

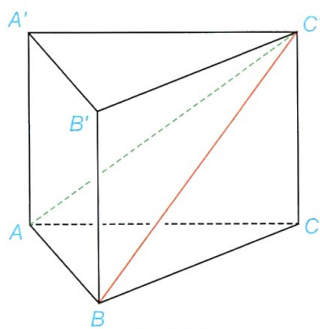
BÀI 26. KHOẢNG CÁCH

CHƯƠNG 7. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Tính khoảng cách

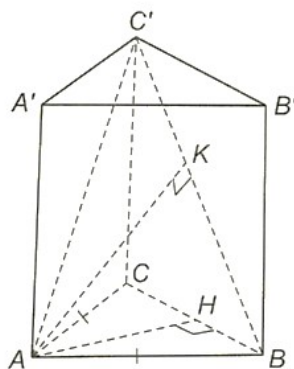
Câu 1. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a, AA' = h$ (H.7.77).



Hình 7.77

- a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$.
 b) Tam giác ABC' là tam giác gì? Tính khoảng cách từ A đến BC' .

Lời giải

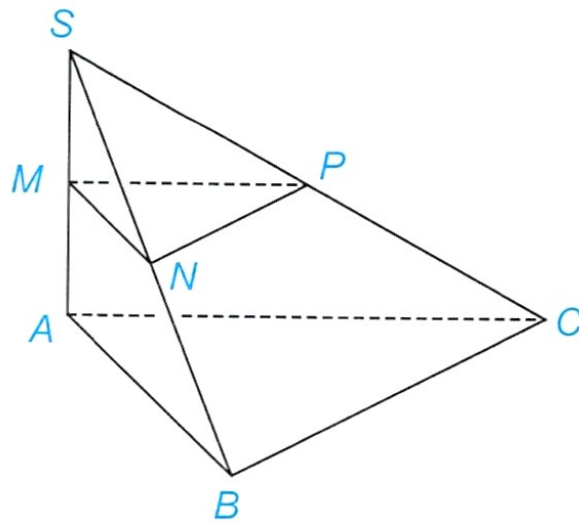


Hình 7.24

- a) $AH \perp BC$ tại H thì $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
 b) $AB \perp (ACC'A') \Rightarrow AB \perp AC' \Rightarrow \Delta ABC'$ vuông tại A .
 $AC' = \sqrt{a^2 + h^2}, BC' = \sqrt{2a^2 + h^2}$.

Kẻ AK vuông góc với BC' tại K , ta tính được $AK = \frac{a\sqrt{a^2 + h^2}}{\sqrt{2a^2 + h^2}}$.

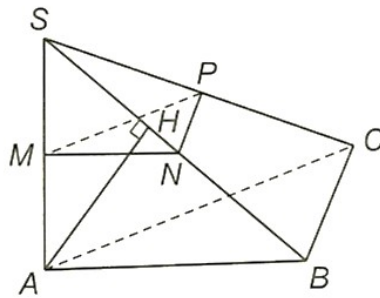
Câu 2. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA = h$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của SA, SB, SC .



Hình 7.81

- a) Tính $d((MNP), (ABC))$ và $d(NP, (ABC))$.
 b) Giả sử tam giác ABC vuông tại B và $AB = a$. Tính $d(A, (SBC))$.

Lời giải



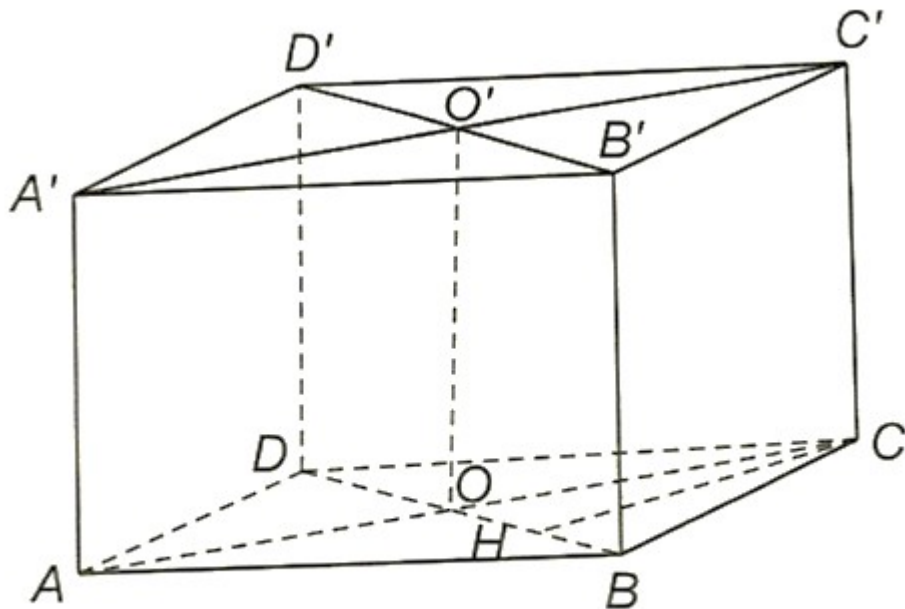
Hình 7.25

- a) $d((MNP), (ABC)) = AM = \frac{h}{2}; d(NP, (ABC)) = \frac{h}{2}$.
 b) $AH \perp SB$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$.

Câu 3. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AA' = a, AB = b, BC = c$.

- a) Tính khoảng cách giữa CC' và $(BB'D'D)$.
 b) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa AC và $B'D'$.

Lời giải



Hình 7.29

$$d(CC', (BDD'B')) = CH = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

a)

$$d(AC, B'D') = OO' = a$$

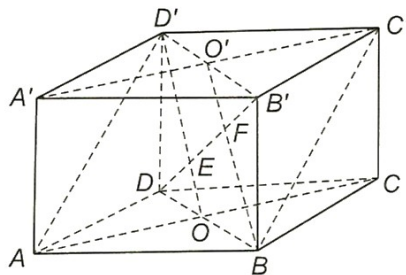
b)

Câu 4. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh a .

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(D'AC)$ và $(BC'A)$ song song với nhau và DB' vuông góc với hai mặt phẳng đó.

b) Xác định các giao điểm E, F của DB' với $(D'AC), (BC'A)$. Tính $d((D'AC), (BC'A))$.

Lời giải

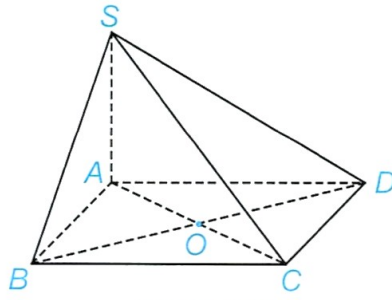


Hình 7.31

$$\begin{aligned} \text{a) } & (D'AC) \parallel (BC'A), (BC'A) \perp DB' \\ & AC \perp (BDD'B') \Rightarrow AC \perp DB'; AD' \perp (DAB') \\ & \Rightarrow AD' \perp DB' \Rightarrow DB' \perp (ACD') \end{aligned}$$

$$\text{b) } d((D'AC), (BAC')) = EF = \frac{1}{3}DB' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

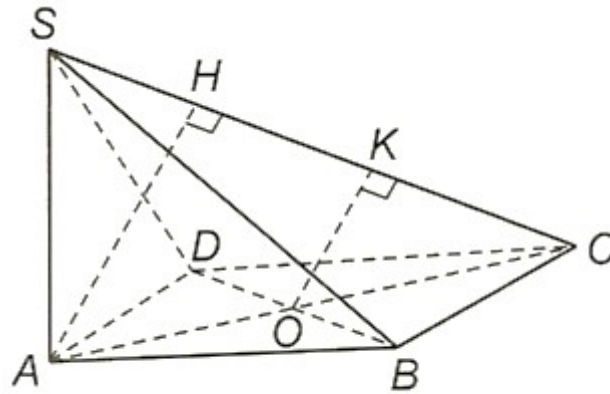
Câu 5. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{2}$.



Hình 7.89

- Tính khoảng cách từ A đến SC .
- Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.
- Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa BD và SC .

Lời giải



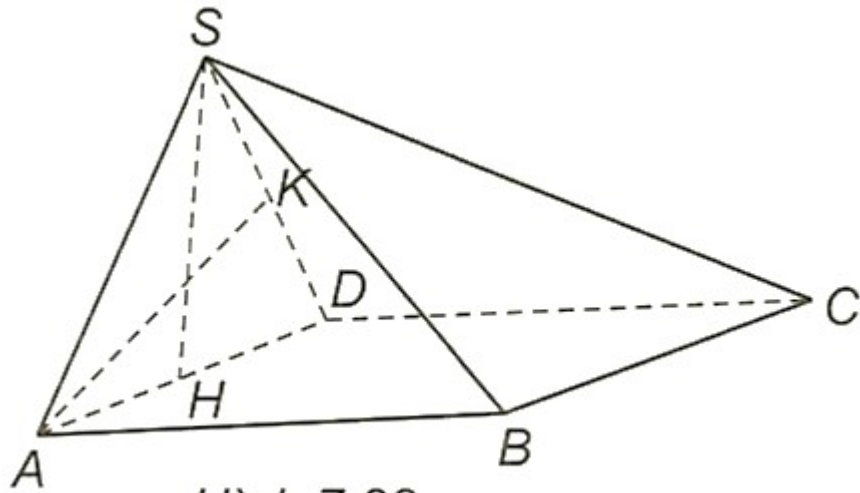
Hình 7.27

- $d(A, SC) = a$.
- $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$.
- $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OK, OK \perp SC$
 $\Rightarrow d(BD, SC) = OK = \frac{AH}{2} = \frac{a}{2}$.

Câu 6. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là một tam giác đều và $(SAD) \perp (ABCD)$.

- Tính chiều cao của hình chóp.
- Tính khoảng cách giữa BC và (SAD) .
- Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa AB và SD .

Lời giải



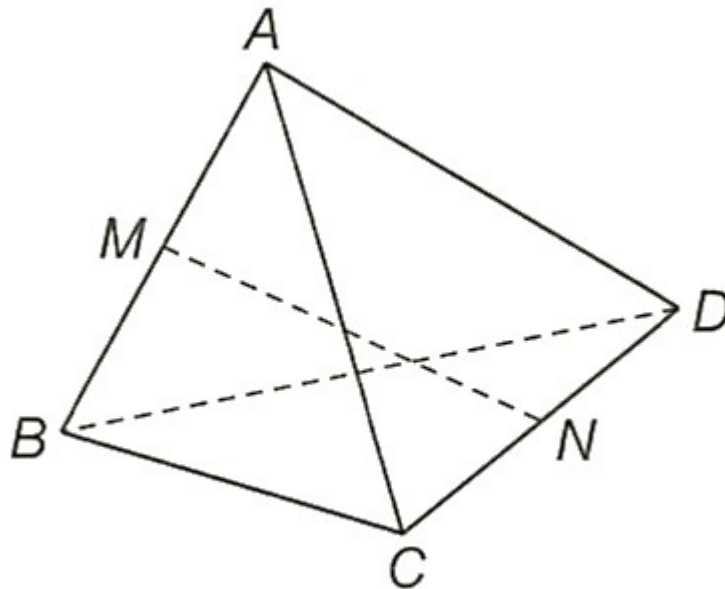
Hình 7.28

- a) $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
 b) $d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = AB = a$
 c) $d(AB, SD) = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 7. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a . Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, CD . Chứng minh rằng:

- a) MN là đường vuông góc chung của AB và CD .
 b) Các cặp cạnh đối diện trong tứ diện $ABCD$ đều vuông góc với nhau.

Lời giải



Hình 7.30

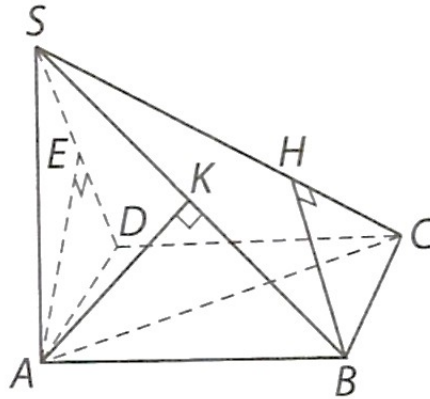
- a) $AB \perp DM, AB \perp CM \Rightarrow AB \perp (MCD) \Rightarrow AB \perp MN$.
 Tương tự: $CD \perp MN$.
 b) $AB \perp (MCD) \Rightarrow AB \perp CD$. Tương tự cho các cặp còn lại.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC vuông tại B , biết $SA = AB = BC = a$. Tính theo a khoảng cách:

- a) Từ điểm B đến đường thẳng SC .
 b) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .
 c) Giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC .

Lời giải

(H.7.14)



Hình 7.14

- a) Ta có: $BC \perp AB, BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra $BC \perp SB$. Kẻ $BH \perp SC$ tại H thì $d(B, SC) = BH$.

Theo định lí Pythagore, ta tính được

$SB = AC = a\sqrt{2}, SC = a\sqrt{3}$. Xét tam giác SBC vuông tại B có đường cao BH .

Khi đó: $BH = \frac{SB \cdot BC}{SC} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Vậy $d(B, SC) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

- b) Kẻ $AK \perp SB$ tại K , có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AK$. Suy ra $AK \perp (SBC)$, do đó $d(A, (SBC)) = AK$. Xét tam giác SAB vuông tại A có đường cao AK .

Khi đó $AK = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

- c) Dựng hình bình hành $ABCD$, vì tam giác ABC vuông cân tại B nên $ABCD$ là hình vuông. Vì $CD \perp AD, CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAD)$. Kẻ $AE \perp SD$ tại E , mà $AE \perp CD$ nên $AE \perp (SCD)$ (1).

Vì mặt phẳng (SCD) chứa SC và song song với AB nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $d(AB, SC) = AE$. Vì tam giác SAD vuông cân tại A , có đường cao AE nên

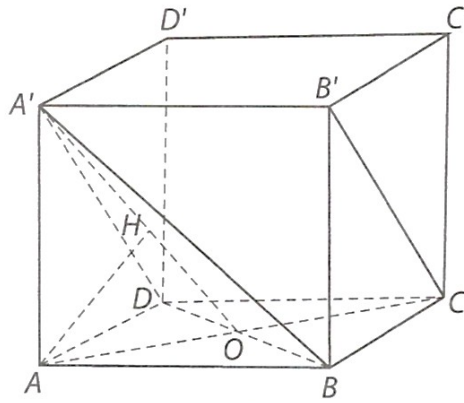
$AE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $d(AB, SC) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính theo a khoảng cách:

- a) Từ điểm A đến mặt phẳng (BDA') .
 b) Giữa hai đường thẳng song song BC và $A'D'$.
 c) Giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và $B'C'$.

Lời giải

(H.7.15)



Hình 7.15

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD , kẻ AH vuông góc với $A'O$ tại H . Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , có tâm O nên $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, tam giác AOA' vuông tại A , đường cao AH nên ta tính được $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Do đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

b) Ta có $A'D \parallel BC$ và $BC \perp (ABB'A')$ nên $BC \perp A'B$.
Do đó $A'B = d(A, BC) = d(A'D, BC) = a\sqrt{2}$.

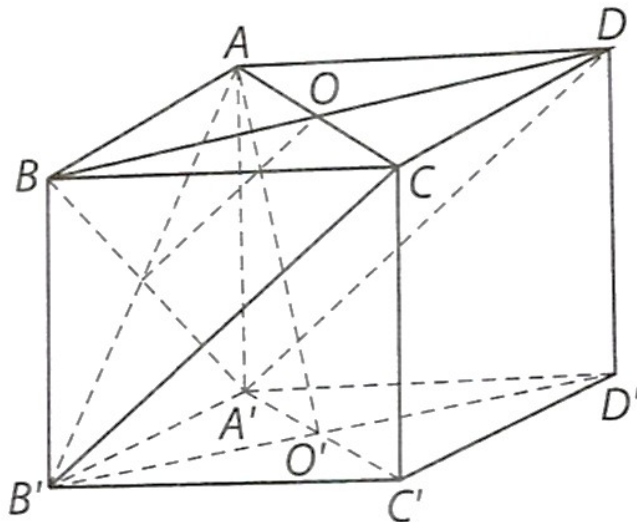
c) Vì $BC \parallel A'D$ và $A'D \subset (A'BD), BC \notin (A'BD)$ nên $BC \parallel (A'BD)$.

Do đó $d(AB, BC) = d(BC, (A'BD)) = d(C, (A'BD))$. Vì AC cắt mặt phẳng $(A'BD)$ tại O là trung điểm của AC nên $d(C, (A'BD)) = d(A, (A'BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính theo a khoảng cách:

- Giữa hai đường thẳng AB và $C'D'$.
- Giữa đường thẳng AC và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.
- Từ điểm A đến đường thẳng $B'D'$.
- Giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$.

Lời giải



Hình 7.46

a) Vì BC' vuông góc với cả hai đường thẳng AB và $C'D'$ nên $d(AB, C'D') = BC' = a\sqrt{2}$.

b) Vì $AC \parallel (A'B'C'D')$ nên

$$d(AC, (A'B'C'D')) = d(A, (A'B'C'D')) = AA' = a.$$

c) Gọi O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$, ta có

$AO' \perp B'D'$, theo định lý Pythagore, áp dụng cho tam giác $AA'O'$ vuông tại A' thì $AO' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Do đó

$$d(A, B'D') = AO' = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

d) Ta có: $d(AC, B'D') = d(AC, (A'B'C'D')) = d(A, (A'B'C'D')) = AA' = a$.

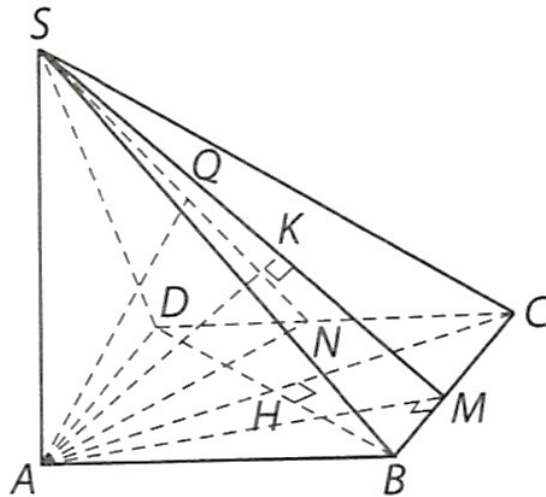
Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$.
 Tính theo a khoảng cách:

a) Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .

b) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

c) Giữa hai đường thẳng AB và SC .

Lời giải



Hình 7.47

a) Kẻ $BH \perp AC$ tại H , mà $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BH$, suy ra $BH \perp (SAC)$. Do đó

$$d(B, (SAC)) = BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

b) Kẻ $AM \perp BC$ tại M và $AK \perp SM$ tại K thì $AK \perp (SBC)$, suy ra $d(A, (SBC)) = AK$.

Ta có: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{19}{12a^2}$, suy ra $AK = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}$. Vậy $d(A, (SBC)) = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}$.

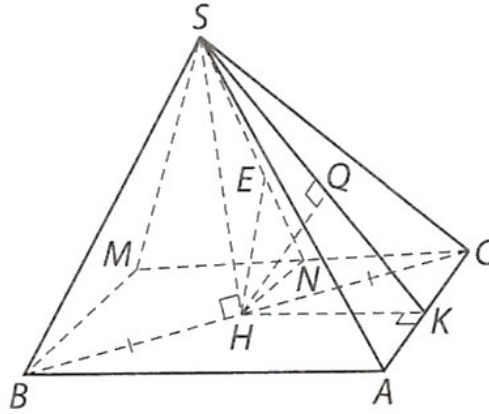
c) Dựng hình bình hành $ABCD$ thì $AB \parallel (SCD)$ và mặt phẳng (SCD) chứa SC nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCD))$. Mà $d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$, tính tương tự như câu b ta được:

$$d(A, (SCD)) = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}. \text{ Vậy } d(AB, SC) = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}.$$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , góc ABC bằng 60° , biết tam giác SBC đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính theo a khoảng cách:

- Từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) .
- Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .
- Giữa hai đường thẳng AB và SC .

Lời giải



Hình 7.48

- Kẻ SH vuông góc với BC tại H thì $SH \perp (ABC)$, suy ra $d(S, (ABC)) = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
 - Kẻ HK vuông góc với AC tại K , HQ vuông góc với SK tại Q thì $d(H, (SAC)) = HQ$.
- Ta có: $AB = \frac{a}{2}$, $HK = \frac{a}{4}$ và tam giác SHK vuông tại H , đường cao HQ nên $HQ = \frac{SH \cdot HK}{SK} = \frac{a\sqrt{39}}{26}$.

- Lại có H là trung điểm của BC nên $d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC)) = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.
- Dựng hình bình hành $ABMC$, chứng minh được $ABMC$ là hình chữ nhật. Khi đó $AB \parallel (SCM)$ và mặt phẳng (SMC) chứa SC nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCM)) = d(B, (SCM)) = 2d(H, (SCM))$.
- Kẻ HN vuông góc với CM tại N , HE vuông góc với SN tại N thì $HE \perp (SCM)$, suy ra

$$d(H, (SCM)) = HE. \text{ Ta có: } HN = \frac{BM}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}, \text{ tam giác } SHN \text{ vuông tại } H, \text{ đường cao } HE \text{ nên}$$

$$HE = \frac{SH \cdot HN}{SN} = \frac{a\sqrt{15}}{10}. \text{ Vậy } d(AB, SC) = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Câu 13. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = a\sqrt{2}, AA' = a\sqrt{3}$. Tính theo a khoảng cách:

- Từ điểm A đến mặt phẳng $(BDD'B')$.
- Giữa hai đường thẳng BD và CD' .

Lời giải

a) Kẻ AH vuông góc với $B'C'$ tại H thì $d(A, B'C') = AH$.

Ta có: $AB' = AC' = B'C' = a\sqrt{2}$ nên $AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Vậy $d(A, B'C') = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

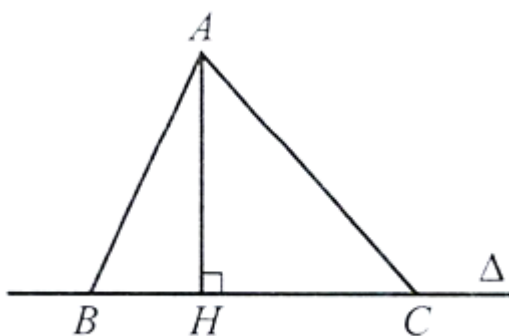
b) Vì $BC \parallel (AB'C')$ nên $d(BC, AB') = d(BC, (AB'C')) = d(C, (AB'C'))$. Mà CA' cắt AC' tại trung điểm của CA' nên $d(C, (AB'C')) = d(A', (AB'C'))$.

Đặt $d(A', (AB'C')) = h$ thì $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'C'^2} = \frac{3}{a^2}$, suy ra $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Vậy $d(BC, AB') = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 15. Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng Δ , hai điểm B, C thuộc Δ sao cho $BC = a$, diện tích tam giác ABC bằng S . Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ theo a, S .

Lời giải

(Hình 33)



Hình 33

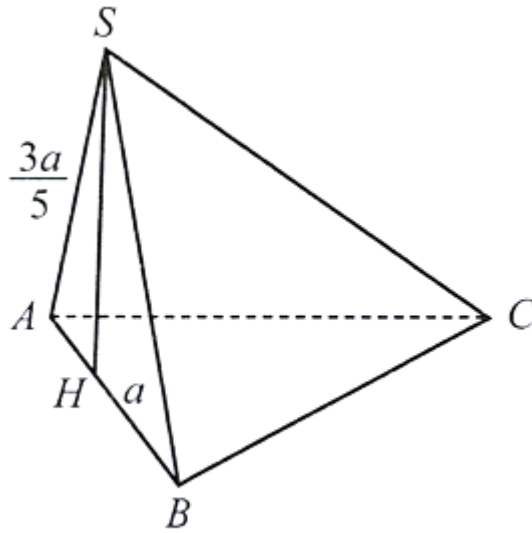
Gọi H là hình chiếu của A trên BC . Khi đó $d(A, \Delta) = AH$. Vì diện tích tam giác ABC bằng S nên:
 $S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AH \cdot a$. Suy ra: $d(A, \Delta) = AH = \frac{2S}{a}$.

Vậy khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ bằng $\frac{2S}{a}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy, tam giác SAB vuông tại S , $AB = a, SA = \frac{3a}{5}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) .

Lời giải

(Hình 34)



Hình 34

Gọi H là hình chiếu của S trên AB .

Do $(SAB) \perp (ABC), (SAB) \cap (ABC) = AB, SH \subset (SAB)$ và $SH \perp AB$ nên $SH \perp (ABC)$. Khi đó $d(S, (ABC)) = SH$. Xét tam giác SAB vuông tại S có:

$$SB^2 = AB^2 - SA^2 = a^2 - \left(\frac{3a}{5}\right)^2 = \frac{16a^2}{25} \Rightarrow SB = \frac{4a}{5}.$$

Suy ra
$$d(S, (ABC)) = SH = \frac{SA \cdot SB}{AB} = \frac{\frac{3a}{5} \cdot \frac{4a}{5}}{a} = \frac{12a}{25}.$$

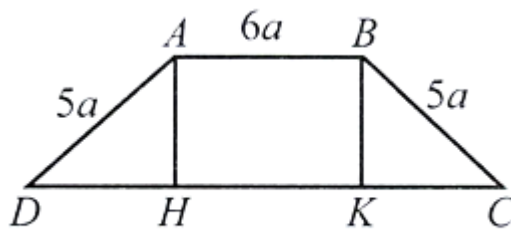
Vậy khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{12a}{25}$.

Câu 17. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD, AB = 6a, CD = 14a, AD = BC = 5a$.

- a) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên CD . Tính độ dài các đoạn thẳng HK, DH, CK .
 b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

Lời giải

(Hình 35)



Hình 35

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, vì $AH \perp CD, BK \perp CD$ nên $AH \parallel BK$. Mà $AB \parallel HK, \angle AHK = 90^\circ$ nên $ABKH$ là hình chữ nhật. Suy ra $HK = AB = 6a$.

Ta có $\triangle ADH = \triangle BCK$ nên

$$DH = CK = \frac{CD - HK}{2} = \frac{14a - 6a}{2} = 4a.$$

b) Vì $AB \parallel CD, AH \perp CD$ nên $d(AB, CD) = AH$. Xét tam giác ADH vuông tại H có $AH^2 = AD^2 - DH^2 = (5a)^2 - (4a)^2 = 9a^2$, suy ra $d(AB, CD) = AH = 3a$. Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $3a$.

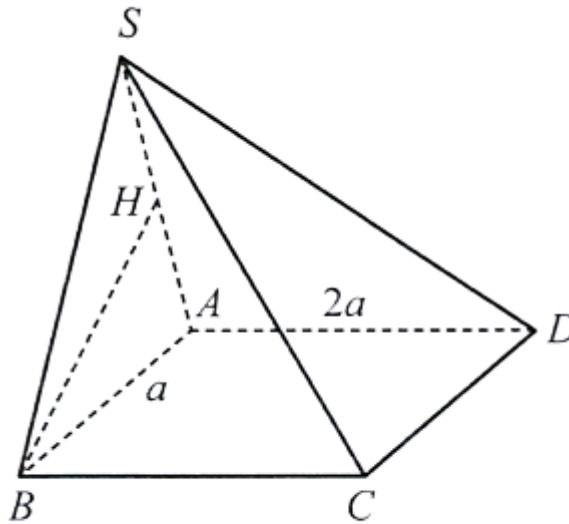
Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, SAB là tam giác đều, $(SAB) \perp (ABCD), AB = a, AD = 2a$.

a) Chứng minh rằng $CD \parallel (SAB)$. Tính khoảng cách giữa CD và mặt phẳng (SAB) .

b) Chứng minh rằng $BC \parallel (SAD)$. Tính khoảng cách giữa BC và mặt phẳng (SAD) .

Lời giải

(Hình 36)



Hình 36

a) Vì $CD \parallel AB, CD \notin (SAB)$ và $AB \subset (SAB)$ nên $CD \parallel (SAB)$.

Vì $D \in CD$ nên $d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB))$. Do $(SAB) \perp (ABCD), (SAB) \cap (ABCD) = AB, DA \subset (ABCD)$ và $DA \perp AB$ nên $DA \perp (SAB)$. Suy ra $d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB)) = DA = 2a$. Vậy khoảng cách giữa CD và mặt phẳng (SAB) bằng $2a$.

b) Vì $BC \parallel AD, BC \notin (SAD)$ và $AD \subset (SAD)$ nên $BC \parallel (SAD)$. Vì $B \in BC$ nên $d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD))$.

Gọi H là hình chiếu của B trên SA . Vì $AD \perp (SAB), AD \subset (SAD)$ nên $(SAD) \perp (SAB)$. Mà $(SAB) \cap (SAD) = SA, BH \subset (SAB)$ và $BH \perp SA$ nên $BH \perp (SAD)$.

Xét tam giác SAB đều có $BH = AB \sin \widehat{BAS} = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy khoảng cách giữa BC và mặt phẳng (SAD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

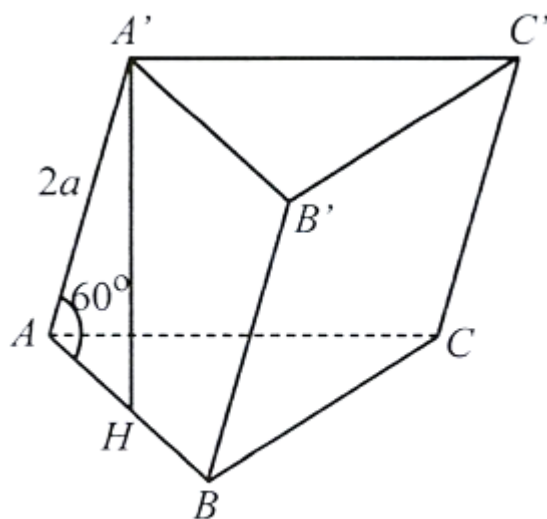
Câu 19. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có

$(A'ABB') \perp (ABC), AA' = 2a, \widehat{A'AB} = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$.

Lời giải

(Hình 37)

Vì $A \in (A'B'C')$ và $(ABC) \parallel (A'B'C')$ nên $d((ABC), (A'B'C')) = d(A, (ABC))$.



Hình 37

Gọi H là hình chiếu của A' trên AB .

Vì $(A'ABB') \perp (ABC)$, $(A'ABB') \cap (ABC) = AB$, $A'H \subset (A'ABB')$ và $A'H \perp AB$ nên $A'H \perp (ABC)$.

Xét tam giác $A'AH$ vuông tại H có $A'H = A'A \sin \widehat{AA'H} = 2a \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$. Suy ra

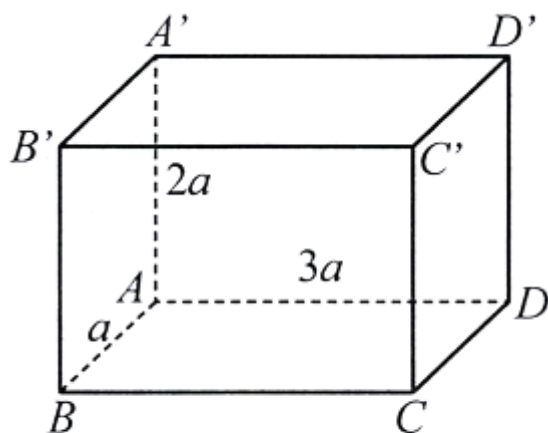
$d((ABC), (A'B'C')) = d(A', (ABC)) = A'H = a\sqrt{3}$. Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ bằng $a\sqrt{3}$.

Câu 20. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 3a, AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

- AB và $B'C'$;
- AA' và BC ;
- BB' và $C'D'$.

Lời giải

(Hình 39)



Hình 39

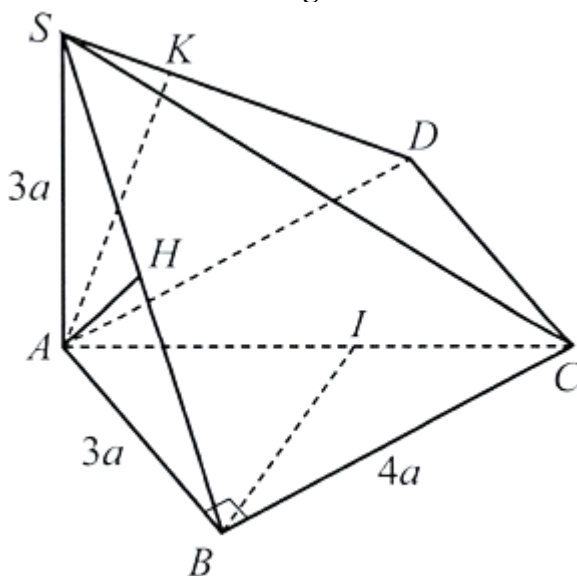
a) Vì $BB' \perp AB$ và $BB' \perp B'C'$ nên

$d(AB, B'C') = BB' = AA' = 2a$. b) Vì $AB \perp AA'$ và $AB \perp BC$ nên $d(AA', BC) = AB = a$.
 c) Vì $B'C' \perp BB'$ và $B'C' \perp C'D'$ nên $d(BB', C'D') = B'C' = AD = 3a$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), AB \perp BC, SA = AB = 3a, BC = 4a$. Tính khoảng cách:

- Từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) ;
- Giữa hai đường thẳng SA và BC ;
- Từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) ;
- Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) ;
- Giữa hai đường thẳng AB và SC .

Lời giải



Hình 80

- $d(C, (SAB)) = BC = 4a$
- $d(SA, BC) = AB = 3a$

c) Gọi H là hình chiếu của A trên SB . Khi đó, $AH \perp (SBC)$. Suy ra $d(A, (SBC)) = AH = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

d) Gọi I là hình chiếu của B trên AC . Khi đó, $BI \perp (SAC)$. Suy ra

$$d(B, (SAC)) = BI = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{3a \cdot 4a}{5a} = 2,4a.$$

e*) Lấy điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành, gọi K là hình chiếu của A trên SD . Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật do $AB \perp BC$. Suy ra $CD \perp (SAD)$ nên $CD \perp AK$. Do đó, $AK \perp (SDC)$. Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AK$.

$$AK = \frac{SA \cdot AD}{SD} = \frac{3a \cdot 4a}{\sqrt{(3a)^2 + (4a)^2}} = 2,4a$$

Xét tam giác SAD vuông tại A có:

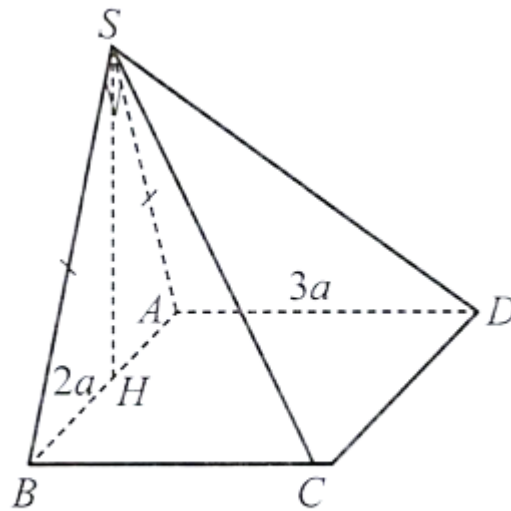
Vậy $d(AB, SC) = 2,4a$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a, AD = 3a$, tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính khoảng cách:

- Từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) ;
- Giữa hai đường thẳng SB và CD ;

- c) Giữa hai đường thẳng BC và SA ;
 d) Từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



Hình 81

- a) $d(C, (SAB)) = BC = 3a$.
 b) Vì $CD // (SAB)$ nên $d(SB, CD) = d(CD, (SAB)) = BC = 3a$.
 c) Vì $BC // (SAD)$ nên $d(BC, SA) = d(B, (SAD))$.
 Vì $SB \perp SA, SB \perp AD$ nên $SB \perp (SAD)$, suy ra $d(B, (SAD)) = SB$.

$$AB^2 = 2SB^2 \Rightarrow SB = \sqrt{\frac{AB^2}{2}} = \sqrt{\frac{(2a)^2}{2}} = a\sqrt{2}.$$

Ta có:

$$\text{Vậy } d(BC, SA) = a\sqrt{2}.$$

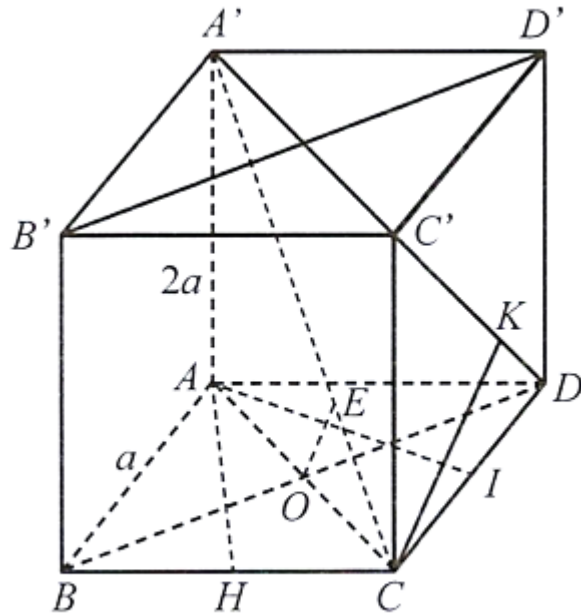
- d) Gọi H là trung điểm AB . Vì tam giác SAB cân nên $SH \perp AB$.

$$\text{Mà } (SAB) \perp (ABCD) \text{ nên } SH \perp (ABCD). \text{ Vậy } d(S, (ABCD)) = SH = \frac{AB}{2} = a.$$

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , AC cắt BD tại O , $SO \perp (ABCD), SA = 2a$. Tính khoảng cách:

- a) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) ;
 b) Giữa hai đường thẳng SO và CD ;
 c) Từ điểm O đến mặt phẳng (SCD) ;
 d*) Giữa hai đường thẳng AB và SD .

Lời giải



Hình 83

a) Gọi H là hình chiếu của A trên BC . Khi đó, $AH \perp (BCC'B')$. Vì tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(A, (BCC'B')) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$.

Gọi I là hình chiếu của A trên CD . Vì tam giác ACD đều cạnh a nên $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó, $d((ABB'A'), (CDD'C')) = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

c*) Gọi E là hình chiếu của O trên AC . Vì $BD \perp (AA'AC)$ nên $BD \perp OE$. Suy ra $d(BD, AC) = OE$.
Ta có:

$$AC = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

Vì $\triangle CEO \sim \triangle CAA'$ nên

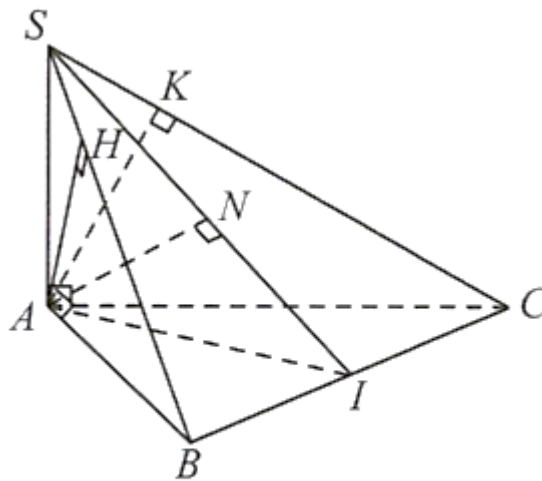
$$\frac{OE}{AA'} = \frac{OC}{AC} \Rightarrow OE = \frac{AA' \cdot OC}{AC} = \frac{2a \cdot \frac{a}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $d(BD, AC) = OE = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy bằng 30° . Gọi I là trung điểm của BC . Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng:

- SB ;
- SC ;
- SI .

Lời giải



Hình 6

Ta có: $SA \perp (ABC)$ nên $(SC, (ABC)) = (SC, AC) = \sphericalangle SCA = 30^\circ$.

Xét tam giác SAC vuông tại A , ta có:

$$SA = AC \tan 30^\circ = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

a) Vẽ $AH \perp SB (H \in SB)$, ta có $d(A, SB) = AH$.

Xét tam giác SAB vuông tại A , ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AH = a.$$

b) Vẽ $AK \perp SC (K \in SC)$, ta có $d(A, SC) = AK$.

Xét tam giác SAC vuông tại A , ta có:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AK = a.$$

c) Vẽ $AN \perp SI (N \in SI)$, ta có $d(A, SI) = AN$.

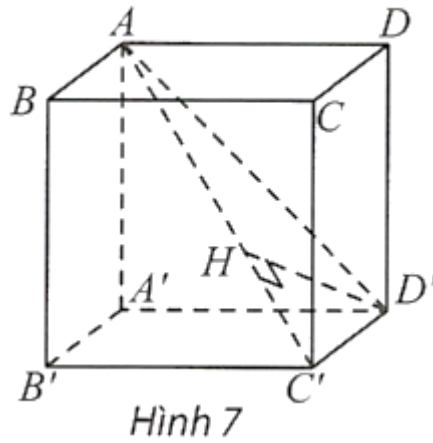
Vì ABC là tam giác đều cạnh $2a$ nên $AI = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SAI vuông tại A , ta có:

$$\frac{1}{AN^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{13}{12a^2} \Rightarrow AN = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Câu 26. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách từ đỉnh D' đến đường chéo AC' .

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của D' trên AC' .

Ta có: $C'D' \perp AD', C'D' \perp DD'$
 $\Rightarrow C'D' \perp (ADD'A) \Rightarrow C'D' \perp AD$

Do tam giác ADD' vuông cân tại D nên $AD' = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác $D'AC'$ vuông tại D' , ta có:

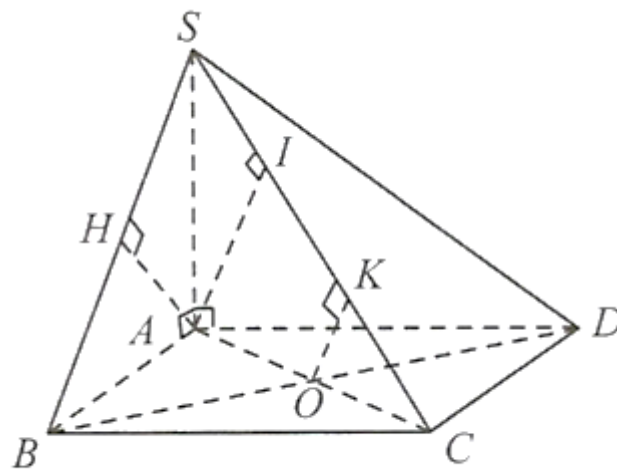
$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DA'^2} + \frac{1}{DC'^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow DH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy $d(D', AC') = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

- a) SB và AD ;
- b) BD và SC .

Lời giải



Hình 8

a) Vẽ đường cao AH của tam giác SAB .

Ta có: $AD \perp AB$ và $AD \perp SA$
 $\Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AH$.

Do đó AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD nên $d(SB, AD) = AH$.

Tam giác SAB vuông cân tại A nên $SB = a\sqrt{2}$.

AH là đường cao của tam giác SAB nên $AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AD, SB) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có: $BD \perp AC$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Gọi O là tâm của hình vuông cân $ABCD$.

Trong mặt phẳng (SAC) , kẻ $OK \perp SC, K \in SC$.

Ta có: $OK \perp SC$ và $OK \perp BD$ (do $BD \perp (SAC)$) nên OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

Suy ra $d(BD, SC) = OK = \frac{1}{2}AI$ (với I là hình chiếu của A trên SC).

Tam giác ABC vuông tại B nên $AC = a\sqrt{2}$.

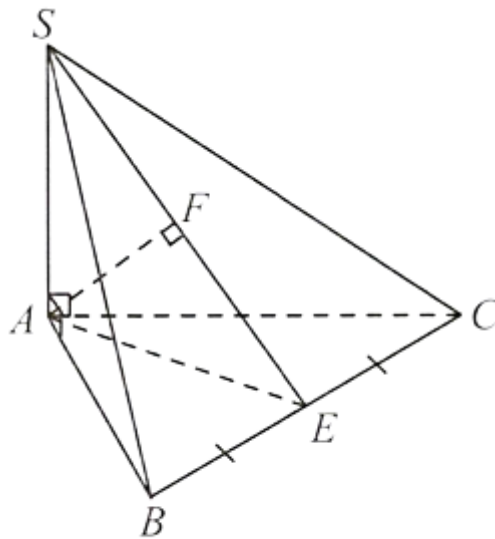
Xét tam giác SAC vuông tại A , ta có

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy $d(BD, SC) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a , biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải



Hình 1

Gọi E là trung điểm của BC thì $BC \perp AE$ (vì ΔABC đều). Ta có $BC \perp SA$ và $BC \perp AE \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow (SBC) \perp (SAE)$.

Trong mặt phẳng (SAE) , vẽ $AF \perp SE (F \in SE)$.

Suy ra $AF \perp (SBC)$ hay $d(A, (SBC)) = AF$.

Xét ΔSAE vuông tại A :

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{2}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

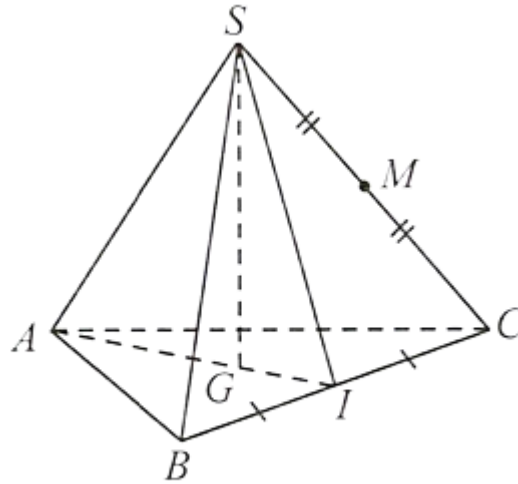
Vậy $d(A, (SBC)) = AF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 29. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , M là trung điểm của SC .

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) .

b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAG) .

Lời giải



Hình 2

a) Do $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SG \perp (ABC)$ hay $d(S, (ABC)) = SG$.

Tam giác ABC là tam giác đều cạnh $3a$ nên $AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SAG vuông tại G nên

$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a.$$

Vậy $d(S, (ABC)) = a$.

b) Vì $SC \cap (SAG) = S$ nên $\frac{d(M, (SAG))}{d(C, (SAG))} = \frac{MS}{CS} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow d(M, (SAG)) = \frac{1}{2} d(C, (SAG))$$

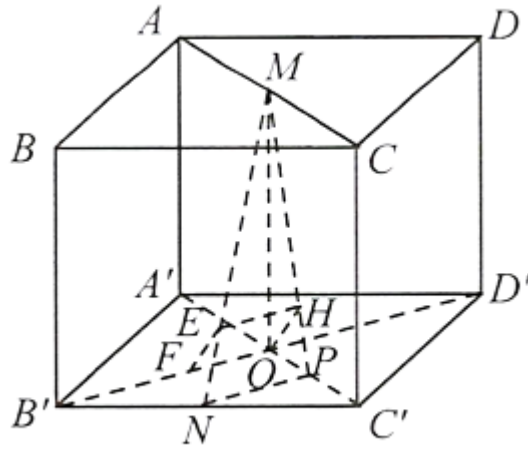
Gọi I là trung điểm của BC .

Ta có: $CB \perp AI$ và $CB \perp SG \Rightarrow CB \perp (SAG)$ và $CB \cap (SAG) = I$.

Do đó $d(C, (SAG)) = CI = \frac{1}{2} BC = \frac{3a}{2}$. Vậy $d(M, (SAG)) = \frac{3a}{4}$.

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$.

Lời giải



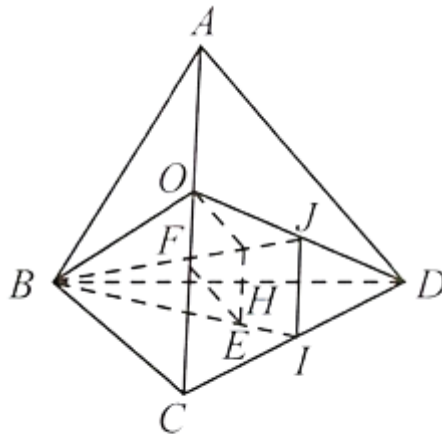
Hình 3

$B'D'$ cắt $A'C'$ tại O . Gọi P là trung điểm của OC' . Vẽ $OH \perp MP, HE \parallel NP, EF \parallel OH$.
Ta có: $d(MN, B'D') = EF = OH$.

Xét tam giác vuông MOP , ta có $OM = a, OP = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, suy ra $OH = \frac{a}{3}$.

Câu 31. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $\sqrt{11}$. Gọi I là trung điểm của cạnh CD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BI .

Lời giải



Hình 4

Gọi O là trung điểm AC, J là trung điểm OD . Vẽ $OH \perp BJ, HE \parallel AC, EF \parallel OH$.
Ta có $d(AC, BJ) = EF = OH$.

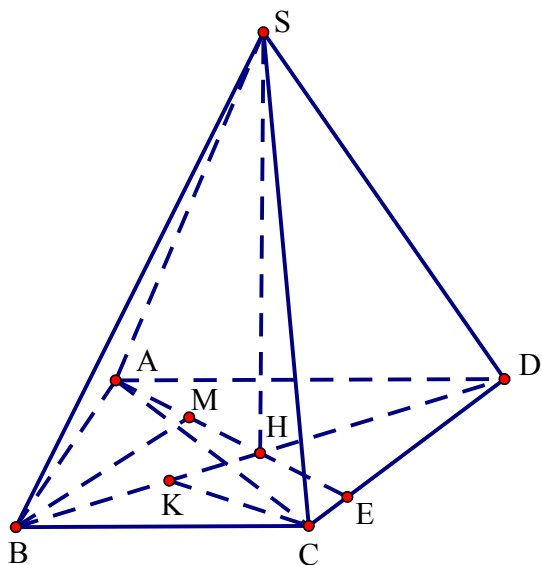
Xét tam giác OBD cân tại O , ta có
 $BD = \sqrt{11}, OB = OD = \frac{\sqrt{33}}{2}, BJ = \frac{\sqrt{11}}{4}$,

$$S_{\triangle OBD} = \frac{11\sqrt{2}}{4}, OH = \sqrt{2}$$

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = 2a; BC = \frac{3a}{2}; AD = 3a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của BD . Biết góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách

- a) từ C đến mặt phẳng (SBD) .
 b) từ B đến mặt phẳng (SAH) .

Lời giải



a) Dựng $CK \perp BD \Rightarrow d(C, (SBD)) = CK$

Ta có $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = a\sqrt{13}$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot d(D, BC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot 2a = \frac{3a^2}{2}$$

$$d = CK = \frac{2S_{BCD}}{BD} = \frac{3a^2}{a\sqrt{13}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$$

Do đó

b) Dựng $BM \perp AH \Rightarrow d(B, (SAH)) = BM$

$$AH = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

Lại có (trung tuyến ứng với cạnh huyền).

$$S_{ABH} = \frac{1}{2} AB \cdot d(H, AB) = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{AD}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

$$\Rightarrow BM = \frac{2S_{ABH}}{AH} = \frac{3a^2}{\frac{a\sqrt{13}}{2}} = \frac{6a}{\sqrt{13}}$$

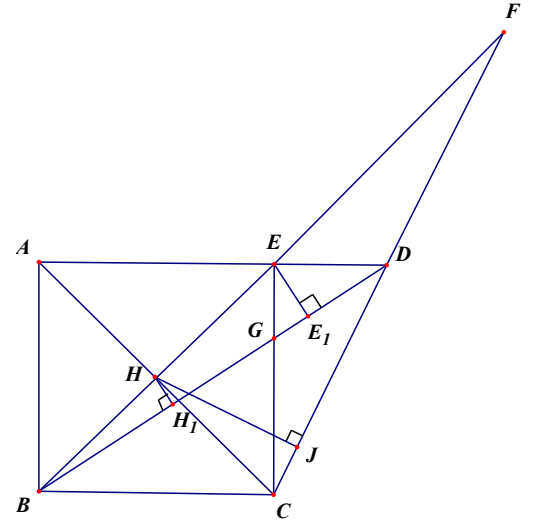
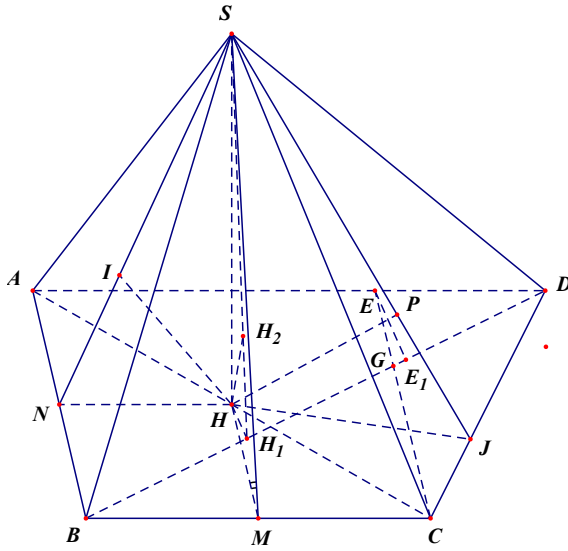
Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = 2a$; $AD = 3a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AC . Biết góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách:

a) Từ H đến (SAB) .

b) Từ H đến (SCD) .

c) Từ H đến (SBD) .

Lời giải



a) Từ H đến (SAB) .

Gọi M là trung điểm BC , suy ra góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là góc $SMH = 60^\circ$ và $SH = HM \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Gọi N là trung điểm của AB , I là hình chiếu của H lên SN , suy ra $d(H, (SAB)) = HI$.

Xét $\triangle SHN$ vuông tại H , có $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HN^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow HN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Từ H đến (SCD) .

Kẻ $HJ \perp CD, (J \in CD)$, lấy $E \in AD$ sao cho $ED = a$, gọi $F = BE \cap CD$.

Xét $\triangle CHF$ vuông tại H , có $\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HF^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{18a^2} = \frac{5}{9a^2}$.

Gọi P là hình chiếu của H lên SJ , suy ra $d(H, (SCD)) = HP$.

Xét $\triangle SHJ$ vuông tại H , có $\frac{1}{HP^2} = \frac{1}{HJ^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{5}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{8}{9a^2} \Rightarrow HP = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

c) Từ H đến (SBD) .

Gọi $G = EC \cap BD \Rightarrow G$ là trọng tâm $\triangle BCF \Rightarrow GE = \frac{1}{3}CE = \frac{2a}{3}$.

Gọi E_1 là hình chiếu của E lên BD , ta có $\frac{1}{EE_1^2} = \frac{1}{EG^2} + \frac{1}{ED^2} = \frac{9}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{13}{4a^2}$
 $\Rightarrow EE_1 = \frac{2a\sqrt{13}}{13}$.

Gọi H_1 là hình chiếu của H lên $BD \Rightarrow HH_1 = \frac{1}{2}EE_1 = \frac{a\sqrt{13}}{13}$.

Gọi H_2 là hình chiếu của H lên SH_1 , suy ra $d(H, (SBD)) = HH_2$.

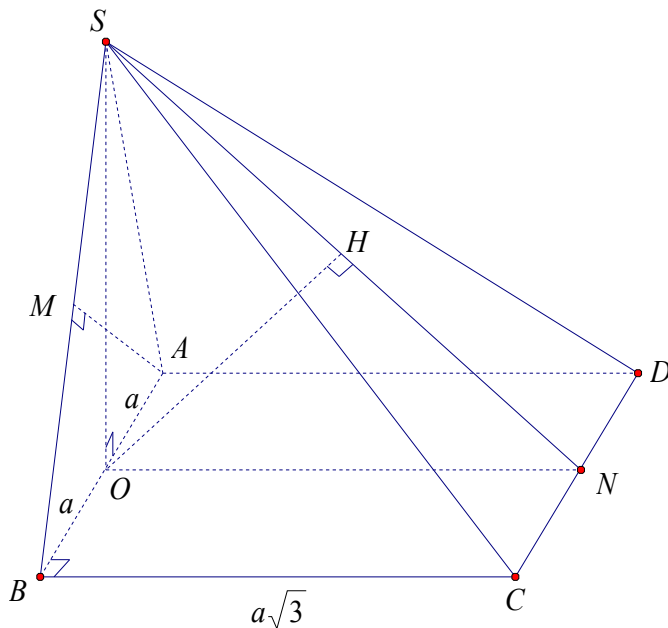
Xét $\triangle SHH_1$ vuông tại H , có $\frac{1}{HH_2^2} = \frac{1}{HH_1^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{13}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{40}{3a^2} \Rightarrow HH_2 = \frac{a\sqrt{30}}{20}$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AB = 2a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

- Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .
- Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) .
- Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .
- Gọi M là trung điểm của AB . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCM) và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SDM) .

Lời giải

a)



Gọi O là trung điểm cạnh AB ; M là trung điểm SB , ta có $AM \perp SB$ (1)

$$\begin{cases} (ABCD) \perp (SAB) \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \Rightarrow SO \perp (ABCD) \\ SO \perp AB \end{cases}$$

Ta lại có

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AM \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AM = a\sqrt{3}$.

b) Gọi N là trung điểm CD , kẻ $OH \perp SN$ (3)

$$\begin{cases} CD \perp ON \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SON) \Rightarrow CD \perp OH \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O, (SCD)) = OH$

mà $d(A, (SCD)) = d(O, (SCD)) = OH$

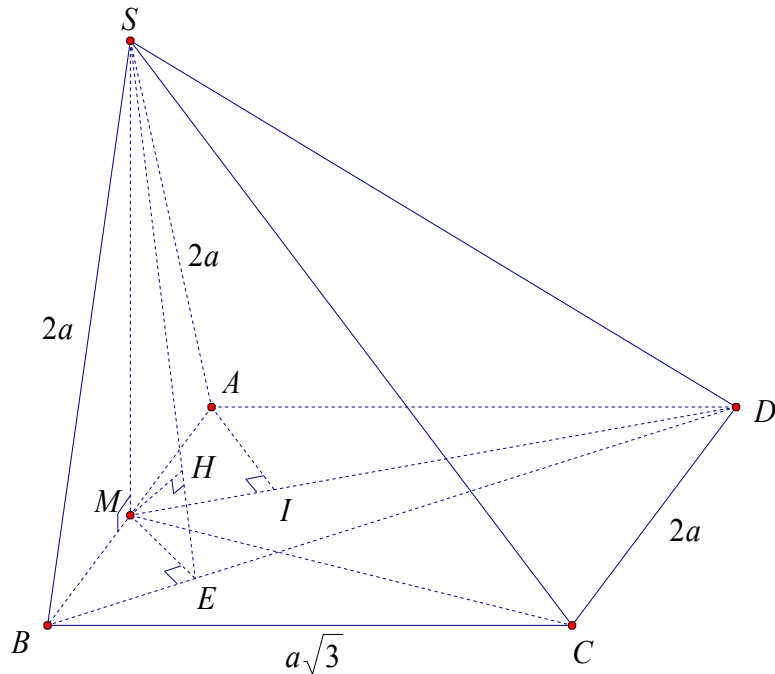
$$\text{Ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{2}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Vậy $d(A, (SCD)) = OH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

c) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .

Kẻ $ME \perp BD; MH \perp SE$ (1)

Ta có $\begin{cases} BD \perp ME \\ BD \perp SM \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SME) \Rightarrow BD \perp MH$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra $MH \perp (SBD) \Rightarrow d(M, (SBD)) = MH$

Mặt khác $\frac{d(A, (SBD))}{d(M, (SBD))} = \frac{AB}{MB} = 2 \Rightarrow d(A, (SBD)) = 2d(M, (SBD)) = 2MH$

Ta tính được $ME = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{ME^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$

Vậy $d(A, (SBD)) = 2MH = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

d) Gọi M là trung điểm của AB . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCM) và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SDM) .

+ Tính $d(A, (SMD))$. Kẻ $AI \perp MD$

Ta có $\begin{cases} AI \perp MG \\ AI \perp SM \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SMD) \Rightarrow d(A, (SMD)) = AI$

Mặt khác $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $d(A, (SMD)) = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

+ Tính $d(A, (SMC))$.

$$d(A, (SMC)) = d(B, (SMC)) = d(A, (SDM)) = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ta có

Câu 35. Cho tứ diện $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$.

a) Chứng minh $(SAB) \perp (SBC)$.

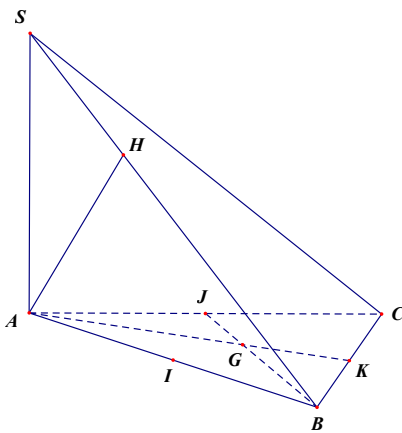
b) Tính khoảng cách từ điểm A đến (SBC) .

c) Gọi I là trung điểm của AB . Tính khoảng cách từ điểm I đến (SBC) .

d) Gọi J là trung điểm của AC . Tính khoảng cách từ điểm J đến (SBC) .

e) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tính khoảng cách từ điểm G đến (SBC) .

Lời giải



a) Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB) \end{cases}$

b) Dựng $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$$d(A; (SBC)) = AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Khi đó

$$\text{c) Do } AB = 2BI \Rightarrow d(I; (SBC)) = \frac{1}{2}d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{d) Do } AC = 2CJ \Rightarrow d(J; (SBC)) = \frac{1}{2}d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

e) Gọi K là trung điểm của BC ta có $AK = 3GK$.

$$\text{Do vậy } d(G; (SBC)) = \frac{1}{3}d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{2}}{6}$$

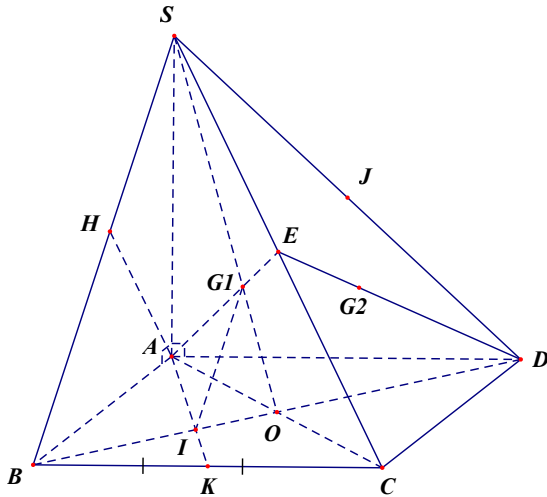
Câu 36. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. O là tâm hình vuông $ABCD$.

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến (SBC) .

b) Tính khoảng cách từ điểm O đến (SBC) .

- c) G_1 là trọng tâm ΔSAC . Từ G_1 kẻ đường thẳng song song với SB cắt OB tại I . Tính khoảng cách từ điểm G_1 đến (SBC) , khoảng cách từ điểm I đến (SBC) .
- d) J là trung điểm của SD . Tính khoảng cách từ điểm J đến (SBC) .
- e) Gọi G_2 là trọng tâm của ΔSDC . Tính khoảng cách từ điểm G_2 đến (SBC) .

Lời giải



- a) Dụng $AH \perp SB$ ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \Rightarrow AH \perp BC \end{cases}$.

Từ đó suy ra $AH \perp (SBC)$

Do vậy
$$d(A; (SBC)) = AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

b) Do $AC = 2OC \Rightarrow d(O; (SBC)) = \frac{1}{2}d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

- c) Gọi E là trung điểm của SC , dễ thấy I là trọng tâm tam giác ABC trọng tâm ta có:

$$d(I; (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

- d) Ta có:

$$d(J; (SBC)) = \frac{1}{2}d(D; (SBC)) = \frac{1}{2}d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

- e) Ta có

$$d(G_2; (SBC)) = \frac{1}{3}d(D; (SBC)) = \frac{1}{3}d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Gọi I là trung điểm của cạnh AB , E là trung điểm của cạnh BC .

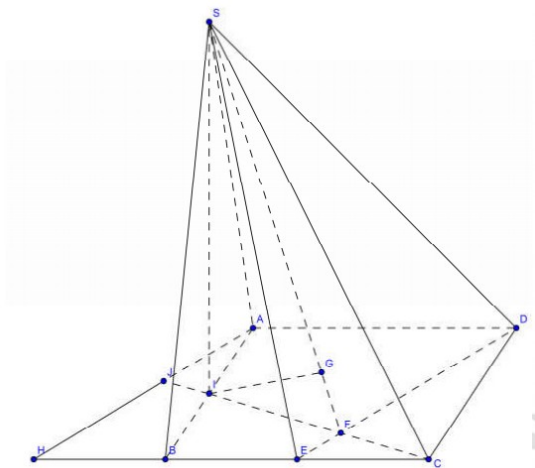
- a) Chứng minh $(SIC) \perp (SED)$

b) Tính khoảng cách từ điểm I đến (SED)

c) Tính khoảng cách từ điểm C đến (SED)

d) Tính khoảng cách từ điểm A đến (SED)

Lời giải



a) Học sinh tự làm.

b) Ta dễ chứng minh được: $IC \perp ED \Rightarrow DE \perp (SIC) \Rightarrow DE \perp SF (F = IC \cap DE)$

$$\frac{IF}{FC} = \frac{3}{2} \Rightarrow FI = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$$

Kẻ $IG \perp SF \Rightarrow IG \perp (SDE) \Rightarrow d(I, (SDE)) = IG$

$$\frac{1}{IG^2} = \frac{1}{IS^2} + \frac{1}{IF^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{3a\sqrt{5}}{10}\right)^2} \Rightarrow IG = \frac{3a\sqrt{2}}{8}$$

$$\frac{IF}{FC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{d(I; (SDE))}{d(C; (SDE))} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(C; (SDE)) = \frac{2}{3} d(I; (SDE)) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$J = IC \cap \Delta \left(\begin{array}{l} A \in \Delta \\ \Delta // DE \end{array} \right) \Rightarrow \frac{JF}{FC} = 2 \Rightarrow \frac{d(J; (SDE))}{d(C; (SDE))} = 2 \Rightarrow d(J; (SDE)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

d) Gọi

$$\Delta // DE \Rightarrow \Delta // (SDE) \Rightarrow d(A; (SDE)) = d(J; (SDE)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Do

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$, có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$, đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$.

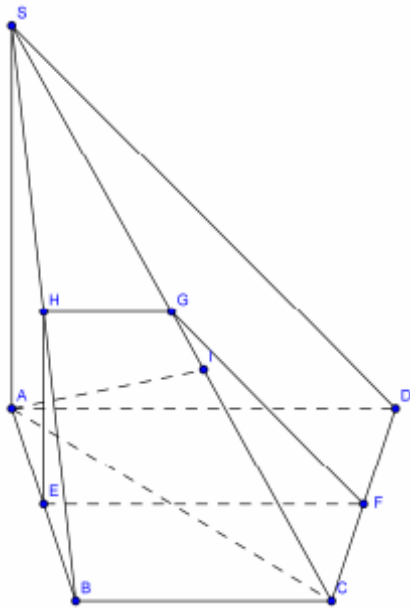
a) Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD)

b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC)

c) Tính diện tích của thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (P) song song với (SAD)

và cách (SAD) một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



a) Kẻ $AI \perp SC \Rightarrow AI \perp (SCD) \Rightarrow d(A; (SCD)) = AI$

Ta có $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AI = a\sqrt{2} \Rightarrow d(A; (SCD)) = a\sqrt{2}$. Ta dễ dàng chứng minh được

$$d(B; (SCD)) = \frac{1}{2} d(A; (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

b) Kẻ $AM \perp BC \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta có $d(AD; (SBC)) = d(A; (SBN)) = AN$. Do đó

$$\frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d(A; (SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

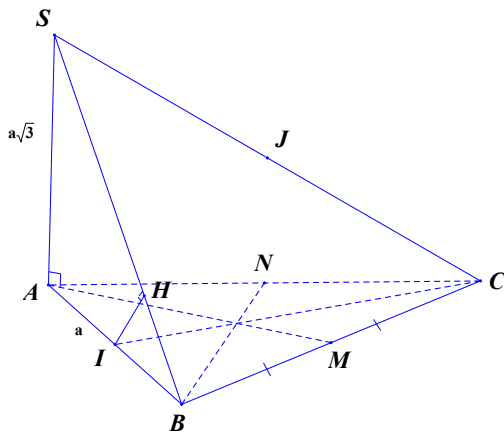
c) Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, CD, SC, SB . Khi đó dễ thấy hình thang $EFGH$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (P) song song với (SAD) và cách (SAD)

một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Ta suy ra $S_{EFGH} = \frac{1}{2}(EF + GH)HE = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy; $SA = a\sqrt{3}$. Tam giác ABC đều cạnh a . Tính khoảng cách

- SA và BC
- SB và CI với I là trung điểm của AB
- Từ B tới mặt phẳng (SAC)
- Từ J tới mặt phẳng (SAB) với J là trung điểm của SC

Lời giải



a) Gọi M là trung điểm của BC . Ta có:
$$\begin{cases} SA \perp AM \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow d(SA; BC) = AM = BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Ta có: $CI \perp AB$ và $CI \perp SA \Rightarrow CI \perp (SAB)$ (*)

Trong (SAB) kẻ $IH \perp SB$ tại H . Ta có
$$\begin{cases} IH \perp SB \\ IH \perp CI \quad (CI \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow d(SB; CI) = IH$$

Ta có $IB = \frac{a}{2}; SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$

ΔIHB vuông tại H nên:
$$IH = IB \cdot \sin \angle IBH = \frac{a}{2} \cdot \frac{SA}{SB} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}a}{4}$$

c) Gọi N là trung điểm của AC . Ta có:
$$\begin{cases} BN \perp AC \\ BN \perp SA \end{cases} \Rightarrow BN \perp (SAC) \Rightarrow d(B; (SAC)) = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

d) Ta có:
$$CJ \cap (SAB) = S \Rightarrow \frac{d(J; (SAB))}{d(C; (SAB))} = \frac{JS}{CS} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(J; (SAB)) = \frac{1}{2} d(C; (SAB)) \quad (do*)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = 2a, AD = 3a$.

Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc AB với $AH = HB$. Biết góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° .

a) Tính góc giữa CD và SB

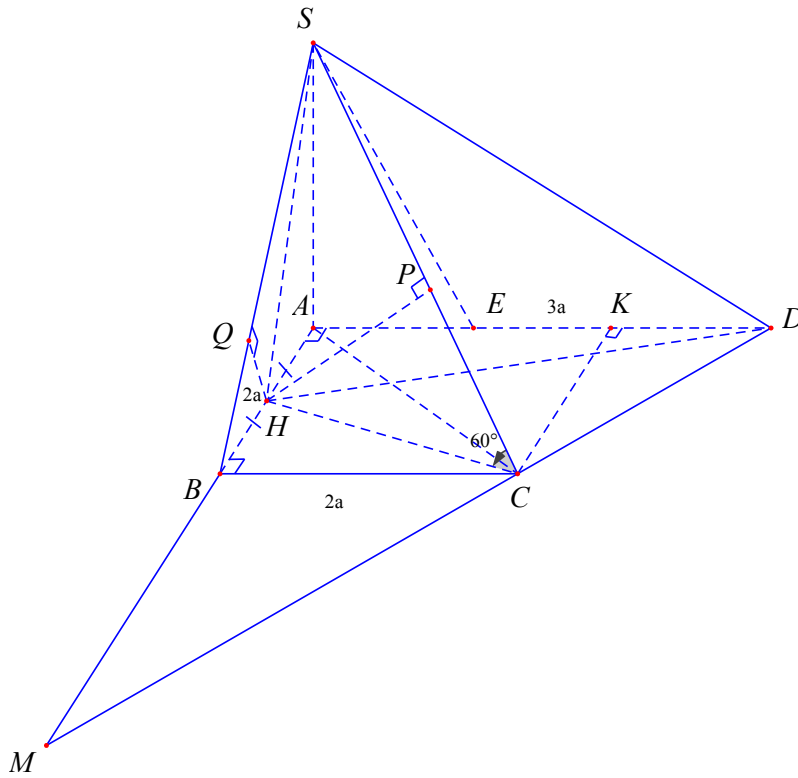
b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD)

c) Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC)

d) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB

e) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SE với E là điểm thuộc AD sao cho $AE = a$

Giải



a) Trong $(ABCD)$, kẻ $CK \perp AD$ tại K . Ta có tứ giác $AKCB$ là hình vuông.
 Khi ấy $HC = a\sqrt{5}$; $CD = a\sqrt{5}$ và $HD = a\sqrt{10}$

Suy ra $HD^2 = CH^2 + CD^2$ nên ΔHCD vuông tại C và do $CH = CD$ nên ΔHCD vuông cân tại C

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ CD \perp CH \subset (ABCD) \\ CD \perp SC \subset (SCD) \text{ (do } CD \perp CH; CD \perp SH \Rightarrow CD \perp (SCH)) \end{array} \right\}$$

\Rightarrow Góc giữa (SCD) với $(ABCD)$ là $\sphericalangle CH = 60^\circ$

ΔSCH vuông tại H có $SH = CH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{15} \Rightarrow SA = SB = \sqrt{SH^2 + BH^2} = 4a$

Xét $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{SB} \cdot (\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KD}) = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{BA}$ ($\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{KD} = 0$ vì $AD \perp (SAB)$)

Nên $AD \perp SB \Rightarrow KD \perp SB$)

$$= \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{BA} \cdot \cos(\overrightarrow{SB}; \overrightarrow{BA})$$

$$= -\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{BA} \cdot \cos(\overrightarrow{BS}; \overrightarrow{BA}) = -\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{BA} \cdot \cos \sphericalangle SBA = -BH \cdot BA = -a \cdot 2a = -2a^2$$

Mà

$$\overline{SB} \cdot \overline{CD} = \overline{SB} \cdot \overline{CD} \cdot \cos(\overline{SB}; \overline{CD}) \Rightarrow -2a^2 = 4a \cdot a \sqrt{5} \cdot \cos(\overline{SB}; \overline{CD})$$

$$\Rightarrow \cos(\overline{SB}; \overline{CD}) = \frac{-1}{2\sqrt{5}} \Rightarrow (\overline{SB}; \overline{CD}) = 102,92^\circ \approx 103^\circ \Rightarrow (\overline{SB}; \overline{CD}) \approx 77^\circ$$

b) Trong $(ABCD)$; $AB \cap CD = M$

Vì $KC \parallel AM$ nên theo Talet ta có: $\frac{KC}{AM} = \frac{KD}{AD} \Rightarrow \frac{2a}{AM} = \frac{a}{3a} \Rightarrow AM = 6a$

Trong (SHC) , kẻ $HP \perp SC$. Ta có $HP \perp (SCD) \Rightarrow d(H; (SCD)) = HP$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{HP^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HC^2} = \frac{1}{15a^2} + \frac{1}{5a^2} = \frac{4}{15a^2} \Rightarrow HP = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Vậy } d(H; (SCD)) = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$AH \cap (SCD) = M \Rightarrow \frac{d(A; (SCD))}{d(H; (SCD))} = \frac{AM}{HM} = \frac{6a}{5a} = \frac{6}{5} \Rightarrow d(A; (SCD)) = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$$

c) Trong (SAB) , kẻ $HP \perp SB$ tại Q . Ta có

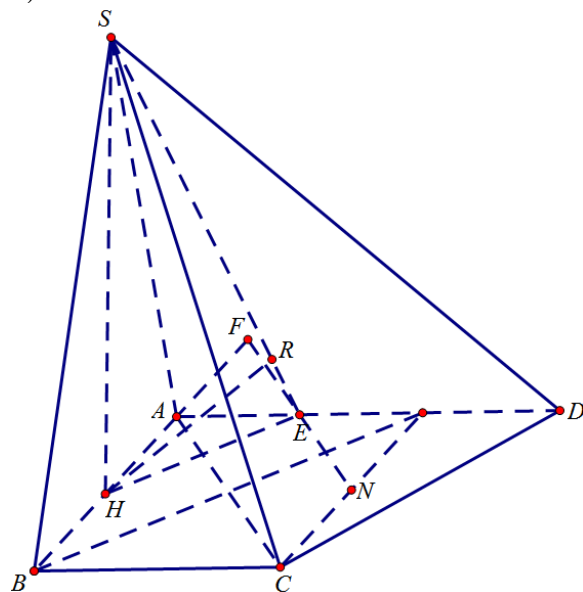
$$\frac{1}{HQ^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{1}{15a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{16}{15a^2} \Rightarrow HQ = \frac{a\sqrt{15}}{4}$$

Ta dễ dàng chứng minh được $HQ \perp (SBC) \Rightarrow d(H; (SBC)) = HQ$

$$\text{Ta có } AH \cap (SBC) = B \Rightarrow \frac{d(A; (SBC))}{d(H; (SBC))} = \frac{AB}{HB} = 2 \Rightarrow d(A; (SBC)) = 2 \cdot HQ = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Vi } AD \parallel BC \Rightarrow d(D; (SBC)) = d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{d) Vi } AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(AD; SB) = d(AD; (SBC)) = d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$



e) Gọi N là trung điểm của KC . Trong $(ABCD)$, EQ kéo dài cắt AB tại F

Ta có $BK = 2a\sqrt{2} \Rightarrow HE = a\sqrt{2}$; $SE = \sqrt{SH^2 + HE^2} = a\sqrt{17}$. Ta có
 $AF = KN = a; HE \parallel BK; EN \parallel AC \Rightarrow HE \perp EN$ (do $AC \perp BK$) mà $EN \perp SH$

$\Rightarrow EN \perp (SHE) \Rightarrow (SEN) \perp (SHE)$. Trong (SHE) , kẻ

$HR \perp SE \Rightarrow HR \perp (SEN) \Rightarrow HR = d(H; (SEN))$. Ta có $HR = \frac{HS \cdot HE}{SE} = \frac{a\sqrt{30}}{\sqrt{17}}$

Vì $AC \parallel (SEN) \Rightarrow d(SE; AC) = d(AC; (SEN)) = d(A; (SEN))$

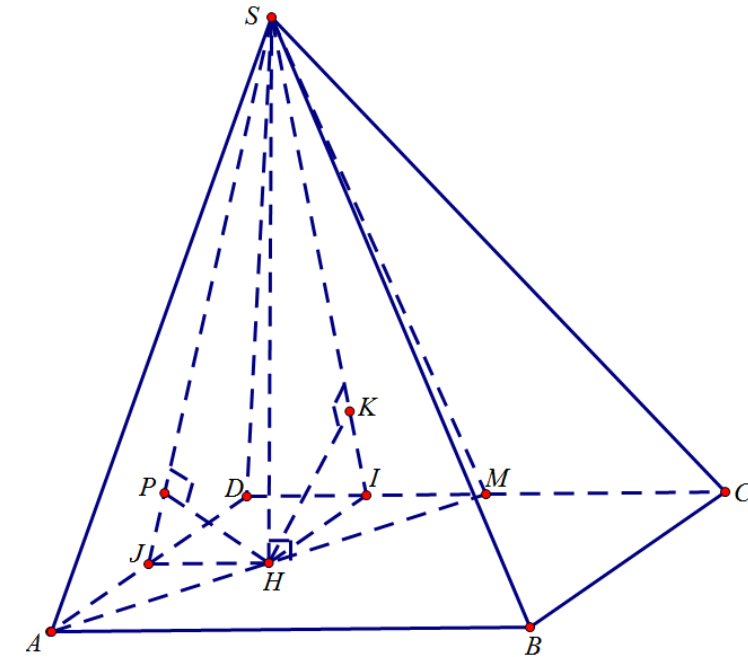
Mà $AH \cap (SEN) = F \Rightarrow \frac{d(A; (SEN))}{d(H; (SEN))} = \frac{AF}{HF} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(A; (SEN)) = \frac{a\sqrt{30}}{2\sqrt{17}}$

Vậy $d(SE; AC) = \frac{a\sqrt{30}}{2\sqrt{17}}$.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD > AB = 2a$. Gọi M là trung điểm CD . Tam giác SAM cân và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $(SD; (ABCD)) = \alpha$ với $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{6a}{\sqrt{5}}$.

a) Tính khoảng cách từ C đến (SAD) .

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và DN , với $N \in BC$ và $CN = \frac{1}{3}BN$.



Gọi H là trung điểm của AM . Ta có $SH \perp (ABCD)$. Suy ra $(SD; (ABCD)) = \angle SDH = \alpha$. Gọi I là trung điểm của $DM \Rightarrow HI \parallel AD \Rightarrow HI \perp CD$ mà $CD \perp SH \Rightarrow CD \perp (SHI) \Rightarrow (SCD) \perp (SHI)$

Trong (SHI) , kẻ $HK \perp SI \Rightarrow HK \perp (SCD) \Rightarrow HK = d(H; (SCD))$. Mà
 $AH \cap (SCD) = M \Rightarrow \frac{d(H; (SCD))}{d(A; (SCD))} = \frac{HM}{AM} = \frac{1}{2}$. Vậy $HK = \frac{1}{2}d(A; (SCD)) = \frac{3a}{\sqrt{5}}$.

Đặt $AM = 2x > 0 \Rightarrow DH = x$ và $AD = \sqrt{4x^2 - a^2} \left(x > \frac{a}{2} \right) \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{4x^2 - a^2}}{2}$

ΔSHD vuông tại H nên $\sin \alpha = \sin \angle SDH = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \tan \alpha = 2\sqrt{2} \Rightarrow SH = DH \cdot \tan \alpha = 2\sqrt{2}x$

ΔSHI vuông tại H có HK là đường cao nên

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow \frac{5}{9a^2} = \frac{1}{8x^2} + \frac{4}{4x^2 - a^2} \Leftrightarrow 160x^4 - 364a^2x^2 + 9a^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{9}{4}a^2 \\ x^2 = \frac{1}{40}a^2 \end{cases} (l)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}a \quad AD = 2\sqrt{2}a; DH = \frac{3}{2}a; SH = 3\sqrt{2}a$$

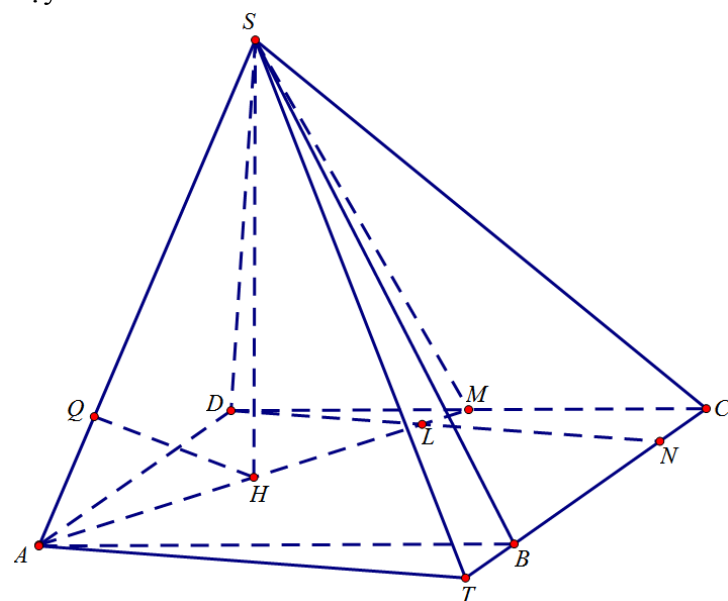
a) Trong $(ABCD)$, gọi J là trung điểm của $AD \Rightarrow AD \perp HJ$; mà
 $AD \perp SH \Rightarrow AD \perp (SHJ) \Rightarrow (SAD) \perp (SHJ)$. Trong (SHJ) , kẻ $HP \perp SJ$, ta có
 $HP \perp (SAD) \Rightarrow HP = d(H; (SAD))$

Ta có $HJ = \frac{a}{2}; SJ = \frac{\sqrt{73}}{2}a \Rightarrow HP = \frac{HJ \cdot HS}{SJ} = \frac{3\sqrt{146}a}{73}$

Mà $CM \cap (SAD) = D \Rightarrow \frac{d(C; (SAD))}{d(M; (SAD))} = \frac{CD}{MD} = 2$

Và $MH \cap (SAD) = A \Rightarrow \frac{d(M; (SAD))}{d(H; (SAD))} = \frac{MA}{HA} = 2$

Vậy $d(C; (SAD)) = 4d(H; (SAD)) = 4HP = \frac{12\sqrt{146}}{73}a$



b) Trong $(ABCD)$, $DN \cap AM = L$. Dụng hình bình hành $ADNT$. Ta có:
 $CN = \frac{1}{3}BN \Rightarrow CN = \frac{1}{4}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

Ta có $\tan \angle EDM = \frac{CN}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{DM}{AD} = \tan \angle DAM \Rightarrow \angle EDM = \angle DAM \Rightarrow \angle EDM + \angle DML = 90^\circ$
 Suy ra $\triangle DLM$ vuông tại $L \Rightarrow AM \perp DN \Rightarrow AT \perp AM$ mà
 $AT \perp SH \Rightarrow AT \perp (SHA) \Rightarrow AT \perp SA$ và $(SAT) \perp (SHA)$ Trong (SHA) , kẻ
 $HQ \perp SA \Rightarrow HQ \perp (SAT) \Rightarrow HQ = d(H; (SAT))$

Ta có $SA = \sqrt{SH^2 + HA^2} = \frac{9}{2}a; AT = DN = \sqrt{CD^2 + CN^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow HQ = \frac{HS \cdot HA}{SA} = a\sqrt{2}$

$\triangle DLM$ vuông tại $L \Rightarrow LM = DM \cdot \sin \angle EDM = DM \cdot \frac{CN}{DN} = \frac{a}{3} \Rightarrow AL = AM - LM = \frac{8}{3}a$ mà

Vì $DN \parallel (SAT) \Rightarrow d(DN; SA) = d(DN; (SAT)) = d(L; (SAT))$ mà

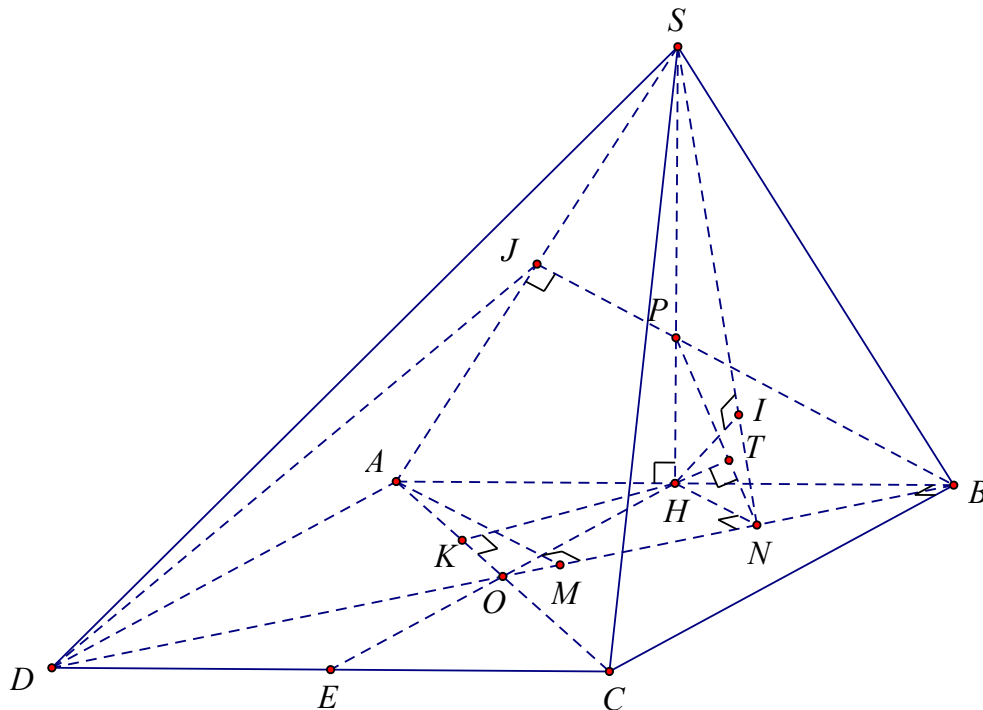
$$LH \cap (SAT) = A \Rightarrow \frac{d(L; (SAT))}{d(H; (SAT))} = \frac{LA}{HA} = \frac{16}{9} \Rightarrow d(L; (SAT)) = \frac{16}{9}HQ = \frac{16a\sqrt{2}}{9}$$

$$\Rightarrow d(SA; DN) = \frac{16a\sqrt{2}}{9}$$

Câu 42. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a; AD = a\sqrt{3}$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AB . Tính khoảng cách:

- từ A tới mặt phẳng (SBD) .
- giữa hai đường SH và CD .
- giữa hai đường SH và AC .
- giữa hai đường SB và CD .
- giữa hai đường BC và SA .
- giữa hai đường SC và BD .

Lời giải



a) Theo giả thiết thì SH là đường cao của hình chóp $S.ABCD$. Mà $\triangle SAB$ đều $\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
 Lại có H là trung điểm $AB \Rightarrow d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD))$

Gọi M là hình chiếu của A lên $BD \Rightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi N là hình chiếu vuông góc của H lên $BD \Rightarrow HN = \frac{1}{2}AM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên SN . Ta dễ dàng chứng minh được $HI \perp (SBD)$.

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HN^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{15}}{10}$$

Vậy $d(H, (SBC)) = HI$. Ta lại có:

$$d(A, (SBD)) = 2HI = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

Khi đó

b) Gọi E là trung điểm $CD \Rightarrow HE \perp CD$ (vì đáy $ABCD$ là hình chữ nhật)

Lại có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp HE$

Vậy HE là đường vuông góc chung của hai đường SH và CD .

Vậy $d(SH, CD) = HE = a\sqrt{3}$

c) Gọi K là hình chiếu của H lên $AC \Rightarrow HK \perp AC$.

Mà $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp HK$

Vậy HK là đường vuông góc chung của SH và $AC \Rightarrow d(SA, AC) = HK$

Trong tam giác vuông ACB có $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$

Trong tam giác vuông AHK $\sin A = \frac{HK}{AH} \Rightarrow HK = AH \cdot \sin A = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

d) Ta có: $\begin{cases} SB \subset (SAB) \\ CD \parallel AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow d(SB, CD) = d(CD, (SAB)) = d(E, (SAB)) = HE = a\sqrt{3}$

e) Trong tam giác SAB , lấy J là trung điểm SA . Vì tam giác SAB đều nên $BJ \perp SA$.

Mà ta dễ dàng chứng minh được $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BJ$.

Vậy BJ là đường vuông góc chung của SA và $BC \Rightarrow d(SA, BC) = BJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

f) Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow O$ là trung điểm $AC \Rightarrow d(A, (JBD)) = d(C, (JBD))$

Ta có $\begin{cases} BD \subset (JBD) \\ SC \parallel JO \subset (JBD) \end{cases}$

$\Rightarrow d(SC, BD) = d(SC, (JBD)) = d(C, (JBD)) = d(A, (JBD)) = 2d(H, (JBD))$

Gọi T là hình chiếu vuông góc của H lên PN với $P = BJ \cap SH$.

Khi đó ta chứng minh được $BD \perp (PHN) \Rightarrow BD \perp HT$. Mà $HT \perp PN \subset (JBD)$

Vậy T là hình chiếu vuông góc của H trên $(JBD) \Rightarrow d(H, (JBD)) = HT$

$$\frac{1}{HT^2} = \frac{1}{HP^2} + \frac{1}{HN^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{52}{3a^2} \Rightarrow HT = \frac{a\sqrt{39}}{26}$$

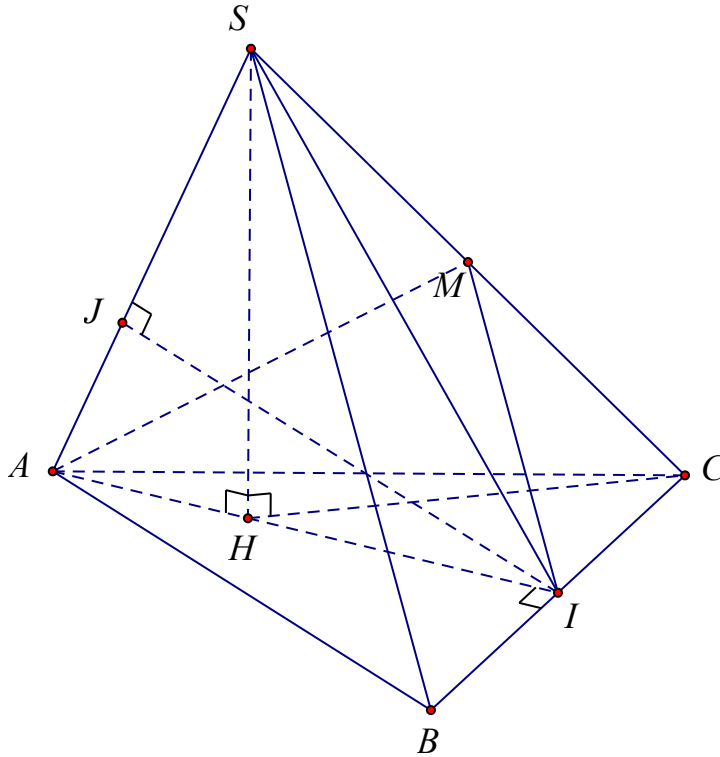
Mà ta có:

Vậy $d(SC, BD) = d(C, (JBD)) = d(A, (JBD)) = 2d(H, (JBD)) = \frac{a\sqrt{39}}{52}$

Câu 43. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$, đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Gọi I là trung điểm của BC , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc đoạn AI sao cho $AH = \frac{1}{2}HI$. Biết góc giữa SC và mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách

- từ M đến mặt phẳng (SAI) , với M là trung điểm của SC .
- giữa hai đường thẳng SA và BC .
- giữa hai đường SB với AM , với M là trung điểm của SC .

Lời giải



Có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a \Rightarrow AI = a\sqrt{3}; AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}; HI = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$$HC = \sqrt{CI^2 + HI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$$

Trong tam giác vuông CHI có:

Theo giả thiết: $(SC, (ABC)) = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle SCH = 60^\circ$

Trong tam giác vuông SCH có $\tan \sphericalangle SCH = \frac{SH}{HC} = \tan 60^\circ \Rightarrow SH = HC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{7}$

a) Ta có M là trung điểm $SC \Rightarrow d(M, (SAI)) = \frac{1}{2}d(C, (SAI))$

Lại có: $CI \perp (SAI)$ vì $\begin{cases} AI \perp AB (\Delta ABC \text{ đều}) \Rightarrow CI \perp AI \\ SH \perp (ABC) \Rightarrow CI \perp SH \subset (SAI) \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAI)$

Vậy $d(M, (SAI)) = \frac{1}{2}d(C, (SAI)) = \frac{CI}{2} = \frac{a}{2}$

b) Gọi J là hình chiếu vuông góc của I lên $SA \Rightarrow IJ \perp SA$.

Mặt khác $BC \perp (SAI) \Rightarrow IJ \perp BC$

Vậy IJ là đường vuông góc chung của hai đường SA và $BC \Rightarrow d(SA, BC) = IJ$

$$SH \cdot AI = IJ \cdot SA \Rightarrow IJ = \frac{SH \cdot AI}{SA} = \frac{a\sqrt{7} \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{(a\sqrt{7})^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{154}a}{22}$$

Xét tam giác SAI có

c) Ta có $\begin{cases} AM \subset (AMI) \\ SB \parallel MI \subset (AMI) \end{cases} \Rightarrow d(SB, AM) = d(SB, (AMI)) = d(B, (AMI)) = d(C, (AMI))$ (do I là trung điểm của BC).

$$\text{Lại có } \frac{V_{C.AMI}}{V_{C.SAB}} = \frac{CM}{CS} \cdot \frac{CI}{CB} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{C.AMI} = \frac{1}{4} V_{S.ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12} \cdot a\sqrt{7} \cdot a^2 \sqrt{3} = \frac{a^3 \sqrt{21}}{12}$$

$$\text{Ta có } SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{66}}{3}$$

$$HC = \sqrt{CI^2 + HI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}a}{3}; SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 + \left(\frac{\sqrt{21}a}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{21}a}{3}$$

Trong tam giác SAC đường trung tuyến:

$$AM = \sqrt{\frac{SA^2 + AC^2}{2} - \frac{SC^2}{4}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{a\sqrt{66}}{3}\right)^2 + (2a)^2}{2} - \frac{\left(\frac{2\sqrt{21}a}{3}\right)^2}{4}} = \frac{a\sqrt{30}}{3}$$

$$\text{Lại có } MI = \frac{1}{2} SB = \frac{1}{2} SC = \frac{a\sqrt{21}}{3}$$

Theo công thức Hêrông, ta có: $S_{\Delta AMI} = \frac{\sqrt{6}}{2} a^2$

$$d(C, (AMI)) = \frac{3V_{C.AMI}}{S_{\Delta AMI}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3 \sqrt{21}}{12}}{\frac{\sqrt{6}}{2} a^2} = \frac{\sqrt{14}a}{4}$$

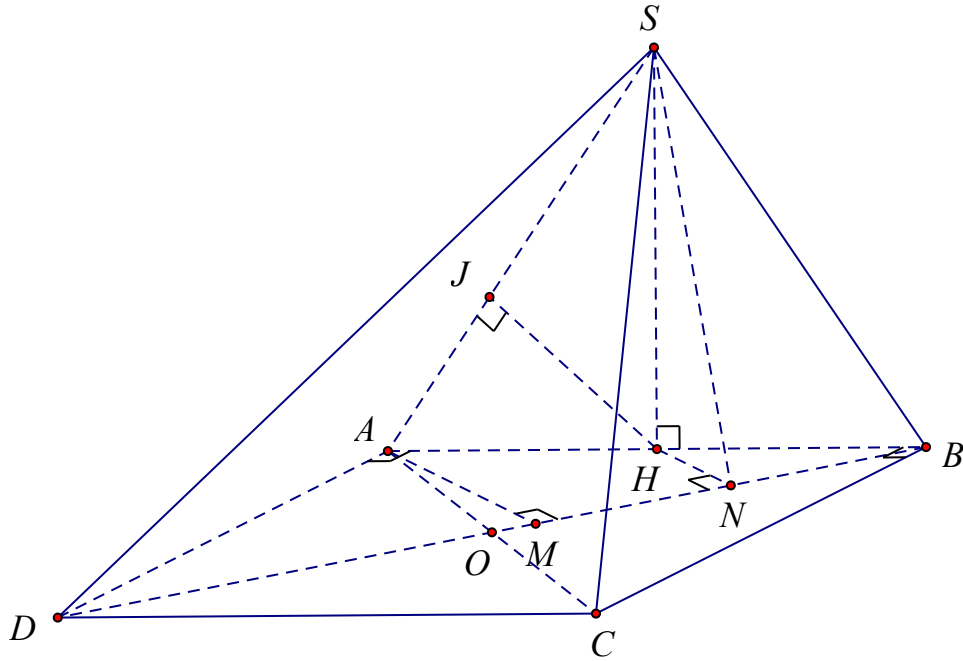
Khi đó:

$$\text{Vậy } d(SB, AM) = \frac{a\sqrt{14}}{4}$$

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}; AD = 2a$. Biết tam giác SAB là tam giác cân tại S , nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và có diện tích bằng $\frac{a^2 \sqrt{6}}{6}$. Gọi H là trung điểm của AB . Tính khoảng cách

- từ A đến (SBD) .
- giữa hai đường thẳng SH và BD .
- giữa hai đường thẳng BC và SA .

Lời giải



Ta có
$$S_{ASAB} = \frac{1}{2} SH \cdot AB = \frac{a^2 \sqrt{6}}{6} \Leftrightarrow SH = \frac{2}{a\sqrt{2}} \cdot \frac{a^2 \sqrt{6}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

a) Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, H trên đường thẳng BD .
Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên SN .

Ta chứng minh được $HI \perp (SBD)$

Vì H là trung điểm AB nên $d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD)) = 2HI$

$$\sin B = \frac{AD}{BD} = \frac{2a}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (2a)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Trong tam giác vuông ABD có

Trong tam giác vuông ABM có

$$\sin B = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow AM = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{3}a}{3} \Rightarrow HN = \frac{1}{2} AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HN^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Trong tam giác vuông SHN có

Vậy $d(A, (SBD)) = a\sqrt{6}$

b) Ta có $\begin{cases} HN \perp BD \\ HN \perp SH \end{cases} \Rightarrow HN$ là đường vuông góc chung của hai đường SH và BD .

Vậy $d(SH, BD) = HN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

c) Ta có $\begin{cases} SA \subset (SAD) \\ BC \parallel AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow d(SA, BC) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = 2d(H, (SAD))$

H là trung điểm AB)

Gọi J là hình chiếu vuông góc của H lên SA .

Ta có: $\begin{cases} AD \perp SH, AD \perp AB \Rightarrow AD \perp HJ \\ SA \perp HJ \end{cases} \Rightarrow HJ \perp (SAD) \Rightarrow d(H, (SAD)) = HJ$

(do

Trong tam giác vuông SAH có $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}; SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow HJ = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

Vậy $d(SA, BC) = 2HJ = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$

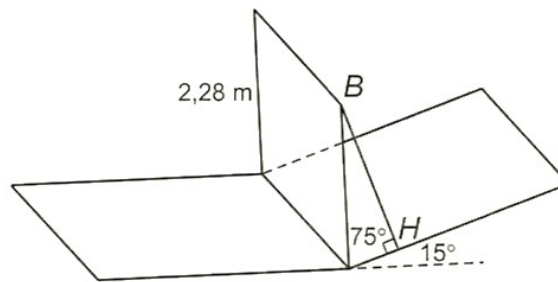
Dạng 2. Ứng dụng

Câu 45. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Ở một con dốc lên cầu, người ta đặt một khung không chế chiều cao, hai cột của khung có phương thẳng đứng và có chiều dài bằng 2,28m. Đường thẳng nối hai chân cột vuông góc với hai đường mép dốc. Thanh ngang được đặt trên đỉnh hai cột. Biết dốc nghiêng 15° so phương nằm ngang. Tính khoảng cách giữa thanh ngang của khung và mặt đường (theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai). Hỏi cầu này có cho phép xe cao 2,21m đi qua hay không?



Hình 7.82. Tại đây một số cầu vượt ta có thể bắt gặp khung không chế chiều cao.

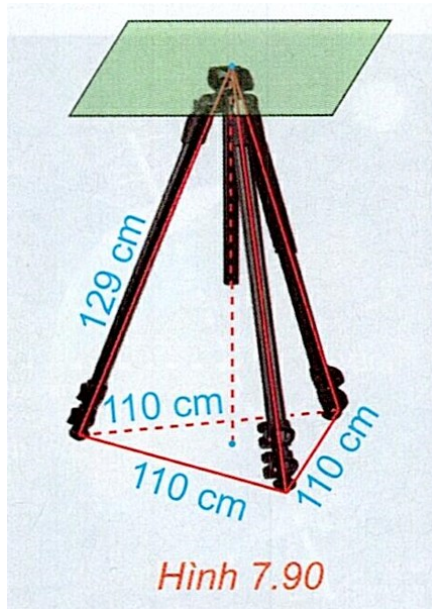
Lời giải



Hình 7.26

Gọi B là một điểm nằm trên thanh ngang và H là hình chiếu vuông góc xuống mặt dốc. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng dốc là $BH = 2,28 \sin 75^\circ \approx 2,2(m)$.
Do đó, không cho phép xe cao 2,21 m đi qua.

Câu 46. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Giá đỡ ba chân ở Hình 7.90 đang được mở sao cho ba góc chân cách đều nhau một khoảng cách bằng 110cm . Tính chiều cao của giá đỡ, biết các chân của giá đỡ dài 129cm .



Hình 7.90

Lời giải

$$\sqrt{129^2 - \left(\frac{110 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2} \approx 112(\text{cm})$$

Chiều cao của giá đỡ là

Câu 47. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Một bể nước có đáy thuộc mặt phẳng nằm ngang. Trong trường hợp này, độ sâu của bể là khoảng cách giữa mặt nước và đáy bể. Giải thích vì sao để đo độ sâu của bể, ta có thể thả quả dọi chạm đáy bể và đo chiều dài của đoạn dây dọi nằm trong bể nước.

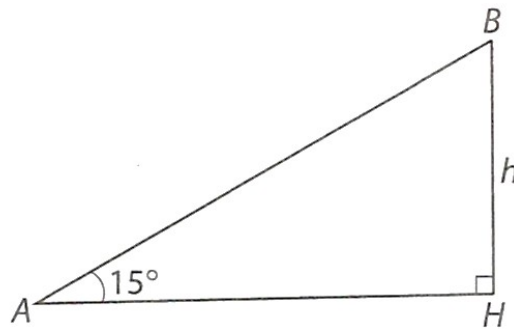
Lời giải

Sợi dây của quả dọi có phương vuông góc với đáy bể và vuông góc với mặt nước.

Câu 48. Một chiếc máy bay cất cánh từ một điểm thuộc mặt đất phẳng nằm ngang. Trong 3 phút đầu máy bay bay với vận tốc 500 km/h và theo đường thẳng tạo với mặt đất một góc 15° . Hỏi sau 2 phút, máy bay ở độ cao bao nhiêu kilômét (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)?

Lời giải

(H.7.16)



Hình 7.16

Sau 2 phút, máy bay đi được quãng đường là

$$AB = \frac{500}{60} \cdot 2 = \frac{50}{3}(\text{km}).$$

Sau 2 phút, máy bay ở độ cao là

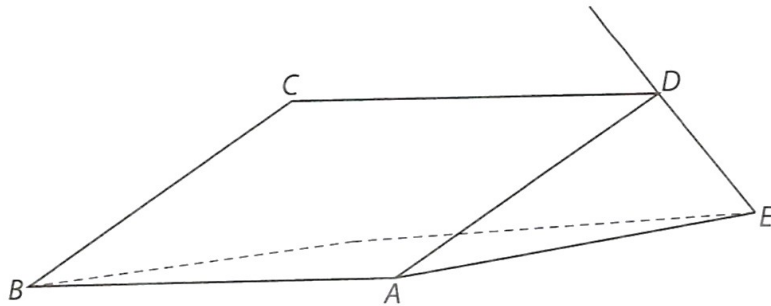
$$h = AB \cdot \sin 15^\circ \approx 4,3(\text{km}).$$

Câu 49. Trên một mái nhà nghiêng 30° so với mặt phẳng nằm ngang, người ta dựng một chiếc cột vuông góc với mái nhà. Hỏi chiếc cột tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? Vì sao?

Lời giải

Gọi AB là giao tuyến của mặt phẳng mái nhà và mặt phẳng nằm ngang, AD là đường thẳng nằm trên mái nhà và vuông góc với AB , đường thẳng DE là chiếc cột vuông góc với mái nhà, đường thẳng AE nằm trên mặt phẳng nằm ngang, khi đó tam giác ADE vuông tại D , đường thẳng AE là hình chiếu vuông góc của DE trên mặt phẳng nằm ngang, mà góc DAE bằng 30° nên góc giữa hai đường thẳng DE và AE bằng 60° .

Vậy góc giữa đường thẳng DE (chiếc cột) và mặt phẳng nằm ngang bằng góc giữa hai đường DE và AE bằng 60° .



Hình 7.51