ĐỀ THI HSG TOÁN 9 HẢI DƯƠNG 2023-2024

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I. (2 điểm)

1) Cho x ¿ $\frac{23}{\sqrt{31+12\sqrt{3}}}$. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{x^4+5x^3-20x^2-27x+30}{x^2+4x-21}$

2) Cho $a, b, c>0$ thỏa mãn $a+b+c+2\sqrt{abc}=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a(1-b)(1-c)}+\sqrt{b(1-c)(1-a)}+\sqrt{c(1-a)(1-b)}-\sqrt{abc}=1$$

Câu II. (3 điểm)

1) Giải phương trình $x^3+x^2-x+1=\sqrt{3x+1}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+2x-y=3 \\ \frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2}{y^2+4y+7}=1 \end{cases}$

Câu III. (2 điểm)

1) Giải phương trình nghiệm nguyên$x^3-y^3-2y^2-3y-1=0$

2) Tìm số nguyên tố pđể 2041 $-$¿ p^2 không chia hết cho 24

Câu IV. (3 điểm)

1) Cho đường tròn (O) đường kính *AB*, qua *A* và *B* lần lượt vẽ các tiếp tuyến d_1 và d_2 với (O). Từ điểm *M* bất kỳ trên (O) vẽ các tiếp tuyến với đường tròn, cắt d_1 tại *C* và cắt d_2 tại *D*. Kẻ *MH* vuông góc với *AB* tại *H*.
   a) Chứng minh rằng: *AD, BC, MH* đồng quy tại trung điểm của *MH*.
   b) Đường tròn (O’) đường kính *CD* cắt đường tròn (O) tại *E* và *F* (*E* thuộc cung AM). Chứng minh *EF* đi qua trung điểm của *MH*.

2) Cho tam giác ABC đều cạnh a. Điểm M di động trên đoạn BC. Vẽ ME vuông góc với AB tại E, MF vuông góc với AC tại F. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn EF theo a.

Câu V. (1 điểm)

Cho các số dương x, y, z thõa mãn *xyz* = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(x+1)^2+y^2+1}{xy+x+4}+\frac{(y+1)^2+z^2+1}{yz+y+4}+\frac{(z+1)^2+x^2+1}{zx+z+4}$$

ĐÁP ÁN

Câu I

1) Cho x ¿ $\frac{23}{\sqrt{31+12\sqrt{3}}}$. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{x^4+5x^3-20x^2-27x+30}{x^2+4x-21}$

$x=\frac{23}{\sqrt{31+12\sqrt{3}}}=\frac{23}{\sqrt{(3\sqrt{3}+2)^2}}=\frac{23(3\sqrt{3}-2)}{23}=3\sqrt{3}-2$

$\Rightarrow x+2=3\sqrt{3}\Rightarrow x^2 4x+4-23=0$

$P=\frac{x^4+5x^3-20x^2-27x+30}{x^2+4x-21}$

$P=\frac{x^2(x^2+4x-23)+x(x^2+4x-23)-(x^2+4x-23+7)}{(x^2+4x-23)+2}$

$P=\frac{(x^2+4x-23)(x^2+x-1)+7}{(x^2+4x-23)+2}$

$P=\frac{0.(x^2+x-1)+7}{0+2}=\frac{7}{2}$

2) Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c+2\sqrt{abc}=1$. Chứng minh rằng $\sqrt{a(1-b)(1-c)}+\sqrt{b(1-c)(1-a)}+\sqrt{c(1-a)(1-b)}-\sqrt{abc}=1$

Do $a,b,c>0$ và $a+b+c+2\sqrt{abc}=1$

$a+2\sqrt{abc}+bc=1-b-c+bc=(1-b)(1-c)$

$\sqrt{a(1-b)(1-c)}=\sqrt{a^2+2a\sqrt{abc}+abc}=\sqrt{(a+\sqrt{abc})^2}=a+\sqrt{abc}$

Tương tự:

$\Rightarrow\sqrt{b(1-c)(1-a)}=b+\sqrt{abc}$

$\sqrt{c(1-a)(1-b)}=c+\sqrt{abc}$

Do đó:

$\sqrt{a(1-b)(1-c)}+\sqrt{b(1-c)(1-a)}+\sqrt{c(1-a)(1-b)}-\sqrt{abc}$

¿ $a+b+c+2\sqrt{abc}=1$

Câu II

1) Giải phương trình $x^3+x^2-x+1=\sqrt{3x+1}$

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$

$x^3+x^2-x+1=\sqrt{3x-1}$

$x^3+x^2-2x+(x+1)-\sqrt{3x+1}=0$

$\Leftrightarrow x^3+x^2-2x+\frac{(x+1)-(3x+1)}{x+1+\sqrt{3x+1}}=0$

$\Leftrightarrow (x^2-x)(x+2)+\frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}=0$

$\Leftrightarrow (x^2-x)\left(x+2+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}\right)=0$ (*)

Với x ≥0 thì $x+2+\frac{1}{(x+1)+\sqrt{3x+1}} \geq 0$

Nên (*) $\Leftrightarrow x^3-x=0 \Longleftrightarrow ¿$(t/m)

Vậy phương trình có tập nghiệm S $=\{0;1\}$

2). Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+2x-y=3 \\ \frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2}{y^2+4y+7}=1 \end{cases}$

Hệ phương trình $\Longleftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y+2) \\ \frac{1}{(x-1)^2+1}+\frac{2}{(y+2)^2+3}=1 \end{cases}$

Đặt $u=x-1, v=y+2$. Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} uv=1 \\ \frac{1}{(x-1)^2+1}+\frac{2}{(y+2)^2+3}=1 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} uv=1 \\ u^2v^2+3u^2+v^2+3=2u^2+v^2+5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} uv=1 \\ u^2v^2+u^2=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} uv=1 \\ u=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow ¿$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$

Câu III

1) Giải Phuong trình nghiệm nguyên $x^3-y^3-2y^2-3y-1=0$

Phương trình đã cho $\Longleftrightarrow x^3=y^3+2y^2+3y+1$

Nhận xét rằng $y^2\geq 0 \Longleftrightarrow x^3\leq y^3+2y^2+3y+1+y^2=(y+1)^3$ (1)

$5y^2+2>0 \Longleftrightarrow x^3>y^3+2y^2+3y+1-(5y^2+2)=(y-1)^3$(2)

Từ (1) và (2) suy ra: $(y-1)^3<x^3\leq(y+1)^3$

Vì $x, y\in Z \Longrightarrow$ ¿

$\Longleftrightarrow \left[\begin{matrix}2y^2+3y+1=0\\ y^2=0\end{matrix}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{matrix}y=-1(do\ y\in Z)\\ y=0\end{matrix}\right. \Longleftrightarrow$ ¿

Với $y=-1$ suy ra $x=-1$

Với $y=0$ suy ra $x=1$

Vậy phương trình có 2 cặp nghiệm là $(-1;-1)$ và $(1;0)$

2) Tìm số nguyên tố p để 2041 $-$¿ p^2 không chia hết cho 24

Đặt $a=2041-p^2=2040-(p^2-1)=2040-(p-1)(p+1)$

Nếu $p=2 \Longrightarrow a=2037$ không chia hết cho 24 $\Longrightarrow p=2(nhận)$

Nếu $p=3 \Longrightarrow a=2032$không chia hết cho 24 $\Longrightarrow p=3(nhận)$

Nếu $p>3$ mà p là số nguyên tố. Do đó p^2 chia cho 3 dư 1 $\Longrightarrow p^2-1\vdots 3$

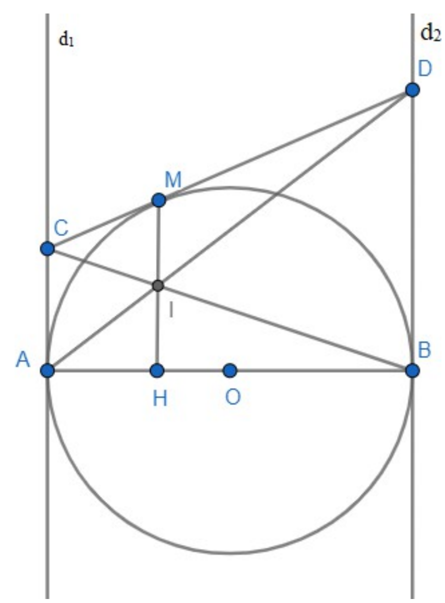
$p>3$ mà p là số nguyên tố. Do đó plẻ nên$p-1$và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp

$\Longrightarrow (p-1)(p+1)\vdots 8$. Mà (3; 8) = 1 $\Rightarrow (p-1)(p+1)\vdots 24$

$\Longrightarrow a=2040-(p-1)(p+1)\vdots 24$

Do đó $p>3$ không thỏa mãn điều kiện đề bài. Vậy $p=2; p=3$

Câu IV



1) Gọi là giao điểm của AD và BC là I

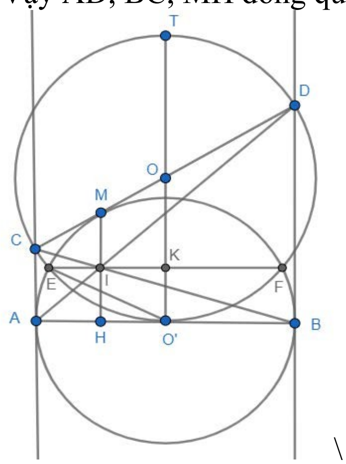
Ta có $\Delta ICA \sim \Delta IBD \Longrightarrow \frac{IC}{IB}=\frac{CA}{BD}=\frac{CM}{DM} \Longrightarrow MI//BD \Longrightarrow MI\perp AB$

Mà MH $\perp$với AB $\Longrightarrow I\in MH$

Chứng minh được : $\frac{MI}{BD}=\frac{CI}{CB}=\frac{AI}{AD}=\frac{IH}{BD}$

Suy ra MI = IH hay I là trung điểm MH

Vậy AD, BC, MH đồng quy tại trung điểm của MH



\

1)

Ta chứng minh ΔCOD vuông tại O nên O’O là bán kính của (O’) và O’O ⊥ EF

Gọi R là bán kính đường tròn (O)

Ta có ΔMHO ∼ ΔOMO’ suy ra $\frac{MH}{OM}=\frac{OM}{OO'}$ suy ra $MH=\frac{R^2}{OO'}$

Vẽ đường kính OT của đường tròn (O’)

Tam giác OET vuông tại E có EK là đường cao nên $OE^2=OK.OT$

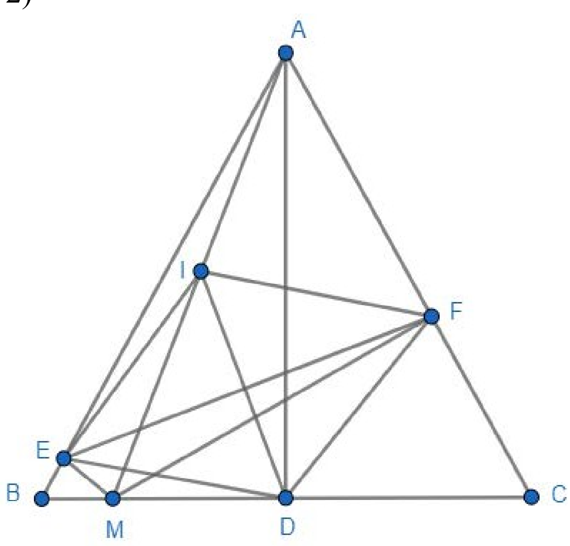
Suy ra $OK=\frac{R^2}{2.OO'}(2)$.Từ (1)(2) suy ra $MH=2.OK$

Do I là trung điểm của MH nên $IH=OK$, suy ra $IK/$¿AB

Ta có O’O là đường trung bình của hình thang vuông ABDC nên O’O vuông góc AB, từ đó suy ra $EF/$¿AB

Hai đường thẳng IK và EF cùng song song với AB và cùng đi qua K nên bốn điểm E, I, K, F thẳng hàng. Vậy EF đi qua trung điểm của MH

2)



Kẻ đường cao AD của tam giác ABC. Lấy I là trung điểm AM

AD là đường cao đồng thời là phân giác suy ra $\widehat{BAD}=30^0$

Chứng minh được $\widehat{EID}=60^0, \widehat{EIF}=120^0$ suy ra $\widehat{DIF}=60^0$

Chứng minh được EI = DI = FI = $\frac{1}{2}AM$, mà $\widehat{EID}=\widehat{DIF}=60^0$

Suy ra ΔEID và ΔFID là tam giác đều và EIFD là hình thoi

Chứng minh được $EF=ID\sqrt{3}$

Vậy EF ngắn nhất khi và chỉ khi ID ngắn nhất

ID ngắn nhất khi và chỉ khi AM ngắn nhất ⇒AM là đường cao

Khi đó $AM=\frac{a\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow ID=\frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow EF=\frac{3a}{4}$

Câu V

Ta có $\frac{(x+1)^2+y^2+1}{xy+x+4}=\frac{x^2+y^2+2x+2}{xy+x+4}$

$\geq \frac{2xy+2x+2}{xy+x+4}=\frac{2(xy+x+4)}{xy+x+4}=2-\frac{6}{xy+x+4}$

Tương tự, suy ra $P\geq 6-6\left(\frac{1}{xy+x+4}+\frac{1}{yz+y+4}+\frac{1}{zx+z+4}\right)$

Ta có $\frac{1}{xy+x+4}=\frac{1}{xy+x+1+3}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{3}\right)$

Tương tự, suy ra $P\geq 6-6.\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yx+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}\right)$

Mặt khác

$\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{xyz}{yz+y+xyz}+\frac{xyz}{zx+z+xyz}$

¿ $\frac{1}{xy+x+1}+\frac{xz}{z+1+xz}+\frac{xy}{x+1+xy}=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{xz}{z+xyz+zx}+\frac{xy}{x+1+xy}$

¿ $\frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{1+xy+x}+\frac{xy}{x+1+xy}=1$

Suy ra $P\geq 6-6.\frac{1}{4}(1+1)=6-3=3$