

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT HẬU LỘC 2

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**DẠY PHỤ ĐẠO HỌC SINH YẾU KÉM GIẢI MỘT SỐ
BÀI TOÁN GIỚI HẠN HÀM SỐ LỚP 11**

Người thực hiện: Nguyễn Thị Den
Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc môn: Toán

THANH HÓA, NĂM 2016

MỤC LỤC

	Trang
1. PHẦN MỞ ĐẦU	
1.1.Lí do chọn đề tài.....	2
1.2.Mục đích nghiên cứu.....	2
1.3. Đối tượng nghiên cứu.....	2
1.4. Phương pháp nghiên cứu.....	2
2. NỘI DUNG	
2.1. Cơ sở lí luận.....	3
2.2. Thực trạng của đề tài.....	4
2.3. Giải pháp thực hiện.....	5
I. Dạng không vô định.....	5
II. Dạng 0/0, không chứa căn	6
III. Dạng 0/0, có chứa căn.....	6
IV. Dạng vô định không chứa căn.....	12
V. Dạng vô định có chứa căn.....	13
2.4. Kết quả kiểm nghiệm.....	18
3. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ	
3.1. Kết luận.....	18
3.2. Kiến nghị và đề xuất.....	19

1. PHẦN MỞ ĐẦU

1.1. Lí do chọn đề tài

Trong chương trình toán trung học phổ thông, bài toán tìm giới hạn hàm số và ứng dụng của giới hạn hàm số là một phần rất quan trọng mà học sinh thường xuyên gặp. Cụ thể là cung cấp kiến thức ban đầu để học sinh có thể tiếp cận được đạo hàm của hàm số; các bài toán liên quan đến đường tiệm cận của đồ thị hàm số; sự biến thiên của hàm số, đặc biệt là bài toán khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số và các bài toán có liên quan. Các dạng bài toán nói trên rất quan trọng trong các đề thi tốt nghiệp và tuyển sinh đại học các năm trước cũng như trong đề thi THPT quốc gia năm nay và các năm tới.

Tuy nhiên, phần kiến thức giới hạn hàm số khá trừu tượng nên đa số học sinh, đặc biệt là những học sinh có học lực yếu kém và trung bình. Các em thường gặp khó khăn trong việc giải quyết các bài toán liên quan đến kiến thức này, cụ thể là việc xác định dạng và sử dụng phương pháp phù hợp với từng bài toán. Những dạng toán này ngoài việc đòi hỏi học sinh nắm vững lý thuyết thì cần phải nắm được phương pháp nhận dạng và cách giải tương ứng.

Vì vậy, để giúp các học sinh học tập tốt phần này, giáo viên có tài liệu tham khảo để giảng dạy, góp phần nâng cao chất lượng dạy và học. Tôi mạnh dạn đưa ra một số kinh nghiệm của mình được đúc rút từ nhiều năm giảng dạy thông qua đề tài: “ **Dạy phụ đạo học sinh yếu kém giải một số bài toán tìm giới hạn hàm số lớp 11**”

1.2. Mục đích nghiên cứu

- Tìm hiểu những khó khăn và thuận lợi của học sinh, đặc biệt là học sinh yếu kém khi học phần giới hạn hàm số.
- Phát triển tư duy hàm, tư duy logic, khả năng tổng hợp, so sánh phân tích của học sinh.
- Thông qua đề tài này tôi mong muốn sẽ giúp học sinh, đặc biệt là học sinh học yếu có thể học tốt phần giới hạn hàm số. Hy vọng đề tài nhỏ này sẽ giúp các bạn đồng nghiệp làm tư liệu tham khảo thêm. Giúp cho quá trình dạy và học môn toán đạt hiệu quả cao.

1.3. Đối tượng nghiên cứu

- Học sinh khối 11 THPT
- Giáo viên giảng dạy môn Toán bậc THPT

- Về nội dung chỉ đưa ra cách phân loại các dạng và phương pháp giải tương ứng với từng dạng toán cụ thể các bài toán tìm giới hạn hàm số lớp 11

1.4. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp

- Nghiên cứu lí luận chung
- Khảo sát điều tra từ thực tế dạy và học
- Tổng hợp, so sánh, đúc rút kinh nghiệm

Cách thực hiện

Trao đổi với đồng nghiệp, tham khảo ý kiến của các giáo viên cùng tổ bộ môn Liên hệ thực tế trong nhà trường, áp dụng đúc rút trong quá trình giảng dạy.

2. NỘI DUNG

2.1. Cơ sở lí luận

Trong thực tế giảng dạy nếu chỉ cung cấp kiến thức mới và làm các bài tập mà không chú ý tới các dạng của bài toán thì học sinh sẽ gặp khó khăn khi gặp những dạng toán được phát triển từ dạng toán ban đầu. Đặc biệt là những học sinh thuộc dạng trung bình – yếu và kém vì tư duy của các em bị hạn chế. Do đó, để học sinh nắm bài, nhớ bài tốt theo tôi nên tổng hợp lại các dạng toán để học sinh có thể vận dụng tốt khi gặp phải những dạng toán tương tự.

Để thực hiện đề tài này, sau khi học sinh đã làm bài tập sách giáo khoa, tôi giao nhiệm vụ cho các tổ một số dạng đề học sinh trong tổ thảo luận và tóm tắt dạng toán và làm những ví dụ tôi yêu cầu, sau đó tổng hợp các tổ lại và tiến hành nhận xét và chỉnh sửa lại cho hoàn chỉnh.

Một số kiến thức cần lưu ý:

Hằng đẳng thức đáng nhớ (dùng trong nhân liên hợp)

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Một số định lý về giới hạn của hàm số:

Định lý: (Các phép toán trên các giới hạn của hàm số).

Nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có giới hạn khi $x \rightarrow a$ thì:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x).g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x). \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, (\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}, (f(x) \geq 0)$$

Giới hạn một bên:

Định nghĩa: Số L được gọi là giới hạn bên phải (hoặc bên trái) của hàm số $f(x)$ khi x dần tới a , nếu với mọi dãy số (x_n) với $x_n > a$ (hoặc $x_n < a$) sao cho

$$\lim x_n = a \text{ thì } \lim f(x_n) = L.$$

$$\text{Ta viết: } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \text{ (hoặc } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L).$$

Định lý: Điều kiện cần và đủ để $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ là $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ đều tồn tại và bằng L .

Các dạng vô định:

Khi tìm giới hạn của hàm số, ta có thể gặp một số trường hợp vô định sau đây (dạng vô định là dạng không thể suy ra ngay được kết quả mà phải tìm cách để khử).

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{u(x)}{v(x)} \text{ mà } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} u(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} v(x) = 0 \quad . \quad (\text{ta ký hiệu là } \frac{0}{0})$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{u(x)}{v(x)} \text{ mà } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} u(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} v(x) = \infty \quad . (\text{ta ký hiệu là } \frac{\infty}{\infty})$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} [u(x).v(x)] \text{ mà } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} u(x) = 0 \text{ và } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} v(x) = \infty \quad . (\text{ta ký hiệu là } 0.\infty)$$

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} [u(x) - v(x)] \text{ mà } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} u(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} v(x) = +\infty$$

$$\text{hoặc } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} u(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} v(x) = -\infty \quad . \quad (\text{ta ký hiệu là } \infty - \infty)$$

2.2. Thực trạng của đề tài

Giới hạn là một mảng kiến thức khá trừu tượng đối với học sinh phổ thông nên việc tiếp cận kiến thức này là khó đối với đa số học sinh đặc biệt là những học sinh có học lực trung bình, yếu và kém. Sau nhiều năm giảng dạy môn Toán ở cấp THPT tôi thấy còn rất nhiều học sinh học tập môn toán một cách thụ động, đối phó; kĩ năng giải các bài toán còn yếu, đặc biệt là kĩ năng nhận dạng và phân loại các dạng toán cũng như áp dụng phương pháp phù hợp

cho từng dạng toán còn nhiều lúng túng. Nguyên nhân chủ yếu là do học sinh mất căn bản về kiến thức, kỹ năng và phương pháp giải toán; lại thêm lười học, thiếu ý thức tự học. Thực trạng trên dẫn đến: Còn nhiều học sinh học trước quên sau nên chưa có hứng thú học tập môn Toán, đặc biệt là phần giới hạn hàm số.

Số liệu thống kê ở lớp 11C5, 11C7 khi chưa triển khai đề tài này

Lớp	Sĩ số	Giỏi	Khá	TB	Yếu	Kém
11C5	45	0	6	19	15	5
11C7	44	0	5	15	18	6

2.3. Giải pháp thực hiện:

Đề tài đã phân loại các dạng toán cụ thể và phương pháp giải tương ứng. Cụ thể có đề cập đến phương pháp:

+ Cách thêm bớt số hạng bằng cách xem xét đưa dạng vô định thành tổng hai dạng vô định *cùng loại*. Phương pháp này giúp học sinh dễ dàng hơn trong việc xác định số hạng cần thêm bớt.

+ Cách dùng “*số hạng vô cực*” để xác định bài toán nào cần nhân lượng liên hợp và bài toán nào không nhân lượng liên hợp. Phương pháp này giúp học sinh nhân lượng liên hợp một cách hợp lý cho từng bài toán cụ thể, tránh việc nhân lượng liên hợp tùy ý mỗi khi thấy có căn thức.

Nội dung cụ thể của đề tài:

I. Dạng không vô định:

Nhận dạng: x dần đến a, thế a vào biểu thức đã cho ta được kết quả là số thực hoặc dạng L/0.

Phương pháp giải: thế a vào biểu thức đã cho, ta được kết quả là một số thực (Kiểu bài này hầu hết học sinh đều làm được).

Ví dụ: Tính các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} (2x^3 - 3x + 4) = 2.(-2)^3 - 3.(-2) + 4 = -26$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{1^2 + 4.1 + 1}{1^2 - 1 + 1} = 6$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{1-x} + 2x}{x+1} = \frac{\sqrt{1-(-3)} + 2(-3)}{-3+1} = 2$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x}) = (\sqrt{-1+2} + \sqrt[3]{-1}) = 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x + 2} = \frac{5^2 - 25}{5 + 2} = 0$$

Nếu gặp bài dạng khi x dần đến a, không vô định nên ta thế a vào, được kết quả không phải là số thực thì ta áp dụng ngay định lí.

Ví dụ:

$$6) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty \text{ do } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0; x-1 < 0, \forall x < 1 \end{cases}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{2-x} = -\infty \text{ do } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (2-x) = 0; 2-x < 0, \forall x > 2 \end{cases}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x + 6}{x-2} = +\infty \text{ do } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + x + 6) = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0; x-2 > 0, \forall x > 2 \end{cases}$$

Nhận xét: Dạng này chỉ cần học sinh biết cách xét dấu biểu thức dưới mẫu số và áp dụng định lí SGK

II. Dạng 0/0, không chứa căn:

Nhận dạng: x dần tới a, không chứa căn thức, thế a vào biểu thức ta được kết quả 0/0.

Phương pháp giải: ta đặt nhân tử chung (x-a), đơn giản (x-a), thế a vào biểu thức sau khi rút gọn ta được kết quả và giải thích nếu kết quả không phải là số thực.

Ví dụ: Tính các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x+5} = \frac{8}{9}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 1) = 2$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)^2(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 2)}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x^3 + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2 - x)(2 + x)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - x}{x^2 - 2x + 4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{(x + 3)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x - 3} = \frac{-1}{6}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 1) = 2$$

Nhận xét: Dạng này chỉ cần dạy cho học sinh thành thạo cách phân tích đa thức thành nhân tử, có thể hướng dẫn các em sử dụng máy tính cầm tay

III. Dạng 0/0, có chứa căn:

Nhận dạng: x dần tới a, thế a vào biểu thức ta được 0/0, có chứa căn và nhưng không đặt được nhân tử chung (x-a).

Phương pháp giải: Ta nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp, sau đó đặt nhân tử chung (x-a), đơn giản (x-a), thế a vào biểu thức cuối cùng ta được kết quả và giải thích nếu kết quả không phải là số thực.

$$\text{Ví dụ: } 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x} - 1)(\sqrt{1+2x} + 1)}{2x(\sqrt{1+2x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x(\sqrt{1+2x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+2x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{9+x} - 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(\sqrt{9+x} + 3)}{(\sqrt{9+x} - 3)(\sqrt{9+x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(\sqrt{9+x} + 3)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 4(\sqrt{9+x} + 3) = 24$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} - 3}{2 - \sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x+7} - 3)(\sqrt{2x+7} + 3)(2 + \sqrt{x+3})}{(2 - \sqrt{x+3})(\sqrt{2x+7} + 3)(2 + \sqrt{x+3})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - 2)(2 + \sqrt{x+3})}{(1 - x)(\sqrt{2x+7} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(2 + \sqrt{x+3})}{(\sqrt{2x+7} + 3)} = \frac{-4}{3}$$

$$\begin{aligned}
4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - \sqrt{3x-2})(x + \sqrt{3x-2})}{(x-2)(x+2)(x + \sqrt{3x-2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-2)(x+2)(x + \sqrt{3x-2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x + \sqrt{3x-2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)}{(x+2)(x + \sqrt{3x-2})} = \frac{1}{16} \\
5) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+2}}{3x+3} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+2})(\sqrt{3+2x} + \sqrt{x+2})}{(3x+3)(\sqrt{3+2x} + \sqrt{x+2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)}{(3x+3)(\sqrt{3+2x} + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{3(\sqrt{3+2x} + \sqrt{x+2})} = \frac{1}{6} \\
6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} + x - 4}{x^3 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x+7} + x - 4)(\sqrt{2x+7} - x + 4)}{(x^3 - 4x + 3)(\sqrt{2x+7} - x + 4)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x+7} + x - 4)(\sqrt{2x+7} - x + 4)}{(x^3 - 4x + 3)(\sqrt{2x+7} - x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-x^2 + 10x - 9)}{(x^3 - 4x + 3)(\sqrt{2x+7} - x + 4)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x-9)}{(x-1)(x^2 + x - 3)(\sqrt{2x+7} - x + 4)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-9)}{(x^2 + x - 3)(\sqrt{2x+7} - x + 4)} = -\frac{4}{3} \\
7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x} - 1)(\sqrt{1+2x} + 1)}{2x(\sqrt{1+2x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x(\sqrt{1+2x} + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+2x} + 1} = \frac{1}{2} \\
8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt[3]{4x} - 2)((\sqrt[3]{4x})^2 + 2\sqrt[3]{4x} + 2^2)}{(x - 2)((\sqrt[3]{4x})^2 + 2\sqrt[3]{4x} + 2^2)}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4x - 8)}{(x - 2) \left((\sqrt[3]{4x})^2 + 2\sqrt[3]{4x} + 2^2 \right)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{(\sqrt[3]{4x})^2 + 2\sqrt[3]{4x} + 2^2} = \frac{1}{3}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1) \left((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1 \right) (\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) \left((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1) \left((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{2}{3}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt[3]{x+3}}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2 - \sqrt[3]{x+3}) \left(2^2 + 2\sqrt[3]{x+3} + (\sqrt[3]{x+3})^2 \right)}{(x^2 - 25) \left(2^2 + 2\sqrt[3]{x+3} + (\sqrt[3]{x+3})^2 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 - x}{(x + 5)(x - 5) \left(2^2 + 2\sqrt[3]{x+3} + (\sqrt[3]{x+3})^2 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-1}{(x + 5) \left(2^2 + 2\sqrt[3]{x+3} + (\sqrt[3]{x+3})^2 \right)} = \frac{-1}{300}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1})}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1}} = 0$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^2 - x + \sqrt{2} - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x^2 - 2 - (x - \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) - (x - \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2} - 1)} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x + \sqrt{2}}{x + \sqrt{2} - 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{x - 5\sqrt{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 4} = \frac{-4}{3}$$

$$\begin{aligned}
14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2 - \sqrt{4x^2 - x - 2}}{x^2 - 3x + 2} \\
= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x - 2 + \sqrt{4x^2 - x - 2})(3x - 2 - \sqrt{4x^2 - x - 2})}{(x^2 - 3x + 2)(3x - 2 + \sqrt{4x^2 - x - 2})} = \\
= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 11x + 6}{(x^2 - 3x + 2)(3x - 2 + \sqrt{4x^2 - x - 2})} \\
= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(5x - 6)}{(x - 1)(x - 2)(3x - 2 + \sqrt{4x^2 - x - 2})} \\
= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 6}{(x - 2)(3x - 2 + \sqrt{4x^2 - x - 2})} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 + 2x + 4}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - 2x + 4)}{(x+1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 4} = \frac{-7}{5}$$

$$\begin{aligned}
16) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 3)(x^2 - 9)}{(x+3)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 3)(x - 3)(x + 3)}{(x+3)(x^2 + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 3)(x - 3)}{(x^2 + 1)} = -\frac{36}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
17) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - \sqrt{x+2})(x + \sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1} + 3)}{(\sqrt{4x+1} - 3)(\sqrt{4x+1} + 3)(x + \sqrt{x+2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)(\sqrt{4x+1} + 3)}{(4x - 8)(x + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)(\sqrt{4x+1} + 3)}{4(x-2)(x + \sqrt{x+2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(\sqrt{4x+1} + 3)}{4(x + \sqrt{x+2})} = \frac{9}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt[3]{1-x}) \left(1 + \sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2 \right)}{x \left(1 + \sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2 \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \left(1 + \sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2} = \frac{1}{3} \\
19) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt[3]{x} + 1) \left((\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + 1 \right) (\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(\sqrt{x^2 + 3} - 2) (\sqrt{x^2 + 3} + 2) \left((\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + 1 \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1) (\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(x^2 - 1) \left((\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1) (\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(x-1)(x+1) \left((\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + 1 \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2}{(x-1) \left((\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + 1 \right)} = \frac{-2}{3} \\
20) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3 - \sqrt{5+x})(3 + \sqrt{5+x})(1 + \sqrt{5-x})}{(1 - \sqrt{5-x})(1 + \sqrt{5-x})(3 + \sqrt{5+x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(1 + \sqrt{5-x})}{(x-4)(3 + \sqrt{5+x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(1 + \sqrt{5-x})}{3 + \sqrt{5+x}} = \frac{-1}{3} \\
21) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1) \left((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1 \right) (\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(\sqrt{x^2 + 3} - 2) (\sqrt{x^2 + 3} + 2) \left((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1 \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) (\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(x^2 - 1) \left((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) (\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(x-1)(x+1) \left((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1 \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2}{(x+1) \left((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1 \right)} = \frac{2}{3} \\
22) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-2} + 1 + \sqrt{1-x+x^2} - 1}{x^2 - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x-2} + 1}{x^2 - 1} + \frac{\sqrt{1-x+x^2} - 1}{x^2 - 1} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt[3]{x-2} + 1)(\sqrt[3]{x-2}^2 - \sqrt[3]{x-2} + 1)}{(x^2 - 1)(\sqrt[3]{x-2}^2 - \sqrt[3]{x-2} + 1)} + \frac{(\sqrt{1-x+x^2} - 1)(\sqrt{1-x+x^2} + 1)}{(x^2 - 1)(\sqrt{1-x+x^2} + 1)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x-2}^2 - \sqrt[3]{x-2} + 1)} + \frac{x^2 - x}{(x-1)(x+1)(\sqrt{1-x+x^2} + 1)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x-2}^2 - \sqrt[3]{x-2} + 1)} + \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{1-x+x^2} + 1)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(x+1)(\sqrt[3]{x-2}^2 - \sqrt[3]{x-2} + 1)} + \frac{x}{(x+1)(\sqrt{1-x+x^2} + 1)} \right) = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x} - 3)(\sqrt{1+2x} + 3)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{1+2x} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x - 8)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{1+2x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{1+2x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{1+2x} + 3} = \frac{4}{3}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt[3]{1-x})(1 + \sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2)}{3x(1 + \sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x(1 + \sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1 + \sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2)} = \frac{1}{9}$$

Nhận xét: Đối với dạng toán này học sinh có học lực yếu kém thì việc tiếp thu kiến thức rất khó khăn nên tôi phải kiên trì dạy cho các em sử dụng hằng đẳng thức thành thạo, phát hiện nhanh biểu thức liên hợp cần nhân và tính toán khai triển các biểu thức tốt

IV. Dạng vô định không chứa căn:

Nhận dạng: x dần đến vô cực, không chứa căn.

Phương pháp giải: đặt lũy thừa bậc cao nhất của x làm nhân tử chung, đơn giản, suy ra kết quả và giải thích nếu kết quả không phải là số thực.

Ví dụ: Tính các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 2x^2 + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 \left(1 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^5} \right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{1 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^5}}{1 + \frac{1}{x^3}} = +\infty$$

$$\text{do } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^5}}{1 + \frac{1}{x^3}} = 1 \end{cases}$$

Bài này có dạng x dần đến vô cực, không chứa căn nên đặt nhân tử chung, đơn giản, suy ra kết quả dựa vào định lý SGK.

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{3x^2 - x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x}}{3 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{2}{3}$$

Bài này cho ta kết quả là một số thực

Các bài toán tương tự:

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-2)(2x+1)(1-4x)}{(3x+4)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{2}{x} \right) \left(2 + \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x} - 4 \right)}{x^3 \left(3 + \frac{4}{x} \right)^3} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{x} \right) \left(2 + \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x} - 4 \right)}{\left(3 + \frac{4}{x} \right)^3} = \frac{-8}{27}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{8}{x^2} \right)}{x^4 \left(1 - \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{8}{x^2} \right)}{\left(1 - \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right)} = 0.1 = 0$$

V. Dạng vô định có chứa căn:

Nhận dạng: x dần đến vô cực, có chứa căn

Phương pháp giải: đây là dạng có thể sẽ phải nhân liên hợp. Ta gọi ax^n là “số hạng vô cực” trong đó x^n là lũy thừa bậc cao nhất của x, và ax^n được tính bằng cách chỉ quan tâm đến những số hạng có lũy thừa cao nhất.

Nếu $ax^n = 0x^n$: ta nhân liên hợp.

Nếu $ax^n \neq 0x^n$: ta không nhân liên hợp mà đặt nhân tử chung lũy thừa bậc cao nhất của x.

Có thể minh họa như các ví dụ cụ thể sau đây:

Ví dụ: Tính các giới hạn sau:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nhận xét: Bài này có dạng x dần đến vô cực, vô định, đây là dạng có thể phải nhân liên hợp do có chứa căn, cách nhận biết nhân liên hợp như sau: Chỉ quan tâm đến số hạng có bậc cao nhất nếu kết quả là $0x$ thì ta sẽ phải nhân liên hợp.

Ở đây ta có: $\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x \gg \sqrt[3]{x^3} - x \gg x - x \gg 0x$

Do đó ta phải nhân liên hợp, đặt nhân tử, đơn giản và suy ra kết quả.

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = +\infty \\ \text{do } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài này có dạng x dần đến vô cực, vô định, đây là dạng có thể phải nhân liên hợp do có chứa căn, cách nhận biết nhân liên hợp như sau: Chỉ quan tâm đến số hạng có bậc cao nhất nếu kết quả là $0x$ thì ta sẽ phải nhân liên hợp.

Ở đây ta có: $\sqrt{x^2 + x} - x \gg \sqrt{x^2} - x \gg |x| - x \gg -x - x \gg -2x$

(ta cần lưu ý rằng $x \rightarrow -\infty$ nên $x < 0$, do đó $|x| = -x$)

Do đó ta không nhân liên hợp mà đặt nhân tử, suy ra kết quả và giải thích vì kết quả không phải là số thực.

Các bài toán tương tự:

Tính các giới hạn sau:

$$\begin{aligned} 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x - 1 - \sqrt{x^2 \left(4 - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} \right)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x - 1 - |x| \sqrt{4 - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x - 1 + x \sqrt{4 - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 - \frac{1}{x} + \sqrt{4 - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2}} \right) = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{do } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \sqrt{4 - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2}} \right) = 4 \end{cases}$$

Ở đây ta có:

$$2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3} \gggg 2x - \sqrt{4x^2} \gggg 2x - 2|x| \gggg 2x + 2x \gggg 4x$$

(ta cần lưu ý rằng $x \rightarrow -\infty$ nên $x < 0$, do đó $|x| = -x$)

Do đó ta không nhân liên hợp mà đặt nhân tử, suy ra kết quả và giải thích vì kết quả không phải là số thực

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3})$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x - 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2x - 1 + \sqrt{x^2 \left(4 - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} \right)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2x - 1 + |x| \sqrt{4 - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2x - 1 + x \sqrt{4 - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x \left(2 - \frac{1}{x} + \sqrt{4 - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{4}{2 - \frac{1}{x} + \sqrt{4 - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2}}} = 0.1 = 0 \end{aligned}$$

Ở đây ta có:

$$2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3} \gggg 2x - \sqrt{4x^2} \gggg 2x - 2|x| \gggg 2x - 2x \gggg 0x$$

(ta cần lưu ý rằng $x \rightarrow +\infty$ nên $x > 0$, do đó $|x| = x$)

Do đó ta phải nhân liên hợp, đặt nhân tử, đơn giản và suy ra kết quả.

$$\begin{aligned}
 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Bài này ta có: $\sqrt{x^2 + x} - x \gg \gg \sqrt{x^2} - x \gg \gg |x| - x \gg \gg x - x \gg \gg 0x$

(ta cần lưu ý rằng $x \rightarrow +\infty$ nên $x > 0$, do đó $|x| = x$)

Do đó ta phải nhân liên hợp, đặt nhân tử, đơn giản và suy ra kết quả.

$$\begin{aligned}
 6) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} + x)(\sqrt{x^2 + x} - x)}{\sqrt{x^2 + x} - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1} = \frac{-1}{2}
 \end{aligned}$$

Bài này ta có: $\sqrt{x^2 + x} + x \gg \gg \sqrt{x^2} + x \gg \gg |x| + x \gg \gg -x + x \gg \gg 0x$

(ta cần lưu ý rằng $x \rightarrow -\infty$ nên $x < 0$, do đó $|x| = -x$)

Do đó ta phải nhân liên hợp, đặt nhân tử, đơn giản và suy ra kết quả.

$$\begin{aligned}
 7) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + x} - 2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x}\right)} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{2 + \frac{1}{x}} - 2x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{2 + \frac{1}{x}} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x}} - 2 \right) = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\text{do } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x}} - 2 \right) = -\sqrt{2} - 2 \end{cases}$$

Bài này ta có :

$$\sqrt{2x^2 + x} - 2x \gg \gg \sqrt{2x^2} - 2x \gg \gg \sqrt{2}|x| - 2x \gg \gg -\sqrt{2}x - 2x \gg \gg (-\sqrt{2} - 2)x$$

(ta cần lưu ý rằng $x \rightarrow -\infty$ nên $x < 0$, do đó $|x| = -x$)

Do đó ta không nhân liên hợp mà đặt nhân tử, suy ra kết quả và giải thích vì kết quả không phải là số thực.

$$\begin{aligned} 8) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(1-x)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(x^2 + x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{x^2 + x + 1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \sqrt[3]{3x^2 - x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 \left(\frac{3}{x} - 1 \right)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - x \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} \right) = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{do } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} \right) = 2 \end{cases}$$

Bài này ta có: $x - \sqrt[3]{3x^2 - x^3} \gg \gg x - \sqrt[3]{-x^3} \gg \gg x + x \gg \gg 2x$

Do đó ta không nhân liên hợp mà đặt nhân tử, suy ra kết quả và giải thích vì kết quả không phải là số thực.

$$\begin{aligned} 10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt[3]{3x^2 - x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 \left(\frac{3}{x} - 1 \right)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} \right) = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{do } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} \right) = 2 \end{cases}$$

Bài này ta có: $x - \sqrt[3]{3x^2 - x^3} \gg \gg x - \sqrt[3]{-x^3} \gg \gg x + x \gg \gg 2x$

Do đó ta không nhân liên hợp mà đặt nhân tử, suy ra kết quả và giải thích vì kết quả không phải là số thực.

$$\begin{aligned}
11) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt[3]{3x^2 - x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(x + \sqrt[3]{3x^2 - x^3} \right) \left(x^2 - x\sqrt[3]{3x^2 - x^3} + \left(\sqrt[3]{3x^2 - x^3} \right)^2 \right)}{\left(x^2 - x\sqrt[3]{3x^2 - x^3} + \left(\sqrt[3]{3x^2 - x^3} \right)^2 \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2 - x\sqrt[3]{3x^2 - x^3} + \left(\sqrt[3]{3x^2 - x^3} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2 \left(1 - \sqrt[3]{\frac{3}{x}} - 1 + \left(\sqrt[3]{\frac{3}{x}} - 1 \right)^2 \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{1 - \sqrt[3]{\frac{3}{x}} - 1 + \left(\sqrt[3]{\frac{3}{x}} - 1 \right)^2} = 1
\end{aligned}$$

Bài này ta có: $x + \sqrt[3]{3x^2 - x^3} \gg x + \sqrt[3]{-x^3} \gg x - x \gg 0x$

Do đó ta phải nhân liên hợp, đặt nhân tử, đơn giản và suy ra kết quả và giải thích vì kết quả không phải là số thực.

$$\begin{aligned}
12) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{2 + \frac{3}{x}} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(ta cần lưu ý rằng $x \rightarrow -\infty$ nên $x < 0$, do đó $|x| = -x$)

$$13) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + x + 1}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(-1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{-1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{2}{x^2}} = -\infty$$

$$do \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{2}{x^2}} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

2.4 . Kết quả kiểm nghiệm

- Việc phân dạng cụ thể các bài toán tìm giới hạn hàm số và đưa ra phương pháp giải tương ứng giúp các bài toán cơ bản trở nên có hệ thống hơn,

nhờ đó học sinh yếu kém dễ tiếp cận và nhớ lâu hơn. Từ đó học sinh thấy hứng thú hơn khi học phần giới hạn hàm số và thấy những bài toán này trở nên đơn giản hơn.

- Việc ôn tập lại kiến thức về giới hạn hàm số cũng trở nên dễ dàng hơn rất nhiều.

- Sau khi thực hiện sáng kiến kinh nghiệm này ở lớp 11C7 thì đa số học sinh đã tiếp cận tốt hơn, chỉ còn rất ít học sinh gặp khó khăn trong việc giải bài toán tìm giới hạn của hàm số. Cụ thể:

Lớp	Sĩ số	Giỏi	Khá	TB	Yếu	Kém
11C7	44	9	14	17	4	0

3. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ

3.1. Kết luận

Đề tài này là một số kinh nghiệm của tôi trong quá trình giảng dạy những lớp có nhiều học sinh trung bình, yếu và kém. Đây là đối tượng học sinh có tư duy yếu lại lười học. Tuy nhiên khi áp dụng đề tài tôi nhận thấy đa số học sinh nắm được các dạng bài tập và phương pháp giải tương ứng một số bài toán tìm giới hạn hàm số lớp 11, biết phân tích bài toán tìm giới hạn của hàm số; sử dụng phương pháp giải hợp lí. Từ đó nhiều học sinh hiểu bài, làm được bài và hứng thú học tập môn Toán làm cho chất lượng của nhà trường ngày một tốt hơn. Đề tài này là ý kiến chủ quan cũng như kinh nghiệm của cá nhân tôi nên không tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Rất mong sự đóng góp ý kiến của quý thầy cô, các bạn đồng nghiệp và các em học sinh để đề tài được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

3.2. Kiến nghị và đề xuất:

- Nhà trường cần tổ chức những buổi trao đổi phương pháp giảng dạy giữa các tổ bộ môn trong trường và giữa các tổ cùng bộ môn các trường học trong địa bàn huyện để học hỏi kinh nghiệm giảng dạy nhằm nâng cao chất lượng dạy và học.

- Đề nghị các cấp lãnh đạo tạo điều kiện giúp đỡ học sinh và giáo viên có nhiều hơn nữa các tài liệu sách tham khảo về các phương pháp đổi mới dạy và học.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ

Thanh Hóa, ngày 20 tháng 5 năm 2016

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của tôi

viết, không copy của người khác.
Người viết

Nguyễn Thị Den