

ĐỀ THI KSCL HỌC SINH GIỎI

MÔN: TOÁN 8

Bài 1. (2 điểm)

- a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$
b) Dựa vào kết quả trên hãy chứng minh :

$$A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n \text{ chia hết cho } 210 \text{ với mọi số tự nhiên } n$$

Bài 2. (2 điểm)

Cho biểu thức
$$A = \left(\frac{1 - x^3}{1 - x} - x \right) : \frac{1 - x^2}{1 - x - x^2 + x^3} \quad (x \neq -1; 1)$$

- a) Rút gọn biểu thức A
b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -1\frac{2}{3}$
c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

Bài 3. (1 điểm) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $abc = 2004$

Tính
$$M = \frac{2004a}{ab + 2004a + 2004} + \frac{b}{bc + b + 2004} + \frac{c}{ac + c + 1}$$

Bài 4. (4 điểm) Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Gọi P là giao điểm của AN với DM

- a) Chứng minh $\triangle APM$ là tam giác vuông
b) Tính diện tích của tam giác APM
c) Chứng minh tam giác CPD là tam giác cân

Bài 5. (1 điểm)

Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho $x^2 = y^2 + 2y + 13$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$\begin{aligned} a) x^3(x^2 - 7)^2 - 36x &= x \left[(x^3 - 7x)^2 - 36 \right] \\ &= x(x^3 - 7x - 6)(x^3 - 7x + 6) = x(x^3 - x - 6x - 6)(x^3 - x - 6x + 6) \\ &\dots\dots \\ &= x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x-2)(x+3) \end{aligned}$$

b) Theo phần a ta có:

$$A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n = (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$$

Đây là tích của 7 số nguyên liên tiếp nên có một bội của 2, 1 bội của 3, 1 bội của 5, 1 bội của 7

Mà $(2, 3, 5, 7) = 1$ nên $A : (2.3.5.7) \Rightarrow A : 210$

Bài 2.

a) Với $x \neq \pm 1$ thì

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - x^3 - x + x^2}{1 - x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2) - x(1+x)} \\ &= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} = (1+x^2)(1-x) \end{aligned}$$

b) Tại $x = -1\frac{2}{3} \Rightarrow A = 10\frac{2}{27}$

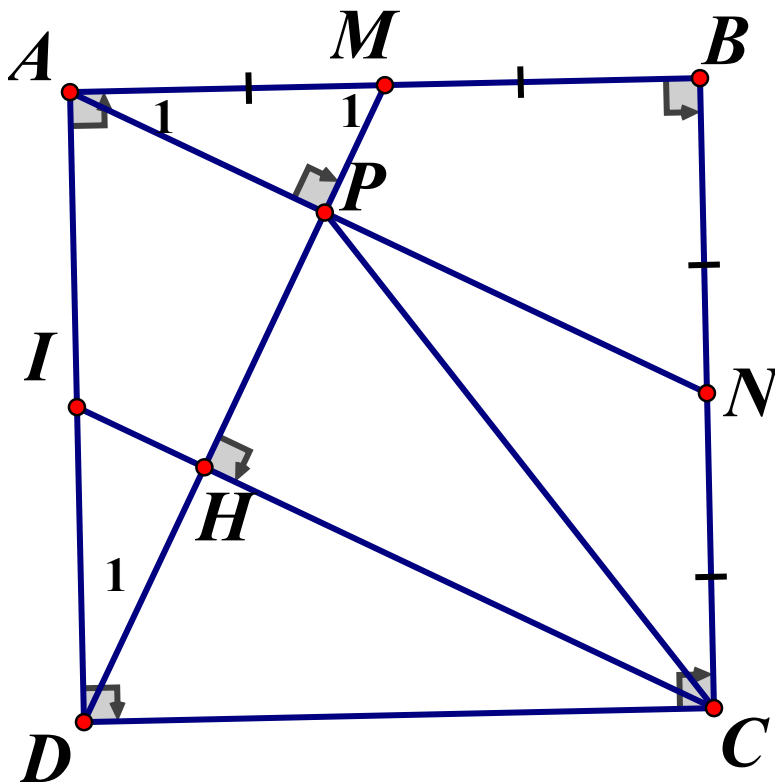
c) Với $x \neq \pm 1$ thì $A < 0 \Leftrightarrow (1+x^2)(1-x) < 0 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Bài 3

Thay $2004 = abc$ vào M ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{a^2bc}{ab + a^2bc + abc} + \frac{b}{bc + b + abc} + \frac{c}{ac + c + 1} \\ &= \frac{a^2bc}{ab(1 + ac + c)} + \frac{b}{b(c + 1 + ac)} + \frac{c}{ac + c + 1} \\ &= \frac{ac}{1 + ac + c} + \frac{1}{c + 1 + ac} + \frac{c}{ac + c + 1} = \frac{ac + c + 1}{1 + ac + c} = 1 \end{aligned}$$

Bài 4.



a) Chứng minh $\triangle ADM = \triangle BAN (cgc) \Rightarrow \angle A_1 = \angle B_1$

Mà $\angle B_1 + \angle M_1 = 90^\circ$ ($\triangle ADM$ vuông tại A)

Do đó: $\angle A_1 + \angle M_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle APM = 90^\circ$. Hay $\triangle APM$ vuông tại P

b) Tính được $AP = \frac{4\sqrt{5}}{5}(cm), AM = \frac{2\sqrt{5}}{5}cm, S_{APM} = \frac{4}{5}(cm^2)$

c) Gọi I là trung điểm của AD. Nối C với I; CI cắt DM tại H

Chứng minh tứ giác $AICN$ là hình bình hành

$$\Rightarrow AN // CI \text{ mà } AN \perp DM \Rightarrow CI \perp DM$$

Hay CH là đường cao trong $\triangle CPD$ (1)

Vận dụng định lý về đường trung bình trong $\triangle ADP$ chứng minh được H là trung điểm DP suy ra CH là trung tuyến trong $\triangle CPD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle CPD$ cân tại C

Bài 5.

Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng $(x + y + 1)(x - y - 1) = 12$

Lập luận để có $x + y + 1 > x - y - 1$ và $x + y + 1; x - y - 1$ là các ước dương của 12 từ đó có các trường hợp

$x + y + 1$	12	6	4
$x - y - 1$	1	2	3
x	$\frac{13}{2}$	4	$\frac{7}{2}$
y	$\frac{9}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$

Mà x, y nguyên dương nên $(x; y) = (4; 1)$