

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2(x^4 - 1)(x^2 + 2) + 1$

2) Biết $4a^2 + b^2 = 5ab$ với $2a > b > 0$. Tính giá trị biểu thức: $C = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Câu 2. (2,0 điểm)

Giải các phương trình sau:

1) $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$

2) $\frac{9x}{2x^2 + x + 3} - \frac{x}{2x^2 - x + 3} = 8$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$

2) Cho đa thức $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$. Với giá trị nguyên nào của x thì giá trị của đa thức $f(x)$ chia hết cho giá trị của đa thức $x^2 + 2$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho O là trung điểm của đoạn AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D .

1) Chứng minh $AB^2 = 4.AC.BD$

2) Kẻ OM vuông góc CD tại M . Chứng minh $AC = CM$

3) Từ M kẻ MH vuông góc AB tại I . Chứng minh BC đi qua trung điểm MH .

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 1$

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1.1

$$\begin{aligned} & x^2(x^4 - 1)(x^2 + 2) + 1 \\ &= x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^2 + 2) + 1 \\ &= (x^4 + x^2)(x^4 + x^2 - 2) + 1 \\ &= (x^4 + x^2)^2 - 2(x^4 + x^2) + 1 \\ &= (x^4 + x^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned} 4a^2 + b^2 &= 5ab \\ \Leftrightarrow (a - b)(4a - b) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ 4a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 4a = b \end{cases}$$

Do $2a > b > 0$ nên $4a = b$ loại

$$\text{Với } a = b \text{ thì } C = \frac{ab}{4a^2 - b^2} = \frac{a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{1}{3}$$

Câu 2.

2.1

* Với $x \geq 1$ (*) ta có phương trình

$$x^2 - 3x + 2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (Thỏa *)}$$

* Với $x < 1$ (**) ta có phương trình

$$x^2 - 3x + 2 + 1 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$$

$$+ x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (không thỏa mãn điều kiện (**))}$$

$$+ x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (không thỏa mãn điều kiện (**))}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$

2.2

Xét $x = 0$ không phải là nghiệm

Xét $x \neq 0$

$$\frac{9x}{2x^2 + x + 3} - \frac{x}{2x^2 - x + 3} = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2x+1+\frac{3}{x}} - \frac{1}{2x-1+\frac{3}{x}} = 8$$

Đặt $2x + \frac{3}{x} = t$, ta có phương trình:

$$\frac{9}{t+1} - \frac{1}{t-1} = 8$$

$$PT \Leftrightarrow 8t^2 - 8t + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{3}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{95}{16} = 0$$

Suy ra phương trình vô nghiệm.

Câu 3.

3.1

Ta có:

$$x^2 + 2xy + 7(x+y) + 2y^2 + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8xy + 28x + 28y + 8y^2 + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 2y + 7)^2 + 4y^2 = 9(*)$$

Ta thấy $(2x + 2y + 7)^2 \geq 0$ nên $4y^2 \leq 9 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{9}{4}$ do y nguyên nên $y^2 \in \{0; 1\}$
 $\Rightarrow y \in \{0; -1\}$

Với $y = 0$ thay vào (*) ta được: $(2x + 7)^2 = 9$ tìm được $x \in \{-2; -5\}$

Với $y = 1$ thay vào (*) ta có: $(2x + 9)^2 = 5$, không tìm được x nguyên

Với $y = -1$ thay vào (*) ta có $(2x + 5)^2 = 5$ không tìm được x nguyên

Vậy $(x; y) = \{(-2; 0); (-5; 0)\}$

3.2

Chia $f(x)$ cho $x^2 + 2$ được thương là $x - 3$ dư $x + 2$

Để $f(x)$ chia hết cho $x^2 + 2$ thì $x + 2$ chia hết cho $x^2 + 2$

$\Rightarrow (x + 2)(x - 2)$ chia hết cho $x^2 + 2$

$\Rightarrow x^2 - 4$ chia hết cho $x^2 + 2$

$\Rightarrow x^2 + 2 - 6$ chia hết cho $x^2 + 2$

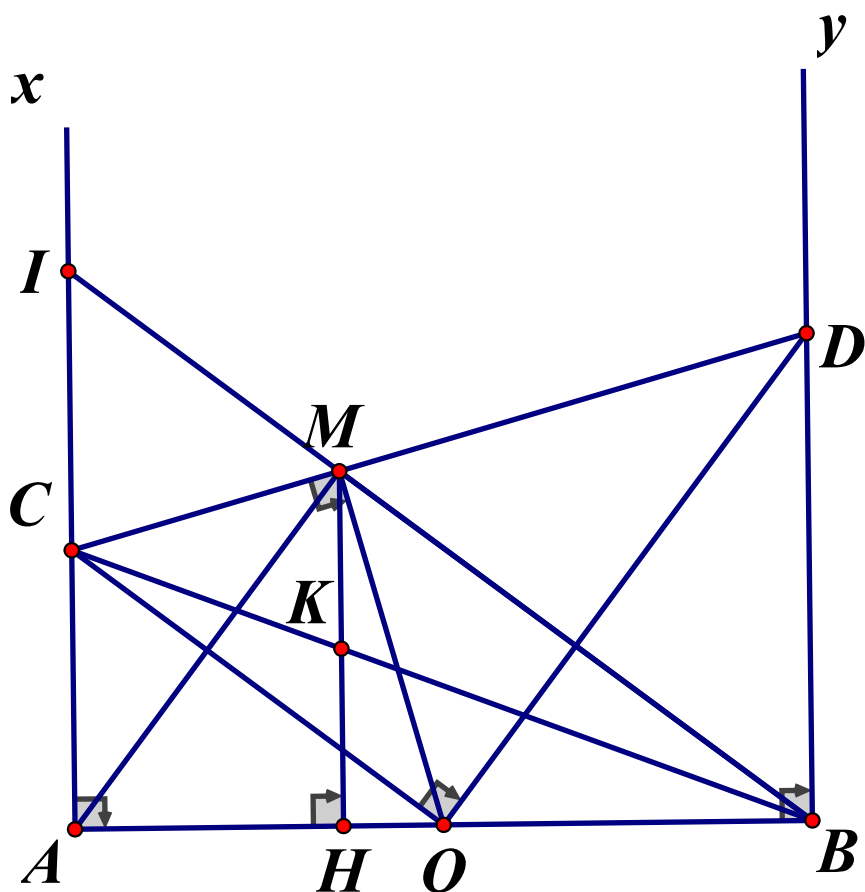
$\Rightarrow 6 : (x^2 + 2) \Rightarrow x^2 + 2$ là ước của 6

Mà $x^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow x^2 + 2 \in \{3; 6\} \Rightarrow x \in \{\pm 1; \pm 2\}$

Thử lại ta thấy $x = 1; x = -2$ thỏa mãn

Vậy với $x = 1; x = -2$ thì $f(x)$ chia hết cho $x^2 + 2$

Câu 4.



1) Chứng minh $\Delta OAC \sim \Delta DBO(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{OA}{DB} = \frac{AC}{OB} \Rightarrow OA \cdot OB = AC \cdot BD$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{2} \cdot \frac{AB}{2} = AC \cdot BD \Rightarrow AB^2 = 4 \cdot AC \cdot BD (dfcm)$$

2) Theo câu a ta có $\Delta OAC \sim \Delta DBO(g.g) \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OB}$

Mà $OA = OB \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OA} \Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{OD}{OA}$

Chứng minh $\Delta OCD \sim \Delta ACO(c.g.c) \Rightarrow \angle OCD = \angle ACO$

Chứng minh $\Delta OAC = \Delta OMC(ch - gn) \Rightarrow AC = MC(dfcm)$

3) Ta có: $\Delta OAC = \Delta OMC \Rightarrow OA = OM; CA = CM \Rightarrow OC$ là trung trực của AM
 $\Rightarrow OC \perp AM$

Mặt khác: $OA = OM = OB \Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M

$\Rightarrow OC \parallel BM$ (Vì cùng vuông góc với AM) hay $OC \parallel BI$

Chứng minh được C là trung điểm của AI

$$\frac{MK}{IC} = \frac{BK}{BC} = \frac{KH}{AC}$$

Do $MH \parallel AI$ theo hệ quả Ta let ta có:

Mà $IC = AC \Rightarrow MK = HK \Rightarrow BC$ đi qua trung điểm của MH (đpcm)

Câu 5.

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} = (x+y+z) \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) = \left(\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \right) + \left(\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \right) + \frac{21}{16}$$

Theo BĐT Cô si ta có: $\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \geq \frac{1}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = 2x$

Tương tự: $\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \geq \frac{1}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow z = 4x$

$\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \geq 1$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow z = 2y$

$\Rightarrow P \geq \frac{49}{16}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$

Vậy $MinP = \frac{49}{16}$ khi với $x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$