

Bài 1. (6 điểm)

$$y^2 - 2y + 3 = \frac{6}{x^2 + 2x + 4}$$

a) Giải phương trình:

b) Giải bất phương trình:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} \geq 0$$

Bài 2. (5 điểm)

2.1) Cho đa thức $P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + m$

a) Tìm m để $P(x)$ chia hết cho $2x + 3$

b) Với m vừa tìm được ở câu a, hãy tìm số dư khi chia $P(x)$ cho $3x - 2$ và phân tích ra các thừa số bậc nhất

2.2) Cho đa thức $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Biết $P(1) = 1; P(2) = 4; P(3) = 16; P(5) = 25$. Tính $P(6); P(7)$?

Bài 3. (2 điểm)

Cho $a, b, c \in [0; 1]$ và $a + b + c = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^2 + c^2$$

Bài 4. (7 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$ ($AC > BD$). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, D lên AC; H, K lần lượt là hình chiếu của C trên AB và AC

a) Tứ giác $DFBE$ là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh: $\triangle CHK \sim \triangle BCA$

c) Chứng minh: $AC^2 = AB \cdot AH + AD \cdot AK$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a)

$$y^2 - 2y + 3 = \frac{6}{x^2 + 2x + 4} \Leftrightarrow (y^2 - 2y + 3)(x^2 + 2x + 4) = 6$$

$$\Leftrightarrow [(y - 1)^2 + 2] \cdot [(x + 1)^2 + 3] = 6$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 \cdot (y - 1)^2 + 3(y - 1)^2 + 2(x + 1)^2 + 6 = 6$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 \cdot (y - 1)^2 + 3(y - 1)^2 + 2(x + 1)^2 = 0$$

$$\forall i \quad (x + 1)^2 \geq 0; (y - 1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$b) \frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x - 2)(x - 3)} + \frac{1}{(x - 3)(x - 4)} + \frac{1}{(x - 4)(x - 5)} + \frac{1}{(x - 5)(x - 6)} \geq 0 \quad (x \neq 1; 2; 3; 4; 5; 6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 3} + \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 4} + \frac{1}{x - 4} - \frac{1}{x - 5} + \frac{1}{x - 5} - \frac{1}{x - 6} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x - 2)(x - 6)} \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 6) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 6 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x - 6 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 6 \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $2 < x < 6$ và $x \neq 3; 4; 5$

Bài 2.

2.1)

$$a) P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 6x^3 + 9x^2 - 16x^2 - 24x + 8x + 12 + m - 12$$

$$= 3x^2(2x+3) - 8x(2x+3) + 4(2x+3) + m - 12$$

$$= (2x+3)(3x^2 - 8x + 4) + m - 12$$

Đề $P(x) \div (2x+3)$ thì $m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 12$

b) Với $m = 12; P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + 12 = 6x^3 - 4x^2 - 3x^2 + 2x - 18x + 12$

$$= 2x^2(3x - 2) - x(3x - 2) - 6(3x - 2) = (3x - 2)(2x^2 - x - 6)$$

Phân tích $P(x)$ ra tích các thừa số bậc nhất:

$$P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + 12 = (2x+3)(3x-2)(x-2)$$

2.2) Vì $P(1) = 1; P(2) = 4; P(3) = 9; P(4) = 16; P(5) = 25$

Mà $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + x^2$

$$\Rightarrow P(6) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 6^2 = 156$$

$$\Rightarrow P(7) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 7^2 = 769$$

Bài 3.

Vi $a, b, c \in [0; 1] \Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \geq 0$

Ta có:

$$(1-a)(1-b)(1-c) = 1 - (a+b+c) + (ab+bc+ac) - abc \quad (\text{Vi } a+b+c=2)$$

$$= -1 + (ab+bc+ac) - abc \geq 0$$

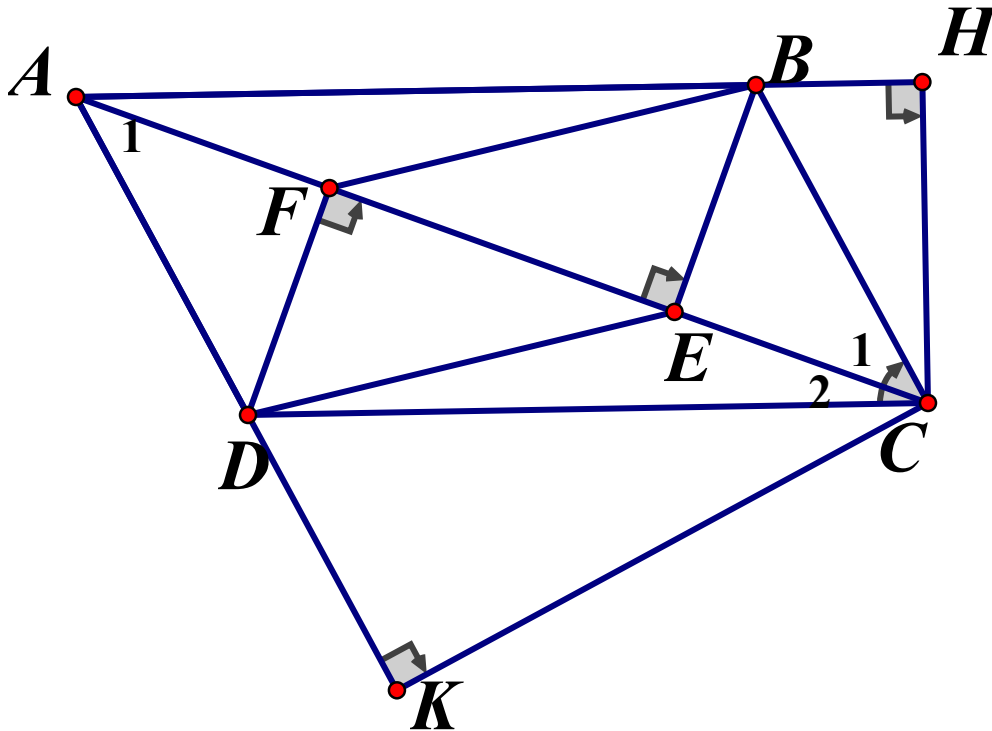
$$\Leftrightarrow ab+bc+ac \geq abc + 1 \geq 1 \quad (\text{Vi } abc \geq 0) \Rightarrow -2(ab+bc+ac) \leq -2$$

Lại có: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$

$$\Rightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = 4 - 2(ab+bc+ac) \leq 4 - 2 = 2$$

Vậy $P_{\max} = 2 \Leftrightarrow (a, b, c)$ là hoán vị của $(0; 1; 1)$

Bài 4.



- a) $DF \parallel BE$ (vì cùng vuông góc với AC)
 $\triangle AFD = \triangle CEB$ (Cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow DF = BE$
 $\Rightarrow DFBE$ là hình bình hành
- b) $BC \parallel AK \Rightarrow \angle BCK = 90^\circ$
 $\angle ABC = 90^\circ + \angle BCH$ (góc ngoài của $\triangle CHB$)
 $\angle HCK = 90^\circ + \angle BCH \Rightarrow \angle ABC = \angle HCK$
 Có: $\angle KCD = \angle ACD + \angle DAC$ (góc ngoài của $\triangle DKC$)
 $\angle HBC = \angle BAC + \angle BCA$ mà $\angle BCA = \angle DAC$; $\angle BAC = \angle BCH$
 $\Rightarrow \triangle CKD \sim \triangle CBH \Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{CK}{CH} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{CK}{CH} \Rightarrow \triangle CHK \sim \triangle BCA (c.g.c)$
- c) $\triangle AEB \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AH} \Rightarrow AE \cdot AC = AB \cdot AH$ (1)
 $\triangle AFD \sim \triangle AKC \Rightarrow \frac{AF}{AK} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AF \cdot AC = AD \cdot AK$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta có: $AE.AC + AF.AC = AB.AH + AD.AK$ (3)

Mà $\triangle AFD = \triangle CEB$ (cmt) $\Rightarrow AF = CE$

$$(3) \Leftrightarrow AC.(AE + EC) = AB.AH + AD.AK \Leftrightarrow AC^2 = AB.AH + AD.AK$$