

1. MỞ ĐẦU

- Lý do chọn đề tài:

Phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức là các phần quan trọng trong chương trình toán phổ thông và thường gặp trong các kỳ thi học sinh giỏi, tuyển sinh đại học, cao đẳng. Phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức được đề cập nhiều trong các tài liệu tham khảo với nhiều phương pháp giải đa dạng và phong phú. Trong quá trình học tập và giảng dạy, ta bắt gặp nhiều bài toán về phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức mà việc giải quyết chúng là không hề đơn giản, buộc ta phải sử dụng một phương pháp đặc biệt nào đó. Vì vậy, trong phạm vi bài viết này, với mong muốn giúp các em học sinh có thêm một công cụ hữu hiệu giải quyết các bài toán về phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức trong các kỳ thi học sinh giỏi và tuyển sinh đại học, cao đẳng trong toàn quốc nên tôi chọn đề tài “**Sử dụng phương pháp hàm số giải bài toán phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức**”.

- Đối tượng nghiên cứu:

- Học sinh lớp 12 trường THPT Lê Lai.
- Kiến thức về sử dụng tính đơn điệu của hàm số, sử dụng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Nội dung đề tài được trình bày thành ba phần chính, trong mỗi phần tác giả trình bày theo trình tự: Kiến thức cơ sở, một số ví dụ có lời giải cụ thể và bài tập đề nghị.

Đề tài được nghiên cứu, thử nghiệm trong phạm vi lớp 12C1; 12C2 trường THPT Lê Lai, vào các tiết tự chọn thuộc chủ đề phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức.

- Phương pháp nghiên cứu:

a) Nghiên cứu tài liệu:

Nghiên cứu những tài liệu có liên quan đến đề tài:

- Sách giáo khoa Giải tích lớp 12 .
- Tài liệu tham khảo.

b) Điều tra:

- Thực dạy và kết quả kiểm tra:

Trong quá trình nghiên cứu đề tài, tôi đã tiến hành thực dạy các lớp 12C1; 12C2; 12C4

+Năm học 2015-2016: Lớp 12C1,12C2: thực nghiệm.

- Dự giờ: Thường xuyên dự giờ để biết được mức độ hiểu biết và khả năng giải toán phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức và cách giải quyết vấn đề của đồng nghiệp, từ đó để đánh giá chính xác kết quả phương pháp của mình.

- Đàm thoại:

+ Trao đổi với đồng nghiệp để có kinh nghiệm và phương pháp dạy phù hợp với phân môn.

+ Trao đổi với các em học sinh về các bài toán phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức để biết được cách tìm ra hướng giải bài toán của các em, từ đó có cách dạy tốt hơn.

c) Giả thuyết khoa học:

Nếu học sinh tìm ra được cách giải bài toán thì các em cảm thấy hăng say, tích cực, tự tin và kết quả kiểm tra cho thấy các lớp thực nghiệm vẫn cao hơn.

2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM.

2.1. Cơ sở lý luận:

- Thông qua quá trình dạy học tôi đã tìm tòi góp nhặt, nghiên cứu các dạng bài toán liên quan.

- Trong thực tiễn tôi đã vận dụng khá tốt các nội dung của chuyên đề. Từ đó hình thành cơ sở nghiên cứu chuyên đề này

2.2 Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến:

a) Thực trạng việc dạy của giáo viên:

Có một số giáo viên đã vận dụng phương pháp hàm số để giải các bài toán Phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức nhưng còn ở mức độ chung chung.

b) Thực trạng việc học của học sinh:

Đa số học sinh chỉ biết giải các bài tập tương tự với những bài mà mình đã giải rồi, và bế tắc khi gặp bài toán mới và lúng túng trong việc lựa chọn cách giải phù hợp.

Chất lượng thực tế qua khảo sát chất lượng năm 2014-2015:

Lớp	Số lượng	Đạt yêu cầu		Không đạt yêu cầu	
		Số lượng	%	Số lượng	%
12C1	38	17	44,7	21	55,3
12C2	43	15	35	28	65

c) Sự cần thiết của đề tài:

Qua phân tích thực trạng việc học của học sinh và việc dạy của giáo viên, tôi nhận thấy đề tài cần thiết đối với giáo viên trực tiếp giảng dạy nhằm giới thiệu những kinh nghiệm và phương pháp phù hợp để nâng cao hiệu quả dạy học tích cực cho học sinh lớp 12.

2.3. Các sáng kiến kinh nghiệm hoặc các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề:

a) Vấn đề được đặt ra:

Hiện nay cách dạy mới là làm sao phát huy được tính tích cực, chủ động và sáng tạo của học sinh trong học tập và rèn luyện. Để phát huy điều đó, chúng ta cần phải đưa ra được những phương pháp dạy học hợp lý nhằm tạo cho học sinh có hứng thú trong học tập, để đem lại kết quả trong học tập tốt hơn, và hiệu quả giảng dạy cao hơn.

b) Sơ lược quá trình thực hiện sáng kiến kinh nghiệm:

Để hoàn thành đề tài, tôi đã tiến hành các bước sau: Chọn đề tài; Điều tra thực trạng; Nghiên cứu đề tài; Xây dựng đề cương và lập kế hoạch; Tiến hành nghiên cứu; Thống kê so sánh; Viết đề tài.

c) Nội dung của đề tài

- Nội của đề tài được nghiên cứu trên cơ sở lí thuyết và bài tập mà các em đã được học trong chương trình THPT

- Đề tài cho các em thấy được các dạng bài toán phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức. Giúp cho học sinh tự phát hiện và lĩnh hội kiến thức từ đó biết lựa chọn phương pháp thích hợp để giải toán.

I. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình.

1. Kiến thức cơ sở

- Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên D thì

+) Phương trình $f(x)=k$ có không quá một nghiệm trên D .

+) Với $x, y \in D$, $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$.

- Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến và hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên D thì phương trình $f(x)=g(x)$ có không quá một nghiệm trên D .

- Nếu đồ thị hàm số $y=f(x)$ là lồi (lõm) trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=k$ có không quá hai nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

2. Một số ví dụ và bài tập đề nghị

Ví dụ 1. Giải phương trình $3^x = 4 - x$.

Giải

- Tập xác định $\mathbb{R}$

- Ta có $3^x = 4 - x \Leftrightarrow 3^x + x - 4 = 0$.

- Xét hàm số $f(x) = 3^x + x - 4$

Tập xác định $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3^x \ln 3 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(1) = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài tập đề nghị

1. Giải phương trình $\log x = 11 - x$.
2. Giải phương trình $9^{x^2} - (13 - x^2) \cdot 3^{x^2} - 9x^2 + 36 = 0$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\log_3 \left(\frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} \right) = x^2 + 3x + 2$

Giải

- Tập xác định $\mathbb{R}$.
- Ta có,

$$\log_3 \left(\frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} \right) = x^2 + 3x + 2.$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 + x + 3) + (x^2 + x + 3) = \log_3(2x^2 + 4x + 5) + (2x^2 + 4x + 5) \quad (*).$$

- Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$.

Tập xác định $(0; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \quad \forall t > 0.$$

Suy ra, hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- Do đó, $(*) \Leftrightarrow f(x^2 + x + 3) = f(2x^2 + 4x + 5) \Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 2x^2 + 4x + 5$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2. \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1, x = -2$.

Bài tập đề nghị

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3y = y^3 - 3x \\ 2x^2 - y^2 = 4. \end{cases}$
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3y = y^3 + 3x \\ 3x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Ví dụ 3. Giải phương trình $3^x = 2x + 1$.

Giải

- Tập xác định $\mathbb{R}$.
- Ta có,

$$3^x = 2x + 1 \Leftrightarrow 3^x - 2x - 1 = 0 \quad (*).$$

- Xét hàm số $f(x) = 3^x - 2x - 1$.

Tập xác định $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3^x \ln 3 - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = 3^x \ln^2 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Mặt khác, $x=0$ và $x=1$ là hai nghiệm của phương trình (*).

- Vậy phương trình có nghiệm $x=0$, $x=1$.

Bài tập đề nghị

1. Giải phương trình $2011^x + 2012^x = 4019x + 4$.

2. Giải phương trình $3^x = 1 + x + \log_3(1 + 2x)$.

3. Giải phương trình $(1 + \cos x)(2 + 4^{\cos x}) = 3 \cdot 4^{\cos x}$.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x = y^3 + y^2 + y - 2 & (1) \\ y = z^3 + z^2 + z - 2 & (2) \\ z = x^3 + x^2 + x - 2 & (3). \end{cases}$$

Giải

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + t - 2$

Tập xác định $\mathbb{R}$.

$$f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó, hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Giả sử $x = \max\{x; y; z\}$, suy ra $x = f(y) \geq f(z) = y$ và $x = f(y) \geq f(x) = z$.

Từ đó ta có $y \geq z$ và $y \geq x$, suy ra $f(y) \geq f(z)$ hay $z \geq x$.

Do đó $x \geq y \geq z \geq x \Rightarrow x = y = z$.

Với $y = x$, thế vào phương trình (1) ta có,

$$x^3 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $x = y = z = 1$.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 & (1) \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Giải

- Từ hệ phương trình ta có $x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} + 3^{x-1} = y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} + 3^{y-1}$ (*).

- Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 - 2t + 2} + 3^{t-1}$,

+) Txđ: $\mathbb{R}$.

$$+) f'(t) = 1 + \frac{t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}} + 3^{t-1} \ln 3 = \frac{\sqrt{t^2-2t+2} + t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}} + 3^{t-1} \ln 3 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó, (*) $\Leftrightarrow x = y$.

- Với $x = y$ thế vào phương trình (1) của hệ ta có,

$$x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{x-1} + 1 \Leftrightarrow x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{x-1} \quad (3).$$

- Từ phương trình (3) suy ra $3^{x-1}(x-1-\sqrt{x^2-2x+2}) = -1 \quad (4)$.

- Từ (3) và (4) suy ra: $3^{x-1} - x + 1 = x - 1 + 3^{1-x} \Leftrightarrow 3^{x-1} - 3^{1-x} - 2(x-1) = 0 \quad (5)$.

- Xét hàm số $f(x) = 3^{x-1} - 3^{1-x} - 2(x-1) = 0$.

+) Txđ: $\mathbb{R}$.

$$+) f'(x) = 3^{x-1} \ln 3 + 3^{1-x} \ln 3 - 2 = \ln 3(3^{x-1} + 3^{1-x}) - 2 \geq 2(\ln 3 - 1) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$+) f(1) = 0.$$

Do đó, $x = 1$ là nghiệm duy nhất phương trình (5).

Với $x = 1 \Rightarrow y = 1$. Thử lại, ta có $x = y = 1$ là nghiệm của hệ đã cho.

Bài tập đề nghị

$$1. \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = y \\ y^3 + 3y - 3 + \ln(y^2 - y + 1) = z \\ z^3 + 3z - 3 + \ln(z^2 - z + 1) = x \end{cases}$$

$$2. \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} 2x^3 + 2x^2 - 18 = y^3 + y \\ 2y^3 + 3y^2 - 18 = z^3 + z \\ 2z^3 + 3z^2 - 18 = x^3 + x. \end{cases}$$

Ví dụ 5. Giải bất phương trình $\sqrt{x+6} - \sqrt{7-x} \geq 1$.

Giải

Tập xác định $D = [-6; 7]$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x+6} - \sqrt{7-x}$.

Tập xác định $D = [-6; 7]$.

$$f'(x) = f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}} + \frac{1}{2\sqrt{7-x}} > 0 \quad \forall x \in (-6; 7).$$

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-6; 7]$.

Mặt khác $f(3)=1$, do đó $\sqrt{x+6} - \sqrt{7-x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Vậy bất phương trình có nghiệm $[3; 7]$.

Bài tập đề nghị

1. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3 + 3x^2 + 6x + 16} < 2\sqrt{3} + \sqrt{4-x}$.

2. Giải bất phương trình $\sqrt{\frac{6}{3-x}} + \sqrt{\frac{8}{2-x}} < 6$.

II. Sử dụng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số tìm giá trị tham số để phương trình, bất phương trình, hệ phương trình có nghiệm.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.

1. Kiến thức cơ sở

- Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm x thuộc đoạn $[a; b]$ khi và chỉ khi

$$\min_{[a; b]} f(x) \leq m \leq \max_{[a; b]} f(x).$$

- Bất phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm x thuộc đoạn $[a; b]$ khi và chỉ khi

$$\max_{[a; b]} f(x) \geq m.$$

- Bất phương trình $f(x) \leq m$ có nghiệm x thuộc đoạn $[a; b]$ khi và chỉ khi

$$\min_{[a; b]} f(x) \leq m.$$

- Bất phương trình $f(x) \geq m$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[a; b]$ khi và chỉ khi

$$\min_{[a; b]} f(x) \geq m.$$

- Bất phương trình $f(x) \leq m$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[a; b]$ khi và chỉ khi

$$\max_{[a; b]} f(x) \leq m.$$

2. Một số ví dụ và bài tập đề nghị

Ví dụ 1. Tìm m để phương trình sau $4x - 2 + 3\sqrt{21 - 4x - x^2} = m$.

- a) Có nghiệm.
- b) Có đúng một nghiệm.
- c) Có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Tập xác định $D = [-7; 3]$.

Xét hàm số $f(x) = 4x - 2 + 3\sqrt{21 - 4x - x^2}$.

Hàm số liên tục trên $D = [-7; 3]$.

$$f'(x) = 4 - \frac{3(2+x)}{\sqrt{21-4x-x^2}} = \forall x \in (-7; 3).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{21-4x-x^2} = 3(2+x).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 16(21-4x-x^2) = 9(2+x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \in (-7; 3)$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$.

x		-7		2		3	
$f'(x)$				+			
$f(x)$							
			-30		↗ 15	↘ 10	

Từ bảng biến thiên ta có,

- a) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-30 \leq m \leq 15$.
- b) Phương trình có đúng một nghiệm khi và chỉ khi $-30 \leq m < 10$ hoặc $m = 15$.
- c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $10 \leq m < 15$.

Ví dụ 2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$x^2 + 4x - m\sqrt{-x^2 - 4x - 3} + m + 2 = 0 \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

Giải

Điều kiện: $-3 \leq x \leq -1$, đặt $\sqrt{-x^2 - 4x - 3} = t$.

Ta có, $t \in [0;1]$ và phương trình $x^2 + 4x - m\sqrt{-x^2 - 4x - 3} + m + 2 = 0$ (1) trở thành:

$$t^2 + mt - m + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 1 = m(-t + 1) \Leftrightarrow \frac{t^2 + 1}{-t + 1} = m \quad (2).$$

($t = 1$ không là nghiệm của phương trình với mọi tham số thực m).

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [0;1)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 1}{-t + 1}$ trên nửa khoảng $[0;1)$.

+) Hàm số liên tục trên nửa khoảng $[0;1)$.

$$+) \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = +\infty.$$

$$+) f'(t) = \frac{2t(-t+1) + (t^2+1)}{(-t+1)^2} = \frac{-t^2 + 2t + 1}{(-t+1)^2} > 0 \quad \forall t \in (0;1).$$

+) Bảng biến thiên

x		0		1	
$f'(x)$			+		
$f(x)$				$+\infty$	
		1			

Từ bảng biến thiên phương trình có nghiệm $\forall m \in [1; +\infty)$.

Bài tập đề nghị

1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-1}.$$

2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2)3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m + 1 = 0.$$

3. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$4(\sin^4 x + \cos^4 x) + (5-2m)\cos 2x + 9 - 3m.$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m.$$

4. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực.

$$x^2 - 2x + m \cdot (x - 4) \cdot \sqrt{\frac{x+2}{4-x}} + 2\sqrt{8+2x-x^2} - 14 - m = 0.$$

5. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$4\sqrt{6+x-x^2} - 3x = m(\sqrt{x+2} + 2\sqrt{3-x}).$$

6. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} - 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}.$$

Ví dụ 3. Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \geq 1$

$$-x^3 + 3mx - 2 < \frac{-1}{x^3} (*).$$

Giải

$$\text{Ta có } -x^3 + 3mx - 2 < \frac{-1}{x^3} \Leftrightarrow 3mx < x^3 - \frac{1}{x^3} + 2 \Leftrightarrow 3m < x^2 - \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x}.$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x}$, trên nửa khoảng $[1; +\infty)$.

Hàm số liên tục trên nửa khoảng $[1; +\infty)$.

$$f'(x) = 2x + \frac{4}{x^5} - \frac{2}{x^2} \geq 2\sqrt{2x\left(\frac{4}{x^5}\right)} - \frac{2}{x^2} = \frac{4\sqrt{2} - 2}{x^2} > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Suy ra, $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

$$\text{Do đó } f(x) > 3m \quad \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \min_{x \geq 1} f(x) = f(1) = 2 > 3m \Leftrightarrow \frac{2}{3} > m.$$

Bài tập đề nghị

1. Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in [2; 2 + \sqrt{3}]$

$$x(4-x) + m(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + 2) \leq 0.$$

2. Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in [-4, 6]$

$$\sqrt{(4+x)(6-x)} \leq x^2 - 2x + m.$$

3. Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in [-3, 6]$

$$\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \leq m^2 - m + 1.$$

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình: $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$ có nghiệm.

Giải

Chú ý: Nếu tính $f'(x)$ rồi xét dấu thì thao tác rất phức tạp, dễ nhầm lẫn.

Thủ thuật:

$$\text{Đặt } g(x) = x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} > 0 \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x+12}} > 0$$

$$h(x) = \sqrt{5-x} + \sqrt{4-x} > 0 \Rightarrow h'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} < 0.$$

Suy ra $g(x) > 0$ và tăng; $h(x) > 0$ và giảm hay $\frac{1}{h(x)} > 0$ và tăng.

Do đó $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ tăng. Suy ra $f(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$m \in \left[\min_{[0;4]} f(x); \max_{[0;4]} f(x) \right] = [f(0); f(4)] = [2(\sqrt{15} - \sqrt{12}); 12].$$

Bài tập đề nghị

1. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm $m\sqrt{x} + 1 \leq \sqrt{x-3} + 2m$.
2. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm $x^3 + 3x^2 - 1 \leq m(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^3$.

Ví dụ 5. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3} = 15m - 10. \end{cases}$$

Giải

- Đặt $u = x + \frac{1}{x}; v = y + \frac{1}{y}$.

- Ta có, $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = u^3 - 3u;$

$$|u| = \left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \left|\frac{1}{x}\right| \geq 2\sqrt{|x| \cdot \left|\frac{1}{x}\right|} = 2;$$

$$|v| = |y + \frac{1}{y}| \geq 2\sqrt{|y| \cdot \left|\frac{1}{y}\right|} = 2.$$

- Khi đó hệ trở thành
$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^3 + v^3 - 3(u + v) = 15m - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 8 - m. \end{cases}$$

-) u, v nếu có là nghiệm của phương trình $f(t) = t^2 - 5t + 8 - m$.

- Do đó, hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $|t_1| \geq 2; |t_2| \geq 2$.

- Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ với $|t| \geq 2$

T	$-\infty$	-2		2	$5/2$	$+\infty$
$f'(t)$		$-$		$-$	0	$+$
$f(t)$	$+\infty$			2		$+\infty$
					$7/4$	

Nhìn bảng biến thiên ta có $\frac{7}{4} \leq m \leq 2 \vee m \geq 22$.

Bài tập đề nghị

1. Chứng minh rằng với mọi số thực dương m hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} y - x = m \\ e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

2. Tìm m để hệ $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{x+7} + \sqrt{y+7} \leq m \end{cases}$ (m là tham số thực) có nghiệm

$(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $x \geq 9$.

III. Sử dụng tính đơn điệu, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số để chứng minh bất đẳng thức.

1. Kiến thức cơ sở

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$ thì

$$1) f(a) < f(x) < f(b) \quad \forall x \in (a, b).$$

$$2) f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a; b].$$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ thì

$$1) f(a) > f(x) > f(b) \quad \forall x \in (a, b).$$

$$2) f(a) \geq f(x) \geq f(b) \quad \forall x \in [a; b].$$

2. Một số ví dụ và bài tập đề nghị

Ví dụ 1. Chứng minh rằng $\cos x < \frac{\sin^2 x}{x^2}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} - x$, trên khoảng nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

+) $f(x)$ liên tục trên khoảng nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$+) f'(x) = \frac{1 + \cos^2 x - 2\sqrt{\cos x} \cos x}{2 \cos x \sqrt{\cos x}} > \frac{(1 - \cos x)^2}{2\sqrt{\cos x} \cos x} > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\text{Từ đó } f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos x} > x^2 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ (đpcm)}.$$

Bài tập đề nghị

1. Chứng minh rằng

a) $1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x \quad \forall x \neq 0.$

b) $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x \quad \forall x > 0.$

c) $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \forall x \neq 0.$

d) $\sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad \forall x > 0.$

e) $e^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

f) $\ln x < \frac{x}{e} \quad \forall x \in (0; +\infty) \setminus \{e\}.$

g) $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2} \quad \forall x \in (0; +\infty) \setminus \{e\}.$

h) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$

2. Chứng minh rằng

a) $\sin x + \tan x > 2x \quad \forall x \in (0; \frac{\pi}{2}).$

b) $\frac{1}{2} \tan x + \frac{2}{3} \sin x > x \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$

c) $x(2 + \cos x) > 3 \sin x \quad \forall x > 0.$

d) $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

e) $\pi x(1 - x) < \sin x \leq 4x(1 - x) \quad \forall x \in (0; 1).$

3. Chứng minh rằng:

a) $e^x < 1 + xe^x \quad \forall x > 0.$

b) $e^x - 1 - x < x^2 e^x \quad \forall x > 0.$

c) $x.e^{\frac{x}{2}} < e^x - 1 \quad \forall x > 0.$

d) $e^x < (1+x)^{1+x} \quad \forall x > 0.$

4. Chứng minh rằng

a) $\ln(1 + \sqrt{1+x^2}) < \frac{1}{x} + \ln x \quad \forall x > 0.$

b) $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad \forall x > 0.$

c) $(1-x)^2 \geq x \ln^2 x \quad \forall x > 0.$

d) $\ln(1 + \cos x) < \ln 2 - \frac{x^2}{4} \quad \forall x \in (0; \pi).$

5. Chứng minh rằng:

a) $\sin(\tan x) \geq x \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$

b) $\tan(\sin x) \geq x \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$

Ví dụ 2. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0$ (1).

Tìm m để $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất.

Giải

- Phương trình $12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0$ (1), có hai nghiệm phân biệt khi

và chỉ khi $\Delta = 9m^2 - 12\left(m^2 - 4 + \frac{12}{m^2}\right) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m^4 + 48m^2 - 144 \geq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3} \leq m \leq 2 \\ 2 \leq m \leq 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Theo định thức Viét ta có.

$$A = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$= \left(\frac{m}{3}\right)^3 - \frac{3}{12}\left(m^2 - 4 + \frac{12}{m^2}\right)\frac{m}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(m - \frac{3}{m} \right).$$

Xét hàm số $f(m) = m - \frac{3}{m}$ trên $D = [-2\sqrt{3}; -2] \cup [2; 2\sqrt{3}]$.

$$f'(m) = 1 + \frac{1}{m^2} > 0 \quad \forall m \in (-2\sqrt{3}; -2) \cup (2; 2\sqrt{3}).$$

Bảng biến thiên

m	$-2\sqrt{3}$	-2	2	$2\sqrt{3}$
$f'(m)$	+		-	
$f(m)$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên ta được

$$\max A = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ đạt được khi và chỉ khi } m = 2\sqrt{3}.$$

$$\min A = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ đạt được khi và chỉ khi } m = -2\sqrt{3}.$$

Bài tập đề nghị

1. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + ax + \frac{1}{a^2} = 0$. Tìm m để $P = x_1^4 + x_2^4$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - (a+1)x + a^2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x; y) = 3 \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) - 8 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$ ($x, y \neq 0$).

Giải

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Ta có,

$$+) |t| = \left| \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{y}{x} \right| \geq 2.$$

+) Hàm số đã cho trở thành

$$f(t) = 3(t^2 - 2) - 8t \Rightarrow f(t) = 3t^2 - 8t - 6 \quad t \in (-\infty; 2] \cup [2; +\infty).$$

$f(t)$ liên tục trên các tập $(-\infty; 2], [2; +\infty)$.

$$f'(t) = 6t - 8 \quad \forall t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \notin (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-2	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$
$f'(t)$	+		0	-	
$f(t)$	$+\infty \rightarrow 22$			$20 \rightarrow +\infty$	

Bài tập đề nghị

1. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $P = \frac{\sin^2 x + 2 \sin x + 3}{\sin^2 x + 3 \sin x + 4}$.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $P = 2^{\sin^2 x} + 2^{1+\cos^2 x}$.
3. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của

$$P = \left(\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} \right) - 2 \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \quad (x, y \neq 0).$$

4. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của

$$P = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x + \frac{1}{\cos x} - 4.$$

Ví dụ 4: Cho các số dương x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{4y^2 + 2xy - 1}{2xy - 2x^2 + 3}$.

Giải

Nếu $x = 0$ thì từ giả thiết $x^2 + y^2 = 1$ ta có $y = 1$, suy ra $P = 1$.

Nếu $x \neq 0$ thì đặt $y = tx$ ($t \geq 0$). Từ giả thiết ta có

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + t^2 x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{1+t^2}.$$

$$\text{Ta có, } P = \frac{4t^2 x^2 + 2tx^2 - 1}{2tx^2 - 2x^2 + 3} = \frac{3t^2 + 2t - 1}{3t^2 + 2t + 1}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{3t^2 + 2t - 1}{3t^2 + 2t + 1}$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{12t^2 + 4t}{(3t^2 + 2t + 1)^2} \quad \forall t \in (0; +\infty).$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in (0; +\infty) \\ t = -\frac{1}{3} \notin (0; +\infty). \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	-1	1

Từ bảng biến thiên ta có,

$\min P = -1$ đạt được khi $t = 0 \Leftrightarrow x = 1$ và $y = 0$.

$\max P = 1$ đạt được khi $t = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $y = 1$.

Bài tập đề nghị

1. Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$.

2. Cho hai số thực dương x, y thay đổi và thỏa mãn điều kiện $xy \leq y - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{y^2} + 9 \frac{y^3}{x^3}$.

Ví dụ 5: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 - xy + y^2$.

Giải

$$\text{Ta có, } A = x^2 - xy + y^2 = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}.$$

Nếu $y = 0$ thì $x = \pm 1$ và $A = 1$.

$$\text{Nếu } y \neq 0 \text{ thì } A = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) + 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) + 1}.$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$, ta được $A = f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1}$.

$$f'(t) = \frac{2(t^2 - 1)}{(t^2 + t + 1)^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(t)$		0	0	
$f(t)$	1	$\nearrow 3$	$\searrow \frac{1}{3}$	$\nearrow 1$

Từ bảng biến thiên ta có,

$\max A = 3$ đạt được khi $t = -1$ hay $(x; y) = (1; -1), (-1; 1)$.

$\min P = -1$ đạt được khi $t = 1$ hay $(x; y) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Bài tập đề nghị

1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^4 + y^4 - x^2y^2$.

2. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2}$.

2. Cho các số thực không âm x, y thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.

3. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$.

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường.

Đây là mảng kiến thức đòi hỏi tư duy cao, nên nội dung đề tài được tác giả thực nghiệm sư phạm trong luyện thi đại học và bồi dưỡng học sinh giỏi. Kết quả cho thấy:

- Sau khi giảng dạy chuyên đề này học sinh nắm sâu hơn về kiến thức hàm số như: tập xác định, tập giá trị, tính đơn điệu, tính liên tục, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất...

- Cách phân dạng bài tập giúp học sinh dễ hiểu, định hướng vấn đề, giải quyết vấn đề một cách logic hơn. Học sinh vận dụng làm tốt một số đề thi đại học, cao đẳng và đề thi học sinh giỏi ở phần này.

3. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ.

- Kết luận:

Các bài toán về phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức là loại bài toán khó, đòi hỏi tư duy cao. Vì vậy, trong quá trình giảng dạy, giáo viên cần phải phân dạng bài tập một cách có hệ thống và trình bày rõ ràng.

Đề tài chỉ là kinh nghiệm nhỏ, kết quả của sự nghiên cứu cá nhân. Rất mong được sự đóng góp của đồng nghiệp.

- Kiến nghị:

Trong khuôn khổ đề tài, tác giả mới dừng lại ở mức phân dạng và đưa ra các ví dụ, bài tập đề nghị cụ thể. Xét thấy, phạm vi đề tài có thể được mở rộng, phát triển bằng cách phân tích các ví dụ, bài tập để đưa ra các bài tập tương tự và các bài tập ở mức độ cao hơn. Ví dụ, vận dụng bài toán

Chứng minh rằng $\cos x < \frac{\sin^2 x}{x^2}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, giáo viên có thể định hướng cho học sinh đi đến bài toán

Cho tam giác ABC nhọn với các góc tương ứng A, B, C . Chứng minh rằng:

$$\cos A + \cos B + \cos C < \frac{\sin^2 A}{A^2} + \frac{\sin^2 B}{B^2} + \frac{\sin^2 C}{C^2}.$$