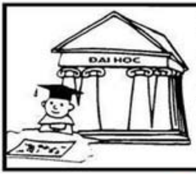
Tuyển chọn theo chuyên đề

TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

Phần 5: Giải tích

- ***Sử dụng đạo hàm để giải toán***
- ***Các kĩ thuật tính tích phân***
- ***Các bài toán tiếp tuyến***



Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Bài toán *Tìm giá trị tham số để phương trình, bất phương trình, hệ phương trình có nghiệm* là bài toán quan trọng và thường gặp trong kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng.

Bài viết này trao đổi cách vận dụng đạo hàm để giải những bài toán thuộc dạng trên.

SỬ DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

HUỲNH DUY THỦY
(GV THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Bình Định)

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Trước hết chúng ta cần nắm vững các mệnh đề sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập D.

1) Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm $x \in D$ $\Leftrightarrow \min\limits_{x\in D} f(x) \le m \le \max\limits_{x\in D} f(x)$;

2) Bất phương trình $f(x) \le m$ có nghiệm $x \in D$

$\Leftrightarrow \min\limits_{x\in D} f(x) \le m$;

3) Bất phương trình $f(x) \le m$, nghiệm đúng với mọi $x \in D$ $\Leftrightarrow \max\limits_{x\in D} f(x) \le m$;

4) Bất phương trình $f(x) \ge m$, có nghiệm với mọi $x \in D \Leftrightarrow \max\limits_{x\in D} f(x) \ge m$;

5) Bất phương trình $f(x) \ge m$, nghiệm đúng với mọi $x \in D \Leftrightarrow \min\limits_{x\in D} f(x) \ge m$;

6) Cho hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên tập D.

Khi đó $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ (với mọi $u, v \in D$).

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để giải bài toán tìm giá trị tham số m để phương trình (PT), bất phương trình (BPT) có nghiệm ta có thể thực hiện thứ tự như sau:

- Biến đổi PT (BPT) về dạng $f(x) = g(m)$.

(hoặc $f(x) \ge g(m)$; hoặc $f(x) \le g(m)$).

- Tìm tập xác định D của hàm số $f(x)$.
- Tính $f'(x)$.
- Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$.
- Xác định $\max\limits_{x\in D} f(x)$, $\min\limits_{x\in D} f(x)$.
- Vận dụng một trong các mệnh đề đã nêu ở phần trên, rút ra kết luận cho bài toán.

Lưu ý. Trường hợp PT (BPT) chứa các biểu thức phức tạp ta làm như sau:

- Đặt ẩn số phụ $t = \varphi(x)$.
- Từ điều kiện ràng buộc của ẩn x, tìm điều kiện cho ẩn số t.
- Đưa PT (BPT) ẩn số x về PT (BPT) ẩn số t.

Ta được $f(t) = h(m)$; (hoặc $f(t) \ge h(m)$; hoặc $f(t) \le h(m)$).

- Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$.
- Từ bảng biến thiên rút ra kết luận bài toán.

III. MỘT SỐ THÍ DỤ

★**Thí dụ 1.** *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình*

$$\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m} \qquad (1)$$

có nghiệm.

Lời giải. Điều kiện $0 \le x \le 9$.

PT (1) $\Leftrightarrow x + 9 - x + 2\sqrt{x(9-x)} = -x^2 + 9x + m$

$\Leftrightarrow 9+2\sqrt{-x^2+9x} = -x^2+9x+m$ (2)

Đặt $t=\sqrt{-x^2+9x}$.

Ta có $t' = \dfrac{-2x+9}{2\sqrt{-x^2+9x}}$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{2}$.

x	0		$\frac{9}{2}$		9
t'		$+$	0	$-$	
t	0	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0

Do đó $0 \le t \le \dfrac{9}{2}$. Khi đó PT(2) trở thành

$9+2t = t^2+m \Leftrightarrow -t^2+2t+9 = m$ (3)

Xét hàm số $f(t) = -t^2+2t+9$, với $0 \le t \le \dfrac{9}{2}$.

$f'(t) = -2t+2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Lập bảng biến thiên hàm $f(t)$ trên $\left[0;\dfrac{9}{2}\right]$

t	0		1		$\frac{9}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	9	$\nearrow$	10	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$

PT (1) có nghiệm $x \in [0;9]$ khi và chỉ khi PT (3) có nghiệm $t \in \left[0;\dfrac{9}{2}\right]$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $-\dfrac{9}{4} \le m \le 10$. ❒

★Thí dụ 2. *Cho phương trình*

$$\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m(\log_2 x - 3) \qquad (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in [32;+\infty)$.

Lời giải. Từ ĐK bài ra ta thấy $\log_2 x \ge 5$, suy ra $(\log_2 x - 3) \ge 2$ nên $m \ge 0$.

PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3)$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = m^2(\log_2 x - 3)^2$ (2)

Đặt $t = \log_2 x$ ($t \ge 5$). PT (2) trở thành

$t^2 - 2t - 3 = m^2(t-3)^2 \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{t+1}{t-3}$ (3)

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t+1}{t-3}$ (với $t \ge 5$).

$f'(t) = \dfrac{-4}{(t-3)^2} < 0$, với mọi $t \ge 5$. Ta có

t	5		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	3	$\searrow$	1

PT (1) có nghiệm $x \in [32;+\infty)$ khi và chỉ khi PT (3) có nghiệm $t \ge 5$ điều này xảy ra khi $1 < m^2 \le 3$. Kết hợp với $m \ge 0$, ta được $1 < m \le \sqrt{3}$. ❒

★Thí dụ 3. *Tìm m để phương trình*

$3\sqrt{\tan x+1}(\sin x + 2\cos x) = m(\sin x + 3\cos x)$ (1)

có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải. Xét $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, khi đó $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, $\tan x > 0$ và $\sin x + 3\cos x > 0$.

PT (1) $\Leftrightarrow 3\sqrt{\tan x+1}.\left(\dfrac{\sin x + 2\cos x}{\sin x + 3\cos x}\right) = m$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\tan x+1}.\left(\frac{\tan x+2}{\tan x+3}\right) = m \qquad (2)$$

Đặt $t = \tan x$, $t > 0$, PT (2) thành

$$3\sqrt{t+1}.\frac{t+2}{t+3} = m \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = 3\sqrt{t+1}.\dfrac{t+2}{t+3}$, ($t > 0$).

$f'(t) = \dfrac{3}{2\sqrt{t+1}}.\dfrac{t+2}{t+3} + \dfrac{3\sqrt{t+1}}{(t+3)^2} > 0$; $\forall t > 0$.

Ta có bảng biến thiên

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	2	$+\infty$

Ứng với mỗi $t > 0$ thỏa mãn PT (3), ta được đúng một nghiệm $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ của PT (1). Do đó PT (1) có nghiệm duy nhất $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chi khi PT (3) có duy nhất nghiệm $t > 0$.

Căn cứ vào bảng biến thiên ta suy ra $m > 2$.

★**Thí dụ 4.** *Tìm m để bất phương trình*

$$m(\sqrt{x^2-2x+2}+1)+x(2-x) \le 0 \qquad (1)$$

có nghiệm $x \in [0\,;1+\sqrt{3}]$.

Lời giải. Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2}$.

Ta có $t' = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		1		$1+\sqrt{3}$
t'		$-$	0	$+$	
t	$\sqrt{2}$		1		2

Từ đó $1 \le t \le 2$. Với $1 \le t \le 2$, ta biến đổi

$t=\sqrt{x^2-2x+2} \Leftrightarrow t^2 = x^2-2x+2$

$\Leftrightarrow t^2-2=-x(2-x)$. BPT (1) trở thành

$$m(t+1) \le t^2-2 \Leftrightarrow m \le \frac{t^2-2}{t+1} \qquad (2)$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-2}{t+1}$, $(1 \le t \le 2)$.

$$f'(t)=\frac{t^2+2t+2}{(t+1)^2} > 0 \quad , \ \forall t \in [1;2]$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1;\,2]$.

Bảng biến thiên

t	1	2
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$

Từ bảng biến thiên, BPT (1) có nghiệm $x \in \left[0;1+\sqrt{3}\right]$ khi và chỉ khi BPT(2) có nghiệm $t \in [1;2]$.

Điều này xảy ra khi $m \le \max\limits_{t\in[1;2]} f(t) = f(2) = \dfrac{2}{3}$.

* * *

Để kết thúc bài báo xin mời bạn hãy sử dụng phương pháp trên để giải một số bài tập cùng loại sau đây

1. Tìm m để phương trình

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{8-x}+\sqrt{(x+1)(8-x)}=m$$

có nghiệm.

2. Tìm a để phương trình $\dfrac{3x^2-1}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2x-1}+ax$ có nghiệm duy nhất.

3. Tìm giá trị lớn nhất của a để bất phương trình

$$\sqrt{a^3}(x-1)^2+\frac{\sqrt{a}}{(x-1)^2} \le \sqrt[4]{a^3}\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$$

có ít nhất một nghiệm.

4. Tìm m để mọi $x \in [0;2]$ đều thỏa mãn bất phương trình

$$\log_2\sqrt{x^2-2x+m}+4\sqrt{\log_4(x^2-2x+m)} \le 5.$$

5. Tìm m để bất phương trình

$$\log_5(x^2+4x+m)-\log_5(x^2+1) < 1$$

nghiệm đúng với mọi $x \in (2;3)$.

6. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để bất phương trình

$$a.2^{x+1}+(2a+1)(3-\sqrt{5})^x+(3+\sqrt{5})^x < 0$$

nghiệm đúng với mọi $x \le 0$.

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

ĐẶNG THANH HẢI – TRẦN TUYẾT THANH
(GV Học viện PKKQ, Sơn Tây, Hà Nội)

Trong bài viết này, chúng tôi xin được trao đổi một số dạng cơ bản của tích phân hàm lượng giác và các phương pháp đổi biến tương ứng thường gặp trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng.

Tích phân hàm lượng giác tổng quát có dạng

$I = \int_a^b F(\sin x, \cos x)\,dx$.

Tùy thuộc vào tính chất và dạng đặc biệt của hàm $F(\sin x, \cos x)$ hoặc mối quan hệ giữa hàm $F(\sin x, \cos x)$ với các cận lấy tích phân mà chúng ta sử dụng phép đổi biến tương ứng.

DẠNG 1. $F(\sin x, \cos x) = F(-\sin x, -\cos x)$ (F là hàm số chẵn theo $\sin x$ và $\cos x$)

Cách giải. Đặt $t = \tan x$ hoặc $t = \cot x$.

★ **Thí dụ 1.** *Tính tích phân*

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x}\cot x\,dx.$$

Lời giải. Rõ ràng $F = \dfrac{\sqrt[3]{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x}\cot x$ là hàm số chẵn theo $\sin x$ và $\cos x$.

$$\text{Ta có } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{\sin^2 x}}}{\sin^2 x}\cot x\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{1-(1+\cot^2 x)}}{\sin^2 x}\cot x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{\cot^2 x}}{\sin^2 x}\cot x\,dx.$$

Đặt $t = \cot x \Rightarrow dt = -\dfrac{1}{\sin^2 x}dx$.

Khi $x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t = \sqrt{3}$; $x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Từ đó $I = \displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} t^{\frac{2}{3}} t\,dt = \int_{\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} t^{\frac{5}{3}}\,dt = \frac{1}{8}\left(9\sqrt[3]{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

DẠNG 2. $F(\sin x, \cos x) = -F(\sin x, -\cos x)$ (F là hàm số lẻ theo $\cos x$)

Cách giải. Đặt $t = \sin x$.

★ **Thí dụ 2.** *Tính tích phân* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx$.

Lời giải. Ta thấy $F = \dfrac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2} = \dfrac{2\sin x\cos x}{(2+\sin x)^2}$ là hàm số lẻ theo $\cos x$. Đặt $t = \sin x$ $\Rightarrow dt = \cos x\,dx$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Từ đó $I = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(2+t)^2}dt$

$$= 2\left(\int_0^1 \frac{dt}{2+t} - \int_0^1 \frac{dt}{(2+t)^2}\right) = 2\left(\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right).$$

DẠNG 3. $F(\sin x, \cos x) = -F(-\sin x, \cos x)$ (F là hàm số lẻ theo $\sin x$)

Cách giải. Đặt $t = \cos x$.

★ **Thí dụ 3.** *Tính tích phân*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x}dx.$$

Lời giải. Rõ ràng $F=\dfrac{\sin x-\sin^3 x}{\cos 2x}$ là hàm số lẻ theo sin$x$. Đặt $t=\cos x \Rightarrow dt=-\sin x\,dx$.

Khi $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt3}{2}$. Từ đó

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-\sin^3 x}{\cos 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 x-1}{2\cos^2 x-1}(-\sin x)dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x-1}(-\sin x)\,dx=-\int_1^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{t^2}{2t^2-1}dt$$

$$=-\frac12\int_1^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{2t^2-1+1}{2t^2-1}dt=-\frac12\left(\int_1^{\frac{\sqrt3}{2}}dt+\int_1^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{dt}{2t^2-1}\right)$$

$$=-\frac12\left(\int_1^{\frac{\sqrt3}{2}}dt-\frac12\int_1^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{\sqrt2 t-1-(\sqrt2 t+1)}{(\sqrt2 t-1)(\sqrt2 t+1)}dt\right)$$

$$=-\frac12\left(\frac{\sqrt3}{2}-1-\frac12\left(\int_1^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{dt}{\sqrt2 t+1}-\int_1^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{dt}{\sqrt2 t-1}\right)\right)$$

$$=\frac12-\frac{\sqrt3}{4}+\frac{1}{4\sqrt2}\left(\ln\left(\frac{\sqrt6}{2}+1\right)-\ln(\sqrt2+1)\right.$$
$$\left.-\ln\left(\frac{\sqrt6}{2}-1\right)+\ln(\sqrt2-1)\right).$$

DẠNG 4

$$F(\sin x,\cos x)=\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}$$

Cách giải. Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}$.

★ **Thí dụ 4.** *Tính tích phân*

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}.$$

Lời giải. Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}$ thì

$$\begin{cases} dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}.\end{cases}$$

Khi $x=0\Rightarrow t=0$; $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$. Từ đó

$$I=\int_0^1\frac{1}{\frac{8t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$=\int_0^1\frac{dt}{t^2+4t+4}=\int_0^1\frac{d(t+2)}{(t+2)^2}=\frac16.$$

MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

★ **Thí dụ 5.** *Tính tích phân*

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}dx \ (n \text{ là số nguyên dương})$$

Lời giải. Đặt $t=\dfrac{\pi}{2}-x\Rightarrow dx=-dt$.

Khi $x=0\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$; $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$.

Từ đó $I=-\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n t}{\sin^n t+\cos^n t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx.$$

Do đó $2I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}dx$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}.$$

Vậy $I=\dfrac{\pi}{4}$.

• ***Lời bình.*** Do cận lấy tích phân có dạng $a=0$; $b=\dfrac{\pi}{2}$, nên các hàm sin$x$ và cos$x$ có mối liên hệ của các góc phụ nhau. Trong trường hợp này ta thường dùng phép đổi biến $t=\dfrac{\pi}{2}-x$.

★ **Thí dụ 6.** *Tính tích phân* $I=\displaystyle\int_0^{3\pi}\sin x.\sin 2x.\sin 3x\,dx$.

Lời giải. Ta có

$$I=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin x.\sin 2x.\sin 3x\,dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{3\pi}\sin x.\sin 2x.\sin 3x\,dx \ (1)$$

Xét tích phân $J=\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{3\pi}\sin x.\sin 2x.\sin 3x\,dx$.

Đặt $t=3\pi-x\Rightarrow dx=-dt$.

Khi $x=\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow t=\dfrac{3\pi}{2}$; $x=3\pi\Rightarrow t=0$.

Từ đó

$$J=-\int_{\frac{3\pi}{2}}^0\sin(3\pi-t).\sin(6\pi-2t).\sin(9\pi-3t)dt$$

$$=-\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin t.\sin 2t.\sin 3t\,dt=-\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin x.\sin 2x.\sin 3x\,dx \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $I=0$.

• ***Lời bình.*** Có thể sử dụng kết quả sau để suy ra kết quả thí dụ 6: *Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;2a]$. Khi đó*

$$\int_0^{2a}f(x)dx=\int_0^a\big(f(x)+f(2a-x)\big)dx.$$

Hướng dẫn. $\displaystyle\int_0^{2a}f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{2a}f(x)dx.$

Đổi biến số $t=2a-x$ trong tích phân thứ hai ở vế phải đẳng thức trên được

$$\int_a^{2a}f(x)dx=\int_a^0 f(2a-t)(-dt)=\int_0^a f(2a-x)dx,,$$

từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Để kết thúc bài viết, mời các bạn hãy thử tính các tích phân sau:

1. $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^6 x\,dx$; **2.** $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+7\cos x+6}{4\sin x+3\cos x+5}dx$;

3. $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x.\cos^5 x}}$; **4.** $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx$;

5. $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sqrt{4-2\cos 2x}}dx$; **6.** $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x.\cos^4 x}$.

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Giới hạn là cơ sở để xây dựng các khái niệm liên tục và đạo hàm của hàm số. Bài viết này giúp các bạn hệ thống lại các dạng toán về giới hạn và các kĩ năng giải các dạng toán đó trong chương trình toán phổ thông, chuẩn bị cho các kì thi tốt nghiệp THPT, thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng.

Giới hạn của hàm số VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN có liên quan

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

❶ Nhắc lại lí thuyết

• Với x là số thực, ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Hai giới hạn cơ bản hay được sử dụng là

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1 \text{ và}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\frac{a^2}{2},\ a\in\mathbb{R}, a\neq 0 \qquad (*)$$

Kết quả (*) suy ra từ

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2.\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}.$$

• Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x=x_0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

• Đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x=x_0$ là giới hạn hữu hạn (nếu có) của $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, kí hiệu là $f'(x_0)$.

• Giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ cùng dần tới 0 khi x tiến tới a, được gọi là giới hạn dạng $\dfrac{0}{0}$. Đây là giới hạn thường gặp nhất trong chương trình phổ thông.

❷ Các dạng toán thường gặp

★ *Thí dụ 1. Tìm giới hạn*

$$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}.$$

Lời giải. Sử dụng công thức (*), ta có

$$L_1=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x.\frac{1-\cos 2x}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2}=\frac{5}{2}.$$

Lưu ý. Bằng cách tương tự, dễ dàng chứng minh được các kết quả sau

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax\cos bx}{x^2}=\frac{a^2+b^2}{2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

★ ***Thí dụ 2.*** *Tìm giới hạn*

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x-\cos 3x}-\cos 2x}{x^2}.$$

Lời giải. Biến đổi

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\cos x-\cos 3x}-1}{x^2}+\frac{1-\cos 2x}{x^2}\right).$$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x-\cos 3x}-1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\cos x-\cos 3x}-1}{\cos x-\cos 3x}\cdot\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x-\cos 3x}-1}{\cos x-\cos 3x}\cdot\left(\frac{1-\cos 3x}{x^2}-\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

Lại có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x-\cos 3x}-1}{\cos x-\cos 3x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=1,$

với $t=\cos x-\cos 3x$ và theo (*) có

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 3x}{x^2}-\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2}=4.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=2.$$

Do đó $L_2 = 4+2=6.$

Lưu ý. Làm tương tự như trên, ta thấy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\frac{b^2-a^2}{2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos ax-\cos bx}-\cos cx}{x^2}=\frac{b^2-a^2}{2}+\frac{c^2}{2}.$$

★ ***Thí dụ 3.*** *Tìm giới hạn*

$$L_3=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{x}.$$

Lời giải. Ta có

$$L_3=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x+\cos x)^2}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right).$$

Lại có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1,$$

với $t=\sin 2x$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$ nên

$L_3 = 1.\ 1 = 1.$

Lưu ý. Khi gặp giới hạn $\dfrac{0}{0}$ dạng $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln f(x)}{g(x)}$, trong nhiều trường hợp ta có thể biến đổi như sau:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+f(x)-1)}{f(x)-1}\cdot\frac{f(x)-1}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{g(x)}.$$

★ ***Thí dụ 4.*** *Tìm giới hạn*

$$L_4=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x.$$

Lời giải. Ta có

$$L_4=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^x.$$

Đặt $\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{1}{t}$, ta có $x=2t-1$; $x\to+\infty \Leftrightarrow t\to+\infty$.

$$L_4=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}=e^2.$$

Lưu ý. Khi tìm giới hạn dạng $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^x$,

trong đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, ta làm như sau:

Sử dụng phép đổi biến số thoả mãn $\dfrac{f(x)}{g(x)}=1+\dfrac{1}{t}$; khi đó $x\to+\infty\Leftrightarrow t\to+\infty$; đưa về giới hạn cơ bản $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t=e$.

★ ***Thí dụ 5.*** *Tìm giới hạn*

$$L_5=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-x+1}\right).$$

Lời giải. Ta có

$$L_5=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)-\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\right).$$

Xét các giới hạn:

*) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+3x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+1}=1.$$

*) $B = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}.$$

Do đó $L_5 = A - B = \frac{3}{2}$.

Lưu ý. Giả sử $P(x)$ là một đa thức bậc n, ta quy ước coi bậc của $\sqrt[m]{P(x)}$ là $\frac{n}{m}$.

1) Để tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $f(x)$, $g(x)$ là các đa thức hoặc căn của đa thức ta làm như sau: viết $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x^\alpha}}{\frac{g(x)}{x^\alpha}}$; trong đó α là bậc cao nhất trong $f(x)$ và $g(x)$. Tiếp theo tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^\alpha}$, từ đó suy ra kết quả cần tìm.

2) Để tìm giới hạn

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{a^3x^3+bx^2+cx+d}-\sqrt{a^2x^2+mx+n}\right)$$

ta biến đổi như sau:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{a^3x^3+bx^2+cx+d}-ax\right)$$

$$-\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{a^2x^2+mx+n}-ax\right);$$

sau đó tính từng giới hạn.

★***Thí dụ 6***. *Tìm m để hàm số sau liên tục tại điểm $x = 1$:*

$$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{2x-1}}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ m & khi\ x=1.\end{cases}$$

Lời giải. Xét giới hạn

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{2x-1}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt[3]{x-2}+1}{x-1}+\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}\right)=\frac{4}{3}.$$

($\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+1}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1\right)}=\frac{1}{3};$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=1).$$

Do đó hàm số liên tục tại điểm $x = 1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow m=\frac{4}{3}$.

Lưu ý. Để tìm giới hạn $L=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{x-a}$ trong đó $\sqrt[3]{f(a)}=\sqrt{g(a)}=M$, ta làm như sau:

Ta viết $L=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sqrt[3]{f(x)}-M}{x-a}+\dfrac{M-\sqrt{g(x)}}{x-a}\right)$.

Tìm từng giới hạn

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{f(x)}-M}{x-a};\ \lim_{x\to a}\frac{M-\sqrt{g(x)}}{x-a},$$

rồi suy ra kết quả cần tìm.

★***Thí dụ 7***. *Tính đạo hàm hàm số sau tại điểm $x = 0$:*

$$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\tan x\cdot\sin x}-1}{x^2} & khi\ x\neq 0\\ 0 & khi\ x=0.\end{cases}$$

(Xem tiếp trang 15)

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ VÀ TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

NGUYỄN ANH DŨNG

(Hà Nội)

Trong các đề thi tốt nghiệp Trung học phổ thông và tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng thường có câu về tích phân. *Phương pháp đổi biến số và tích phân từng phần* thường được sử dụng để tính tích phân đó. Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu (có tính hướng dẫn) một số cách đổi biến số phù hợp với các hàm số dưới dấu tích phân và phương pháp tích phân từng phần để lấy tích phân một số dạng hàm số thường gặp trong các kì thi nói trên. Lưu ý rằng chúng tôi dành cho bạn đọc thực hiện các phép biến đổi hoặc tính ra đáp số khi phép toán chỉ còn đơn giản.

1. Phương pháp đổi biến số

• *Nếu hàm số dưới dấu tích phân có chứa* $\sqrt{a^2-b^2x^2}$, *ta có thể tìm cách giải theo một trong hai hướng sau*

Hướng thứ nhất. Đặt $x=\frac{a}{b}\sin t$; $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

lúc đó $dx=\frac{a}{b}\cos t.dt$; $\sqrt{a^2-b^2x^2}=a\cos t$.

Hướng thứ hai. Đặt $t=\sqrt{a^2-b^2x^2}$.

Thí dụ 1. *(Đổi biến số theo sint).*

Tính $I=\int_0^1 x^2\sqrt{4-3x^2}\,dx$

Lời giải. Đặt $x=\frac{2}{\sqrt3}\sin t$; $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$dx=\frac{2}{\sqrt3}\cos t.dt$; $\sqrt{4-3x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\cos t$;

$x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$. Lúc đó

$$I=\frac{4}{3\sqrt3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}4\sin^2 t.\cos^2 t.dt=\frac{4}{3\sqrt3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 2t.dt$$

$$=\frac{2}{3\sqrt3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 4t).dt=\frac{2}{3\sqrt3}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}.$$

• *Nếu hàm số dưới dấu tích phân có dạng* $f(x)=\frac{1}{(a^2+b^2x^2)^n}$; $n=1, 2, \ldots$ *thì để lấy tích phân hàm $f(x)$ ta đặt* $x=\frac{a}{b}.\mathrm{tg}t$; $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Thí dụ 2. *(Đổi biến số theo tgt).*

Tính $I=\int_0^1\frac{dx}{(1+3x^2)^2}$.

Lời giải. Đặt $x=\frac{1}{\sqrt3}\mathrm{tg}t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì

$dx=\frac{1}{\sqrt3}(1+\mathrm{tg}^2t)dt$; $1+3x^2=1+\mathrm{tg}^2t$.

$x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$. Ta có

$$I=\frac{1}{\sqrt3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{1+\mathrm{tg}^2t}=\frac{1}{\sqrt3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t.dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t).dt=\frac{1}{2\sqrt3}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}.$$

• Nếu hàm số dưới dấu tích phân có dạng $\sqrt{a.e^x+b}$, ta có thể tìm cách giải theo hướng: Đặt $t=\sqrt{ae^x+b}$.

Thí dụ 3. Tính $I=\int_{\ln4}^{\ln12}\sqrt{e^x-3}.dx$

Lời giải. Đặt $t=\sqrt{e^x-3}\Rightarrow e^x=t^2+3$;

$e^x dx=2tdt\Rightarrow dx=\frac{2tdt}{e^x}=\frac{2tdt}{t^2+3}$;

$x=\ln4\Rightarrow t=1; x=\ln12\Rightarrow t=3.$

$$I=\int_1^3\frac{2t^2dt}{t^2+3}=2\int_1^3 dt-6\int_1^3\frac{1}{t^2+3}dt=4-6I_1$$

Tính $I_1=\int_1^3\frac{dt}{t^2+3}$.

Hướng dẫn. Đặt $t=\sqrt3\mathrm{tg}u$, $u\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Phương pháp tích phân từng phần

• *Nếu hàm số dưới dấu hàm số tích phân có dạng $p(x).f(x)$ trong đó $p(x)$ là một đa thức, $f(x)$ là một hàm lượng giác thì cách giải chung là đặt*

$$\begin{cases}u=p(x),\\ dv=f(x).\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=p'(x)dx\\ v=\int f(x).\,dx\end{cases}$$

Thí dụ 4. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\sin x\cos 2x.dx$

Lời giải. $I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin 3x-\sin x).dx$

Đặt $\begin{cases} u=\frac{x}{2} \\ dv=(\sin 3x-\sin x).dx \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{2} \\ v=-\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x \end{cases}$

$I=\frac{x}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-$

$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x\right)dx$

$I=0+\left(\frac{1}{18}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{5}{9}.$

• *Nếu hàm số dưới dấu tích phân có dạng $p(x).f(e^x)$ trong đó $p(x)$ là một đa thức thì cách giải chung là đặt*

$\begin{cases} u=p(x), \\ dv=f(e^x).\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=p'(x)dx \\ v=\int f(e^x).\,dx \end{cases}$

Thí dụ 5. Tính $I=\int_0^1 (2x-1).e^x.dx$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=2x-1 \\ dv=e^x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2dx \\ v=e^x \end{cases}$

$I=(2x-1).e^x\Big|_0^1-\int_0^1 2.e^x.dx$

$=e+1-2e^x\Big|_0^1=-e+3.$

• *Nếu hàm số dưới dấu tích phân có dạng $p(x).ln(f(x))$ trong đó $p(x)$ là một đa thức hoặc là hàm số lượng giác, thì cách giải chung là*

Đặt $\begin{cases} u=\ln(f(x)), \\ dv=p(x).\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{f'(x)}{f(x)}dx \\ v=\int p(x).\,dx. \end{cases}$

Thí dụ 6. Tính $I=\int_0^1 \frac{\ln(x+1)dx}{(x+2)^2}$

$\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ dv=\frac{dx}{(x+2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x+1} \\ v=\frac{-1}{x+2} \end{cases}$

$I=-\frac{1}{x+2}.\ln(x+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

$=-\frac{1}{3}\ln 2+I_1$

Với

$I_1=\int_0^1\frac{dx}{(x+1)(x+2)}=\int_0^1\frac{dx}{x+1}-\int_0^1\frac{dx}{x+2}=\ln\frac{x+1}{x+2}\Big|_0^1$

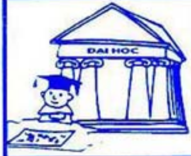
$=\ln\frac{4}{3}.$

Để kết thúc bài báo mời các bạn thử sử dụng hai phương pháp trên để giải các bài tập sau đây.

Tính các tích phân :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x.dx}{1+\sin 2x}$; 2) $\int_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{x.e^x}{\sqrt{e^x+1}}.dx$;

3) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$; 4) $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.



Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Kĩ thuật giải MỘT SỐ BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN của đồ thị hàm số

DƯƠNG ĐỨC LÂM
(SV lớp K51 XD9, ĐHXD Hà Nội)

Bài toán (BT) về sự tiếp xúc, điển hình là BT tiếp tuyến (TT) luôn là vấn đề thời sự trong chương trình toán phổ thông. Đặc biệt, nó thường xuyên xuất hiện trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học – Cao đẳng, và cũng đã nhiều lần được bàn tới trên tạp chí THTT. Để giúp các bạn học sinh có thể ôn tập tốt hơn và có cách nhìn đơn giản hơn về loại toán này, tôi xin giới thiệu với bạn đọc một vài kĩ thuật nhỏ mà tôi học hỏi được ngày còn là học sinh phổ thông.

Trước đây, để giải BT tiếp xúc của hai đồ thị $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ ta thường sử dụng phương pháp nghiệm bội, nghiệp kép. Theo quan điểm mới, để tìm điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị (C) và (C') ta sử dụng phương pháp đạo hàm, đó là giải hệ phương trình (HPT) $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ (I)

Tuy nhiên, rất nhiều BT mà việc giải hệ (I) gặp không ít khó khăn. Hi vọng thông qua một số thí dụ dưới đây, bạn đọc sẽ rút ra được những kinh nghiệm cho mình.

✪ **Thí dụ 1.** *Cho hàm số* $y = \dfrac{x^2 - x + a}{x - 1}$ $(a \neq 0)$.

Tùy theo a hãy viết các phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số kẻ từ gốc tọa độ.

Lời giải. Đường thẳng (d) với hệ số góc k đi qua gốc tọa độ $O(0, 0)$ có PT $y = kx$. (d) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi và chỉ khi hệ sau

có nghiệm: $\begin{cases} x + \dfrac{a}{x-1} = kx & (1) \\ 1 - \dfrac{a}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases}$

Hệ này tương đương với

$$\begin{cases} x - 1 + \dfrac{a}{x-1} = kx - 1 & (3) \\ x - 1 - \dfrac{a}{x-1} = k(x-1) & (4) \end{cases}$$

Trừ theo vế (3) cho (4) ta được

$$\frac{2a}{x-1} = k - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{k-1}{2a}.$$

Kết hợp với (2) ta có $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{k-1}{2a} \\ 1 - \dfrac{(k-1)^2}{4a} = k \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ (k-1)(k-1+4a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = 1 - 4a.$$

Suy ra PTTT cần tìm là $y = (1 - 4a)x$.

Nhận xét. Với các phép biến đổi linh hoạt ta đưa hệ về phương trình ẩn k mà không phải giải thông qua x.

✪ **Thí dụ 2.** *Cho đường cong* (C): $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

Tìm các điểm trên mặt phẳng tọa độ mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến tới (C) và hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau.

Lời giải. Đường thẳng với hệ số góc k đi qua $M(a\,;\,b)$ có PT $y = k(x - a) + b$.

Đường thẳng này là TT của (C) khi và chỉ khi HPT sau có nghiệm

$$\begin{cases} x - 1 + \dfrac{1}{x-1} = k(x-a) + b & (1) \\ 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Hệ này tương đương với

$$\begin{cases} x-1+\dfrac{1}{x-1}=k(x-a)+b & (3)\\ x-1-\dfrac{1}{x-1}=k(x-1) & (4)\end{cases}$$

Lấy (3) trừ (4) theo vế, ta có

$$\frac{1}{x-1}=\frac{k(1-a)+b}{2}.$$

Kết hợp với (2) được

$$\begin{cases} k\neq 1\\ 1-\left(\dfrac{k(1-a)+b}{2}\right)^2=k\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} k\neq 1\\ (a-1)^2k^2+2\left((1-a)b+2\right)k+b^2-4=0.\end{cases}$$

Từ M kẻ được hai TT vuông góc với nhau tới (C) khi và chỉ khi hệ trên có hai nghiệm phân biệt k_1, k_2 và $k_1.k_2=-1$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a-1\neq 0\\ \dfrac{b^2-4}{(a-1)^2}=-1\\ (a-1)^2+2\left((1-a)b+2\right)+b^2-4\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a\neq 1\\ (a-1)^2+b^2=4\\ -a+b+1\neq 0.\end{cases}$$

Suy ra tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tâm I (1; 0), bán kính bằng 2, bỏ đi bốn điểm là giao của các đường thẳng $x=1$ và $-x+y+1=0$ với đường tròn, đó là $A(1\,;2)$, $B(1;-2)$, $C(1+\sqrt{2};\sqrt{2})$, $D(1-\sqrt{2};-\sqrt{2})$.

✪**Thí dụ 3.** *Tìm TT cố định của họ đường cong có phương trình* $y=\dfrac{(m-1)x+m}{x-m}$, $m\neq 0$.

Lời giải. Đường thẳng $y=ax+b$ là TT cố định của đường cong khi và chỉ khi HPT sau có nghiệm với mọi $m\neq 0$

$$\begin{cases} m-1+\dfrac{m^2}{x-m}=ax+b & (1)\\ -\dfrac{m^2}{(x-m)^2}=a & (2)\end{cases}$$

Ta có (2) tương đương với

$$-\frac{m^2}{x-m}=a(x-m) \qquad (3)$$

Trừ theo vế (1) cho (3), và biến đổi ta được

$$\frac{1}{x-m}=\frac{m(a-1)+b+1}{2m^2} \qquad (4)$$

Kết hợp (2) và (4) ta được

$$a=-\frac{1}{4m^2}\left(m(a-1)+b+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2m^2+2(a-1)(b+1)m+(b+1)^2=0.$$

PT này được thỏa mãn với mọi $m\neq 0$. Suy ra

$$\begin{cases} (a+1)^2=0\\ 2(a-1)(b+1)=0\\ (b+1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-1\\ b=-1.\end{cases}$$

Vậy họ đồ thị có một tiếp tuyến cố định là $y=-x-1$.

Để kết thúc bài báo mời các bạn cùng giải một số bài tập sau:

Bài 1. Tìm tất cả các điểm trên đường thẳng $y=7$ mà từ đó kẻ được hai TT hợp với nhau một góc 45° tới đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$.

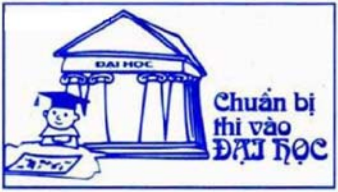
Bài 2. Cho đường cong (C): $y=\dfrac{x^2-4}{x+1}$. Tìm trên trục hoành các điểm mà từ đó vẽ được đúng một TT tới (C).

Bài 3. Cho đường cong (C): $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$. Tìm trên trục tung các điểm mà từ đó vẽ được ít nhất một TT tới (C).

Bài 4. Chứng minh rằng họ đường cong

$$y=\frac{(m-2)x-m^2+2m-4}{x-m}$$

luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.



ỨNG DỤNG SỰ BIẾN THIÊN HÀM SỐ để giải một số bài toán về hệ phương trình

NGUYỄN ANH DŨNG
(*Hà Nội*)

Một số lưu ý chung

1) Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi m thuộc tập giá trị của hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm của phương trình (PT) là số giao điểm của đồ thị hàm số (HS) $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$.

2) Khi gặp hệ PT dạng $\begin{cases} f(x) = f(y) & (1) \\ g(x, y) = 0 & (2) \end{cases}$

Ta có thể tìm lời giải theo một trong hai hướng sau:

Hướng 1. $\mathrm{PT}(1) \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0 \quad (3)$

Tìm cách đưa (3) về một PT tích.

Hướng 2. Xét HS $y = f(t)$. Ta thường gặp trường hợp HS liên tục trong tập xác định của nó.

Nếu HS $y = f(t)$ đơn điệu, thì từ (1), suy ra $x = y$. Khi đó bài toán đưa về giải hoặc biện luận PT (2) theo ẩn x.

Nếu HS $y = f(t)$ có một cực trị tại $t = a$ thì nó thay đổi chiều biến thiên một lần khi qua a. Từ (1) suy ra $x = y$ hoặc x, y nằm về hai phía của a (xem thí dụ 2).

3) Nếu hệ PT ba ẩn x, y, z không thay đổi khi hoán vị vòng quanh đối với x, y, z thì không mất tính tổng quát có thể giả thiết $x = \max(x, y, z)$. Nghĩa là $x \geq y, x \geq z$ (xem thí dụ 3).

Việc sử dụng khảo sát biến thiên của HS để giải hoặc biện luận một số hệ PT tạo nên sự phong phú về thể loại và phương pháp giải toán, phù hợp với các kì thi tuyển sinh vào Đại học. Sau đây là một số thí dụ minh họa.

Giải hệ phương trình

Thí dụ 1. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} e^x - e^y = x - y & (1) \\ \log_2 \dfrac{x}{2} + \log_{\sqrt{2}} 4y^3 = 10 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK $x > 0, y > 0$.

PT (1) được viết lại dưới dạng

$$e^x - x = e^y - y \quad (3)$$

Xét HS $f(t) = e^t - t$, có $f'(t) = e^t - 1 > 0, \forall t > 0$.

Do đó HS $f(t)$ đồng biến khi $t > 0$.

Từ (3) suy ra $\begin{cases} f(x) = f(y) \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$.

Thay vào (2) được $\log_2 \dfrac{x}{2} + \log_{\sqrt{2}} 4x^3 = 10$

$\log_2 x - 1 + 2(2 + 3\log_2 x) = 10$, hay $\log_2 x = 1$.

Hệ có nghiệm duy nhất $(x ; y) = (2 ; 2)$.

Thí dụ 2. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \ln(1 + x) - \ln(1 + y) = x - y & (1) \\ 2x^2 - 5xy + y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK $x > -1, y > -1$. PT(1) của hệ được viết lại dưới dạng

$$\ln(1 + x) - x = \ln(1 + y) - y \quad (3)$$

Xét HS $f(t) = \ln(1 + t) - t$, với $t \in (-1; +\infty)$ có

$f'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 = \dfrac{-t}{1+t}$.

Ta thấy $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=0$.

HS $f(t)$ đồng biến trong $(-1\ ;\ 0)$ và nghịch biến trong $(0\ ;+\infty)$.

Ta có $(3) \Leftrightarrow f(x)=f(y)$. Lúc đó $x=y$ hoặc $xy<0$ (nếu x, y thuộc cùng một khoảng đơn điệu thì $x=y$, trong trường hợp ngược lại thì $xy<0$).

Nếu $xy<0$ thì vế trái của (2) luôn dương. PT không thỏa mãn.

Nếu $x=y$, thay vào PT (2), ta được nghiệm của hệ là $x=y=0$.

✪Thí dụ 3. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^3-3x^2+5x+1=4y \\ y^3-3y^2+5y+1=4z \\ z^3-3z^2+5z+1=4x \end{cases}$$

Lời giải. Xét HS $f(t)=t^3-3t^2+5t+1$, có $f'(t)=3t^2-6t+5>0, \forall t$.

Do đó HS $f(t)$ luôn đồng biến.

Hệ PT có dạng $\begin{cases} f(x)=4y \\ f(y)=4z \\ f(z)=4x \end{cases}$

Vì hệ không thay đổi khi hoán vị vòng quanh đối với x, y, z nên có thể giả thiết $x \ge y, x \ge z$.

Nếu $x>y$ thì $f(x)>f(y) \Rightarrow y>z \Rightarrow f(y)>f(z)$ $\Rightarrow z>x$. Mâu thuẫn.

Tương tự nếu $x>z$ ta cũng đi đến mâu thuẫn, suy ra $x=y=z$.

Từ một PT trong hệ, ta có $x^3-3x^2+x+1=0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-1)=0$

Ta được nghiệm của hệ: $x=y=z=1$;

$x=y=z=1\pm\sqrt{2}$.

Nhận xét. Xét hệ PT có dạng $\begin{cases} f(x)=g(y) \\ f(y)=g(z) \\ f(z)=g(x). \end{cases}$

Nếu các HS $f(t)$, $g(t)$ cùng đồng biến (hoặc cùng nghịch biến) thì lí luận như trên, ta suy ra $x=y=z$.

Biện luận hệ phương trình

✪Thí dụ 4. *Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm*

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{3-y}=m & (1) \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{3-x}=m & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK $-1 \le x, y \le 3$.

Trừ theo vế của (1) cho (2) và chuyển vế, ta được:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}=\sqrt{y+1}-\sqrt{3-y} \qquad (3)$$

Dễ thấy HS $f(t)=\sqrt{t+1}-\sqrt{3-t}$ đồng biến trên $(-1\ ;\ 3)$ nên từ (3) suy ra $x=y$.

Khi đó từ (1) có $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=m$.

Xét HS $g(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$, ta có $g(x)$ liên tục trên $[-1\ ;3]$ và

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}},\ g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Ta có $g(-1)=2,\ g(1)=2\sqrt{2},\ g(3)=2$.

Từ đó $2 \le g(x) \le 2\sqrt{2}$.

Vậy hệ có nghiệm khi $2 \le m \le 2\sqrt{2}$.

✪Thí dụ 5. *Chứng minh rằng với mọi $m>0$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất*

$$\begin{cases} 3x^2y-2y^2-m=0 & (1) \\ 3y^2x-2x^2-m=0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Nếu $y \le 0$ thì vế trái của (1) âm, PT không thoả mãn, suy ra $y>0$. Tương tự có $x>0$.

Trừ theo vế của (1) cho (2), ta được

$$3x^2y-3y^2x+2x^2-2y^2=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(3xy+2x+2y)=0$$

Vì x, $y>0$ nên $3xy+2x+2y>0$. Ta được $x-y=0$ hay $x=y$.

Khi đó, từ PT(1) có $3x^3-2x^2=m$.

Xét HS $f(x)=3x^3-2x^2$, có $f'(x)=9x^2-4x$.

Ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\dfrac{4}{9}$.

HS đồng biến trong $(-\infty\ ;\ 0)$ và $\left(\dfrac{4}{9};+\infty\right)$, nghịch biến trong $\left(0;\dfrac{4}{9}\right)$, $f_{CĐ}=f(0)=0$, $f_{CT}=f\left(\dfrac{4}{9}\right)<0$.

Vậy với mọi $m>0$, PT $f(x)=0$ có một nghiệm $x>0$.

Do đó với $m>0$, hệ có nghiệm duy nhất $x=y>0$ (bạn đọc tự vẽ đồ thị hoặc lập bảng biến thiên của HS để kiểm tra kết quả trên).

Bài luyện tập

1. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \cos x=1-\dfrac{y^2}{2} \\ \cos y=1-\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=\sin y \\ y=\sin z \\ z=\sin x \end{cases}$

c) $\begin{cases} \ln x-\ln y=x-y \\ 2^{x+y}.3^{\frac{x+1}{y}}=36 \end{cases}$

2. Tìm m để các hệ PT sau có nghiệm

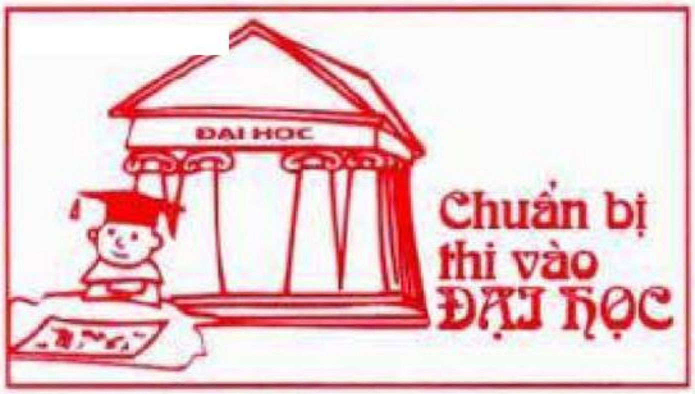
a) $\begin{cases} x-y=\cos x-\cos y \\ 2\sin x-3\cos y=m \end{cases}$

b) $\begin{cases} \cos x+\cos y=-1 \\ \cos 3x+\cos 3y=m. \end{cases}$

3. Giả sử x, y là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} x+y=m \\ x^2+y^2=m. \end{cases}$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của x^3+y^3.



MỘT SỐ DẠNG TOÁN về cực đại, cực tiểu của hàm số

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

I. Một số kiến thức chung về cực trị của các hàm số trong chương trình phổ thông

1) *Hàm số* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $\Delta' = b^2 - 3ac$.

Nếu $\Delta' \leq 0$ thì y' không đổi dấu, HS không có cực trị.

Nếu $\Delta' > 0$ thì PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua nghiệm nên hàm số có cực đại (CĐ) và cực tiểu (CT).

Hai điểm CĐ và CT đối xứng với nhau qua điểm uốn.

Chia đa thức y cho y', ta được $y = y'.\,q(x) + r(x)$, trong đó $q(x)$, $r(x)$ là các nhị thức bậc nhất và lần lượt là thương, số dư của phép chia nói trên.

Giả sử đồ thị có điểm CĐ, CT là $(x_1\,;\,y_1)$, $(x_2\,;\,y_2)$.

Vì $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$ nên tọa độ các điểm CĐ, CT thỏa mãn $y = r(x)$. Đó chính là PT đường thẳng đi qua hai điểm CĐ, CT của đồ thị.

2) *Hàm số* $y = ax^4 + bx^2 + c\quad (a \neq 0)$
Ta có $y' = 2x(2ax^2 + b)$.

Nếu $ab \geq 0$, hàm số có một cực trị tại $x = 0$.

Nếu $ab < 0$, hàm số có ba điểm cực trị. Vì đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng nên ba điểm cực trị luôn tạo thành một tam giác cân.

3) *Hàm số* $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ (a và $a' \neq 0$).

Ta có $y' = \dfrac{aa'x^2 + 2ab'x + bb' - a'c}{(a'x + b')^2}$.

Gọi tam thức trên tử số của y' là $f(x)$. Hàm số có cực trị khi PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $x_0 = -\dfrac{b'}{a'}$.

Ta được điều kiện $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(x_0) \neq 0. \end{cases}$

Hai điểm CĐ, CT đối xứng với nhau qua giao điểm của hai đường tiệm cận.

Với hàm số có dạng $y = \dfrac{u}{v}$ thì $y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

Khi $y' = 0$ ta có $u'v = v'u$ hay $\dfrac{u}{v} = \dfrac{u'}{v'}$.

Do đó tọa độ các điểm CĐ, CT thỏa mãn $y = \dfrac{2a}{a'}.x + \dfrac{b'}{a'}$. Đó chính là PT đường thẳng đi qua hai điểm CĐ, CT của đồ thị.

Trong phần áp dụng dưới đây, các bước tìm điều kiện để hàm số có cực trị cũng như các tính toán chi tiết xin dành cho bạn đọc tự thực hiện.

II. Áp dụng

1. Hàm số đa thức

✪**Thí dụ 1.** *Cho hàm số* $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$. *Tìm m để hàm số có CĐ và CT đồng thời hai điểm CĐ, CT của đồ thị cách đều đường thẳng (d) có phương trình* $y = x - 1$.

Lời giải. $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số có CĐ, CT khi $m > -3$.

Chia đa thức y cho y', ta được

$$y = y'\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)-2\left(\frac{m}{3}+1\right)x+2-\frac{m}{3}.$$

Giả sử đồ thị có điểm CĐ, CT là $A(x_1\,;\,y_1)$, $B(x_2\,;\,y_2)$.

PT đường thẳng đi qua hai điểm CĐ, CT là

$$y=-2\left(\frac{m}{3}+1\right)x+2-\frac{m}{3} \quad (d_1)$$

Các điểm CĐ, CT cách đều đường thẳng (d) trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. $(d_1) \,//\, (d)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{m}{3}+1\right)=1 \\ 2-\frac{m}{3}\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{9}{2}<-3 \quad \text{(loại)}.$$

Trường hợp 2. Trung điểm của đoạn AB nằm trên (d).

Tọa độ trung điểm AB là $E:\begin{cases} x=\frac{x_1+x_2}{2}=1 \\ y=-m \end{cases}$

Vì $E\,(1\,;\,-m)\in(d)$, suy ra $m=0$.

✪Thí dụ 2. *Cho hàm số* $y=x^4-2mx^2+m-1$.

Tìm m để đồ thị của hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.

Lời giải. Ta có $y'=4x(x^2-m)$

$y'=0 \Leftrightarrow x=0;\ x^2=m$.

Hàm số có ba cực trị khi $m>0$.

Tọa độ ba điểm cực trị là $A(0\,;\,m-1)$, $B(-\sqrt{m}\,;-m^2+m-1)$, $C(\sqrt{m}\,;-m^2+m-1)$.

Ta luôn có $AB=AC$, nên tam giác ABC đều khi $AB^2=BC^2$. Lúc đó

$$m^4+m=4m \Leftrightarrow m=\sqrt[3]{3}.$$

Lưu ý. Các bạn hãy tự đề xuất và giải bài toán trên trong trường hợp tam giác ABC là vuông cân hoặc có góc bằng 120^0.

2) Hàm số phân thức

✪Thí dụ 3. *Cho hàm số*

$$y=\frac{x^2-(3m+2)x+m+4}{x-1}.$$

Tìm m để hàm số có CĐ và CT và khoảng cách giữa hai điểm CĐ, CT của đồ thị nhỏ hơn 3.

Lời giải. Ta có $y'=\frac{x^2-2x+2m-2}{(x-1)^2}$.

Hàm số có CĐ, CT khi $m<\frac{3}{2}$. Giả sử đồ thị có các điểm CĐ, CT là $A(x_1\,;\,y_1)$, $B(x_2\,;\,y_2)$. Khi đó

$y_1=2x_1-3m-2\,;\quad y_2=2x_2-3m-2$.

Theo định lí Viète $x_1+x_2=2\,;\ x_1x_2=2m-2$.

Ta có $AB^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=5(x_1-x_2)^2$

$AB^2=5\,[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=60-40m$

$AB<3 \Leftrightarrow AB^2=60-40m<9 \Leftrightarrow m>\frac{51}{40}$.

Đáp số : $\frac{51}{40}<m<\frac{3}{2}$.

✪Thí dụ 4. *Cho hàm số* $y=\frac{x^2+mx+3}{x+1}$.

Tìm m để hàm số có CĐ và CT đồng thời hai điểm CĐ, CT của đồ thị nằm về hai phía của đường thẳng (d): $2x+y-1=0$.

Lời giải. $y'=\frac{x^2+2x+m-3}{(x+1)^2}$.

Hàm số có CĐ, CT khi $m<4$. Giả sử đồ thị có điểm CĐ, CT là $A(x_1\,;\,y_1)$, $B(x_2\,;\,y_2)$.

Ta có $y_1=2x_1+m\,;\quad y_2=2x_2+m$.

A, B nằm về hai phía của đường thẳng (d) khi:

$(2x_1+y_1-1)(2x_2+y_2-1)<0$

$\Leftrightarrow (4x_1+m-1)(4x_2+m-1)<0$

$\Leftrightarrow 16x_1x_2+4(m-1)(x_1+x_2)+(m-1)^2<0$.

Theo định lí Viète $x_1+x_2=-2\,;\ x_1x_2=m-3$.

Thay vào BPT trên, ta được $m^2+6m-39<0$

$\Rightarrow -3-4\sqrt{3}<m<-3+4\sqrt{3}$.

Lưu ý. Hai điểm A, B nằm về hai phía của đường $f(x,y)=0$ khi $f(x_1,y_1).f(x_2,y_2)<0$.

✪Thí dụ 5. *Cho hàm số*

$$y=\frac{x^2-(m+3)x+3m+1}{x-1}.$$

Tìm m để hàm số có CĐ và CT và các giá trị CĐ, CT của hàm số cùng âm.

Lời giải. $y'=\frac{x^2-2x-2m+2}{(x-1)^2}$.

Hàm số có CĐ và CT khi $m>\frac{1}{2}$. Giả sử đồ thị có điểm CĐ và CT là $(x_1\,;\,y_1)$, $(x_2\,;\,y_2)$.

Ta có $y_1=2x_1-m-3\,;\quad y_2=2x_2-m-3$.

Theo định lí Viète $x_1+x_2=2\,;\ x_1x_2=-2m+2$.

Từ đó $\begin{cases} y_1+y_2=-2m-2 \\ y_1y_2=m^2-6m+5. \end{cases}$

Ta có $y_{CĐ}<0$, $y_{CT}<0$ khi

$$\begin{cases} y_1+y_2=-2m-2<0 \\ y_1y_2=m^2-6m+5>0. \end{cases}$$

Giải hệ trên và kết hợp với điều kiện $m>\frac{1}{2}$, ta được $\frac{1}{2}<m<1$ hoặc $m>5$.

Bài tập làm thêm

Bài 1. Cho hàm số $y=(x-m)^2(x-1)$.

Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và tìm quỹ tích điểm cực tiểu của đồ thị.

Bài 2. Cho hàm số $y=x^3-x^2+mx+1$.

Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa mãn $\frac{y_{CĐ}}{x_{CĐ}}+\frac{y_{CT}}{x_{CT}}<3$.

Bài 3. Cho hàm số $y=\frac{x^2-(2m+5)x+m+3}{x+1}$.

Tìm m để hàm số có cực trị tại điểm $x>1$. Hãy xác định đó là điểm cực đại hay cực tiểu của đồ thị.