac{x}{\tau v_0 \cos\alpha}\right)$ Thay kết quả này vào (5), ta thu được phương trình quỹ đạo:

$$z = \frac{v_0 \sin\alpha + g\tau}{v_0 \cos\alpha}x + g\tau^2 \ln\left(1 - \frac{x}{\tau v_0 \cos\alpha}\right) \quad (6)$$

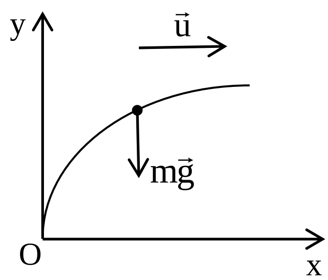
Bằng cách khảo sát hàm số, ta tìm được:

$$z_{max} = v_0\tau \sin\alpha + g\tau^2 \ln\left(\frac{g\tau}{v_0 \sin\alpha + g\tau}\right) \text{ tại } x_0 = \frac{v_0^2 \tau \sin\alpha \cos\alpha}{v_0 \sin\alpha + g\tau}$$

Thời gian để vật đạt đến điểm cao nhất là: $t_0 = \tau \ln\left(1 + \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g\tau}\right)$

Bài 25:

Ném thẳng đứng một vật có khối lượng m từ mặt đất. Gió thổi dọc theo mặt đất với vận tốc u. Lực cản không khí tỷ lệ với vận tốc tương đối giữa vật và gió. Sau thời gian $\tau(s)$ vật rơi xuống đất cách điểm ném một khoảng S, đồng thời thành phần thẳng đứng của véctơ vận tốc $\vec{v}$ có độ lớn nhỏ hơn lúc ném một lượng Δv. Tính công của lực cản trong thời gian bay ?



Hình 21

<u>Giải</u>

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình 21, gốc Ogắn với đất.

Định luật II Niutơn cho vật:

$$m\vec{g} - k\left(\vec{v} - \vec{u}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

- Chiếu theo phương Ox:

$$-k\left(v_x - u\right) = m\frac{dv_x}{dt} \Rightarrow mdv_x = -k\left(dx - udt\right)$$

Tích phân hai vế ta được: $v_x = \frac{k}{m}\left(u\tau - S\right)$

- Chiếu theo phương Oy: $-mg - kv_y = m\frac{dv_y}{dt} \Rightarrow mdv_y = -mgdt - kdy$

Tích phân hai vế ta được: $v_y = \frac{\Delta v + g\tau}{2}$

Công của lực cản: $A = W_d^{'} - W_d = \frac{1}{2}m\left[\frac{k^2}{m^2}\left(u\tau - S\right)^2 - g\tau.\Delta v\right]$

Bài 26:

Một quả bóng khối lượng m được ném thẳng đứng lên trên với vận tốc v_0 từ độ cao h(đủ lớn) so với mặt đất, ở nơi có gia tốc trọng trường g. Trong quá trình chuyển động thì lực cản tác dụng lên quả bóng tỉ lệ thuận với vận tốc của nó. Biết vận tốc quả bóng ngay trước khi chạm đất là v_2. Bỏ qua lực đẩy Acsimet của không khí.Tìm vận tốc v_1 củaquả bóng ởthời điểm động năng của nó biến thiên nhanh nhất. Cho gia tốc trọng trường là g không đổi theo độ cao.

<u>Giải</u>

Quả bóng chịu hai lực tác dụng: $\vec{F}_C = -k\vec{v}$ và $\vec{P} = m\vec{g}$

Công suất của ngoại lực bằng tốc độ biến thiên động năng.

Công suất ngoại lực:

$$N = \left(m\vec{g} + \vec{F}_C\right)\vec{v} = mgv - kv^2 = \frac{\left(mg\right)^2}{4k} - k\left(v - \frac{mg}{2k}\right)^2 \qquad (1)$$

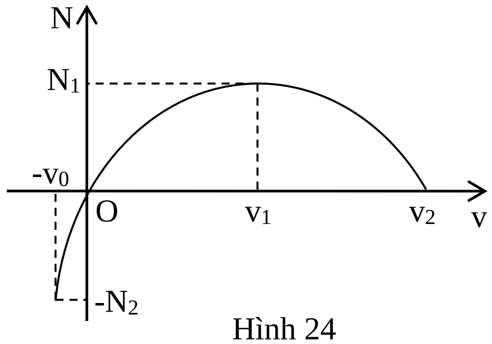
Trong đó v là hình chiếu quả bóng lên trục thẳng đứng hướng xuống

Khi rơi quả bóng tăng tốc cho đến khi:

$$mg = F_C = kv_2 \Rightarrow k = \frac{mg}{v_2}$$

Từ biểu thức (1) ta thấy công suất N phụ thuộc vào vận tốc v. Ta có đồ thị (hình 24).

Từ đồ thị ta thấy tốc độ biến thiên động năng lớn nhất khi $v = v_1$ hoặc $v = -v_0$.



Hình 24

Trường hợp 1:

$$N_{max} = N_1 = \frac{(mg)^2}{4k} \text{ khi } v = v_1 = \frac{mg}{2k}$$

Trường hợp 2:

$$N_{max} = -N_2 = -\frac{(mg)^2}{4k} + k\left(v_0 + \frac{mg}{2k}\right)^2$$

So sánh N_1 và $-N_2$:

- Nếu $N_1 > -N_2 \Leftrightarrow \frac{(mg)^2}{4k} > -\frac{(mg)^2}{4k} + k\left(v_0 + \frac{mg}{2k}\right)^2$

$$\Rightarrow \ v_0 < \frac{mg\left(\sqrt{2}-1\right)}{2k} = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} v_2$$

thì tốc độ biến động năng lớn nhất là $N_{max} = N_1 = \frac{(mg)^2}{4k} = \frac{mgv_2}{4}$ khi $v_1 = \frac{mg}{2k} = \frac{v_2}{2}$

- Nếu $N_1 < -N_2 \Leftrightarrow \frac{(mg)^2}{4k} < -\frac{(mg)^2}{4k} + k\left(v_0 + \frac{mg}{2k}\right)^2$

$$\Rightarrow \ v_0 > \frac{mg\left(\sqrt{2}-1\right)}{2k} = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} v_2$$

thì tốc độ biến động năng lớn nhất là:

$$N_{max} = -N_2 = -\frac{(mg)^2}{4k} + k\left(v_0 + \frac{mg}{2k}\right)^2$$

$$= k\left(v_0 + \frac{v_2}{2}\right)^2 - \frac{mgv_2}{4}$$

$$= \frac{mg}{v_2}\left(v_0^2 + v_2^2\right)$$

khi $v_1 = v_0$.

Bài 27:

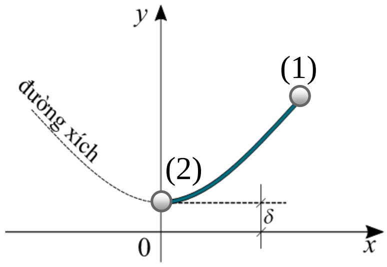
Có hai vật nhỏ giống nhau, có cùng khối lượng m, được nối với nhau bởi một sợi dây không dãn, chiều dài 2ℓ đặt đứng yên trên một mặt phẳng nằm ngang như Hình 1.a. Gia tốc trọng trường là $\vec{g}$.

1. Sợi dây có khối lượng không đáng kể. Đặt hai vật trên mặt nằm ngang sao cho sợi dây căng ngang. Truyền cho vật (1) vận tốc ban đầu theo phương thẳng đứng lên trên. Giả sử trong quá trình hệ chuyển động, dây luôn căng, vật (2) không rời khỏi mặt phẳng nằm ngang. Bỏ qua mọi ma sát. Hãy xác định quỹ đạo của vật (1) cho đến khi nó chạm mặt nằm ngang.

Hình 1.a

2. Xét trường hợp sợi dây đồng nhất với mật độ khối lượng trên mỗi đơn vị chiều dài là ρ. Hệ số ma sát nghỉ giữa vật (2) và mặt nằm ngang là μ.

Cho hai vật cách nhau mộtkhoảng nhỏ hơn ℓ. Nâng rất chậm vật (1) lên theo phương thẳng đứng. Tại thời điểm ngay trước khi vật (2) dịch chuyển, ta thấy tiếp tuyến của sợi dây tại đầu nối vào vật (2) nằm ngang và dây không chạm đất, sợi dây có dạng là một phần của đường cong (đường xích). Trong hệ tọa độ 0*xy* như trên Hình 1.b, phương trình đường xích này có dạng $y = \delta.P(x)$, trong đó δ là hằng số dương và $P(x) = (e^{x/\delta} + e^{-x/\delta})/2$.

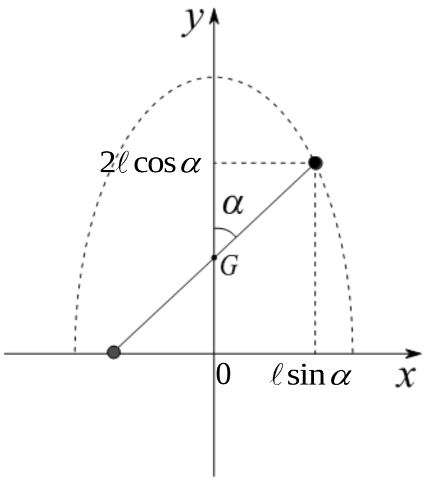


Hình 1.b

a) Tìm phương, chiều và độ lớn của lực căng sợi dây tác dụng lên vật (1) lúc đó.

b) Tìm độ cao h của vật (1) so với mặt nằm ngang khi đó. Biết chiều dài dây tính từ điểm thấp nhất đến điểm có tọa độ *x* là $s = \delta.Q(x)$, với $Q(x) = (e^{x/\delta} - e^{-x/\delta})/2$.

1.



Khối tâm là trung điểm của sợi dây chỉ chuyển động theo phương thẳng đứng do không có ma sát.

Dây luôn căng nên tọa độ của vật trên thỏa mãn: $x = \ell \sin\alpha$

$y = 2\ell\cos\alpha$

Phương trình quỹ đạo của vật là: $\dfrac{x^2}{\ell^2} + \dfrac{y^2}{4\ell^2} = 1$

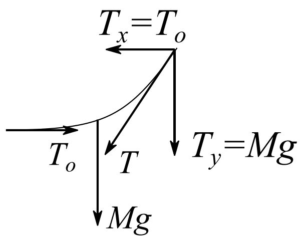
Quỹ đạo là một nửa elip.

2.a. Thành phần nằm ngang của lực căng dây trên toàn bộ sợi dây là không đổi là T_o.

Tại đầu (2) dây nằm ngang, vật bắt đầu chuyển động nên $T_o = \mu mg$.

Tại đầu (1), $T_{1x} = T_o = \mu mg; T_{1y} = Mg = 2\rho\ell g$

$\Rightarrow T = \sqrt{(\mu mg)^2 + 4(\rho\ell g)^2}$; $\tan\alpha = \dfrac{2\rho\ell g}{\mu mg}$



2.b. Xét đoạn dây chiều dài s bất kỳnhư hình; Do $y = \delta\left(\dfrac{e^{x/\delta}+e^{-x/\delta}}{2}\right)$ và $s = \delta\left(\dfrac{e^{x/\delta}-e^{-x/\delta}}{2}\right)$

ta có: $\tan\alpha = \dfrac{M_s g}{T_o} = \dfrac{\rho s g}{T_o} = \dfrac{\rho g \delta\left(\dfrac{e^{x/\delta}-e^{-x/\delta}}{2}\right)}{T_o} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\dfrac{e^{x/\delta}-e^{-x/\delta}}{2}\right)$

$=> T_o = \rho g \delta => T = \sqrt{T_o^2 + (\rho g s)^2} = \sqrt{(\rho g \delta)^2 + (\rho g s)^2} = \sqrt{(\rho g \delta)^2 + \left(\rho g \dfrac{\delta(e^{x/\delta}-e^{-x/\delta})}{2}\right)^2}$

$=> T = \rho g y$

$\rho g \delta = T_o = \mu m g \Rightarrow T = \rho g(h+\delta) = \sqrt{(\mu m g)^2 + 4(\rho l g)^2}$

$=> h = \dfrac{\sqrt{(\mu m)^2 + 4(\rho \ell)^2} - \mu m}{\rho}$

hoặc $h = \dfrac{\sqrt{(\mu m)^2 + 4(\rho \ell)^2}}{\rho} - \delta$

Bài 28:

Một vật được ném lên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$ theo phương hợp với mặt phẳng nằm ngang một góc α. Ngoài tác dụng của trọng lực, vật còn chịu tác dụng của lực cản không khí $\vec{F} = -k\vec{v}$ với k là một hằng số dương. Hãy:

a. Viết phương trình chuyển động của vật.

b. Tìm thời gian để vật bay đến điểm cao nhất và độ cao cực đại mà vật đạt được trong quá trình chuyển động.

c. Viết phương trình quỹ đạo và vẽ dạng quỹ đạo chuyển động của vật.

Bài số 1

Theo định luật II Newton, $m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}$.

Chọn trục toạ độ Oxyz sao cho $\vec{v}$ nằm trong mặt phẳng Oxz. Chiếu phương trình trên các trục tọa độ, ta có:

$mx'' = -kx',$ (1)

$my'' = -ky',$ (2)

$mz'' = -kz' - mg.$ (3)

Đặt $\tau = \dfrac{m}{k}$ và $v_{x_i} = \dfrac{dx_i'}{dt}(x_i = x, y, z).$

Từ phương trình (1) suy ra $\dfrac{dv_x}{dt} + \dfrac{k}{m}v_x = 0 \Rightarrow v_x = A\exp\left\{-\dfrac{t}{\tau}\right\}$

Từ điều kiện ban đầu $t=0, x=0$ và $v_{ox}=v_0\cos\alpha \Rightarrow v_x=v_0\cos\alpha\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}$

Mặt khác $x=\int_0^t v_x dt \Rightarrow x=\tau v_0\cos\alpha\left(1-\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}\right)$. (4)

Từ phương trình (2) suy ra $\frac{dv_y}{dt}+\frac{k}{m}v_y=0 \Rightarrow v_y=B\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}$

Vì khi t = 0, y = 0 nên B = 0 $\Rightarrow v_y=0$

Từ phương trình (3) suy ra

$$\frac{dv_z}{dt}+\frac{k}{m}v_z=-g \Rightarrow \frac{d(v_z-g\frac{m}{k})}{dt}+\frac{k}{m}(v_z-g\frac{m}{k})=0 \Rightarrow v_z=C\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}-g\tau$$

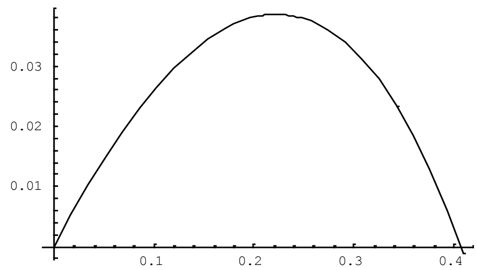
Khi t = 0 thì vận tốc:

$$v_{oz}=v_0\sin\alpha=C-g\tau \Rightarrow C=v_0\sin\alpha+g\tau \Rightarrow v_z=(v_0\sin\alpha+g\tau)\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}-g\tau.$$

Cuối cùng $z=-\tau(v_0\sin\alpha+g\tau)\left(1-\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}\right)-g\tau t$. (5)

Từ phương trình (1) suy ra $t=-\tau\ln\left(1-\frac{x}{\tau v_0\cos\alpha}\right)$. Thay kết quả này vào (5), ta thu được phương trình quỹ đạo:

$$z=\frac{v_0\sin\alpha+g\tau}{v_0\cos\alpha}x+g\tau^2\ln\left(1-\frac{x}{\tau v_0\cos\alpha}\right). \quad (6)$$



Đồ thị mô tả quỹ đạo chuyển động (như hình vẽ)

Bằng cách khảo sát hàm số, ta tìm được $z_{max}=v_0\sin\alpha+g\tau^2\ln\left(\frac{g\tau}{v_0\sin\alpha+g\tau}\right)$ tại $x_0=\frac{v_0^2\tau\sin\alpha\cos\alpha}{v_0\sin\alpha+g\tau}$.

Thời gian để vật đạt đến điểm cao nhất là $t_0=\tau\ln\left(1+\frac{v_0\sin\alpha}{g\tau}\right)$.

Bài 29:

Một khối gỗ nhỏ, đồng chất, có dạng hình hộp chữ nhật được ném từ mặt sàn nằm ngang với vận tốc $\vec{v_0}$ hợp với sàn một góc α. Trong quá trình chuyển động, bề mặt lớn của khối gỗ luôn song song với sàn và khi chạm sàn, khối gỗ không nảy lên. Hệ số ma sát trượt giữa khối gỗ và mặt sàn là μ. Bỏ qua sức cản của không khí. Xác định góc ném α để khối gỗ dừng lại tại vị trí cách điểm ném một khoảng L lớn nhất.

Chuyển động của khối gỗ là chuyển động song phẳng, khối tâm của nó chuyển động ném xiên.

+ Thời gian từ lúc ném đến lúc chạm đất: $t=\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$.

+ Tầm bay xa: $L_1=v_0.\cos\alpha.t=\dfrac{2v_0^2.\sin\alpha.\cos\alpha}{g}$.

Theo định luật bảo toàn cơ năng, ngay trước khi chạm sàn, vận tốc của khối gỗ hướng xuống, hợp với phương ngang góc α và có độ lớn bằng v_0.

Gọi $\vec{v}$ là vận tốc của khối gỗ ngay sau va chạm, ta nhận thấy $\vec{v}$ hướng theo phương ngang (vì khối gỗ không nảy lên).

Do thời gian va chạm là Δt rất nhỏ nên ta viết được:

$$\vec{F}.\Delta t=\Delta\vec{p}\Rightarrow\begin{cases}F_x.\Delta t=\Delta p_x\\F_y.\Delta t=\Delta p_y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\mu N.\Delta t=mv-mv_0.\cos\alpha\quad(1)\\N.\Delta t=0-\left(-mv_0\sin\alpha\right)=mv_0\sin\alpha\quad(2)\end{cases}$$

Lập tỉ số $\dfrac{(1)}{(2)}$, ta được: $-\mu=\dfrac{v-v_0\cos\alpha}{v_0\sin\alpha}$

$\Rightarrow v=v_0\left(\cos\alpha-\mu\sin\alpha\right)\quad(v>0)$

Khối gỗ trượt trên sàn với gia tốc $a_x=-\mu g$, được quãng đường L_2

Có $0-v^2=2a_x.L_2\Rightarrow L_2=\dfrac{-v^2}{-2\mu g}=\dfrac{v_0^2\left(\cos\alpha-\mu\sin\alpha\right)^2}{2\mu g}$.

Vậy khối gỗ dừng lại cách điểm ném một khoảng

$$L=L_1+L_2=\frac{2v_0^2.\sin\alpha.\cos\alpha}{g}+\frac{v_0^2\left(\cos\alpha-\mu\sin\alpha\right)^2}{2\mu g}$$

Hay $L=\dfrac{v_0^2}{2\mu g}\left(\cos\alpha+\mu.\sin\alpha\right)^2$.

Đặt $\mu=\tan\varphi=\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, xét

$$y=\cos\alpha+\mu.\sin\alpha=\frac{\cos\alpha.\cos\varphi+\sin\alpha.\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{\cos\left(\alpha-\varphi\right)}{\cos\varphi}$$

Ta thấy y đạt giá trị lớn nhất khi $\cos\left(\alpha-\varphi\right)=1\Rightarrow\alpha-\varphi=0\Leftrightarrow\alpha=\varphi$.

Khi đó $\mu=\tan\alpha$. Ta suy ra $L\le\dfrac{v_0^2}{2\mu g}\left(1+\mu^2\right)$.

* Biện luận:

+ Để có v > 0 thì $\cos\alpha-\mu.\sin\alpha>0\Rightarrow\mu<\cot\alpha$.

$L_{max}=\dfrac{v_0^2}{2\mu g}\left(1+\mu^2\right)$, khi $\mu=\tan\alpha$.

+ Nếu $\mu\ge\cot\alpha$ thì $L_{max}=L_{1max}=\dfrac{v_0^2}{g}$ khi $\alpha=45^0$. (Vật không trượt).

Bài 30:

Một sợi dây không trọng lượng hai đầu buộc vào một vật nặng và một thùng cát rồi vắt qua ròng rọc nhẹ cố định. Khối lượng của cát bằng khối lượng của thùng và bằng nửa khối lượng của khối lượng của vật nặng. Ban đầu các vật đều ở trạng thái đứng yên. Tại thời điểm t = 0, qua một lỗ nhỏ ở đáy thùng, cát bắt đầu chảy đều ra ngoài (tức là cứ sau những khoảng thời gian bằng nhau thì lượng cát chảy ra ngoài là bằng nhau). Xác định vận tốc của vật nặng tại thời điểm $2t_o$ nếu toàn bộ cát chảy hết ra khỏi thùng sau khoảng thời gian t_o.

Gọi m là khối lượng cát ban đầu. Khi đó, khối lượng vật nặng là 2m, khối lượng của cả thùng và cát ban đầu là 2m.

+ Do cát chảy đều và chảy hết ra ngoài sau thời gian t_o.

Sau thời gian $t < t_o$, khối lượng cát đã chảy ra ngoài là: $\frac{m}{t_o}t$

+ Khi đó, khối lượng cát và thùng là: $2m - \frac{m}{t_o}t$

Xét hệ tại thời điểm $0 \le t \le t_o$:

+ Áp dụng định luật II Niu Tơn cho hệ, ta có:

$$2mg - (2m - \frac{m}{t_o}t)g = (2mg + 2m - \frac{m}{t_o}t)\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow dv = \frac{gtdt}{4t_o - t} = \frac{g(t - 4t_o + 4t_o)dt}{4t_o - t} = -gdt - \frac{4gt_o d(4t_o - t)}{4t_o - t} \quad (1)$$

Giả sử sau thời điểm t_o vận tốc của vật là v_1. Từ (1), ta có:

$$\int_0^{v_1} dv = -\int_0^{t_0} gdt - \int_0^{t_0} \frac{4gt_o d(4t_o - t)}{4t_o - t} \Rightarrow v_1 = -gt_o - 4gt_o \ln\frac{3}{4}$$

* Sau khi cát chảy hết ra ngoài:

+ Áp dụng định luật II Niu Tơn:

$2mg - mg = (2mg + m)a \Rightarrow$ a = g/3

+ Vận tốc của vật sau thời điểm 2 t_o là:

$$v_2 = v_1 + at = -gt_o - 4gt_o \ln\frac{3}{4} + \frac{gt_o}{3} = gt_o(4\ln\frac{3}{4} - \frac{2}{3})$$

Phần thứ ba

KẾT LUẬN

Bồi dưỡng học sinh giỏi là một nhiệm vụ rất quan trọng của các trường THPT chuyên. Đối với bộ môn Vật lý thì chuyển động ném của chất điểm dưới tác dụng của trọng lực là một chuyên đề không trìu tượng, việc giải các bài tập cơ bản tương đối dễ hiểu nhưng giải các bài tập nâng cao đòi hỏi phải có sự kiên trì, óc tư duy sáng tạo, phải hiểu lí thuyết một cách sâu sắc, đồng thời phải có phương pháp phân tích, lập luận và tư duy lôgic, khoa học mới giải quyết triệt để bài toán.

Học sinh học chuyên vật lý trong thời gian ngắn phải nắm được một lượng kiến thức đồ sộ, đi sâu hầu như toàn bộ chương trình vật lý phổ thông để có đủ khả năng tham dự vào các kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia, Olimpic Quốc tế và khu vực.

Trước tình hình đó, để giúp học sinh bớt những khó khăn trong quá trình học tập, sáng tạo, tự nghiên cứu có hiệu quả trong việc giải các bài toán về chuyển động ném của chất điểm trong khi kiến thức toán học của học sinh còn non kém. Tôi đã và đang công tác tại trường THPT chuyên Bắc Giang, tham gia bồi dưỡng học sinh giỏi nhiều năm đã có ít nhiều kinh nghiệm và cũng đã gặt hái được những thành công nhất định. Tôi tìm hiểu và biết được học sinh giỏi rất cần một hệ thống bài tập khó về chuyển động ném trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi. Chính vì vậy tôi đã đi sâu vào nghiên cứu lí luận, nội dung chương trình, xây dựng hệ thống bài tập để giảng dạy phần chuyển động ném của chất điểm dưới tác dụng của trọng lực trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi;đúc rút được những kinh nghiệm và phương pháp giảng dạy từ đó biên soạn tài liệu này nhằm góp phần nâng cao việc bồi dưỡng năng lực sáng tạo, tư duy cho học sinh thông qua việc giải bài tập.

Trong quá trình thực hiện đề tài nghiên cứu, tôi đã khai thác và làm rõ cơ sở lý luận của quan niệm về bồi dưỡng năng lực, sáng tạo của học sinh trong lĩnh vực giải bài tập vật lý. Trên cơ sở kiến thức lý thuyết cơ bản, những ví dụ điển hình, từng bước giúp cho học sinh có phương pháp, kỹ năng giải bài tập vật lý nói chung, chuyên đề chuyển động ném của chất điểm dưới tác dụng của trọng lực nói riêng.

Việc sưu tầm và tuyển chọn các bài tập không phải việc làm ngẫu nhiên. Các bài tập đều nằm trong chương trình bắt buộc trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia và kỳ thi Olimpic Quốc tế. Các dạng bài tập được sắp xếp theo trình tự kiến thức của chương trình, các cấp độ từ đơn giản đến phức tạp tuân theo đúng quy luật của nhận thức. Chính vì vậy, phải có phương pháp tư duy vật lý, giải bài tập phải có hiểu biết sâu sắc bản chất hiện tượng và nội dung chính xác định luật vật lý.

Các bài tập được tuyển chọn từ các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi, tạp chí vật lý phổ thông, đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia, Olimpic vật lý các nước, Olimpic vật lý Quốc tế...

Trong mỗi bài tập đều có hướng dẫn giải, phân tích hiện tượng vật lý, lập luận lôgic khoa học và xuyên suốt toàn bộ kiến thức liên quan, có dẫn dắt theo các công thức tính toán để học sinh có thể nắm bắt được bản chất các hiện tượng cũng như các định luật vật lý.

Đề tài này là sự tích luỹ từ các bài giảng, những kinh nghiệm mà tôi đã sử dụng để dạy cho học sinh các lớp chuyên, bồi dưỡng đội tuyển học sinh giỏi trong những năm qua và đã gặt hái được những thành công nhất định. Hy vọng đề tài này sẽ đáp ứng được phần nào các đòi hỏi về tài liệu tham khảo, phương pháp giải cùng với hệ thống bài tập được phân loại từ đơn giản đến phức tạp, chia ra thành các dạng và tương ứng với các cấp độ cho học sinh, giúp cho các bạn đồng nghiệp trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi và ôn thi đại học cũng như học sinh chuyên, học sinh yêu thích môn vật lý.

Rất mong được sự góp ý của bạn đọc để đề tài được hoàn thiện hơn, giúp cho công tác giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi ngày càng hiệu quả hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Dương Trọng Bái - Cao Ngọc Viễn. Bài thi Vật lí Quốc tế tập 1. NXBGD 1996.
2. Dương Trọng Bái - Đàm Trung Đồn. Bài thi Vật lí Quốc tế tập 2. NXBGD 2000.
3. Lương Duyên Bình - Nguyễn Quang Hậu - Bài toán cơ sở vật lý.
4. Nguyễn Quang Hậu. Bài tập Vật lí đại cương tập 1. NXB ĐHQGHN 2008.
5. Vũ Thanh Khiết - Vũ Đình Tuý. Tuyển tập đề thi Olimpic Vật lí các nước tập 1, 2. NXBGD 2006.
6. Vũ Thanh Khiết - Vũ Đình Tuý. Các đề thi học sinh giỏi vật lí (2001 – 2010). NXBGDVN 2011.
7. Vũ Thanh Khiết - Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi Vật lí trung học phổ thông, Vật lí hiện đại. NXBGD 2010.
8. Vũ Thanh Khiết. Các bài toán vật lí chọn lọc trung học phổ thông. NXBGD 2002.
9. Nguyễn Ngọc Long - Bạch Thành Công. Olimpic Vật lí châu Á. NXBGD 2005.
10. I.E.Irôđôp, I.V.Xaveliep, O.I.Damsa. Tuyển tập các bài tập Vật lí đại cương. NXB Matxcơva 1980.
11. Yung - Kuo Lim. Bài tập và lời giải cơ học. NXBGD 2009.
12. Tạp chí vật lý và tuổi trẻ.