

Bài 23. Đạo hàm*Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)*

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

PHẦN E. CÂU HỎI TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{2}t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s là quãng đường đi được trong t giây tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại $t = 5$.

Lời giải

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại $t = 5$ là:

$$s'(5) = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2}t^2 - \frac{25}{2}}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2}(t - 5)(t + 5)}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{1}{2}(t + 5) = 5.$$

Vậy $v(5) = s'(5) = 5(m/s)$.

Câu 2. Một quả bóng được thả rơi tự do từ đài quan sát trên sân thượng của toà nhà Landmark 81 (Thành phố Hồ Chí Minh) cao $461,3m$ xuống mặt đất, với phương trình chuyển động $s(t) = 4,9t^2$. Tính vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất, bỏ qua sức cản không khí. (Đơn vị m/s , kết quả gần đúng làm tròn đến hàng phần chục)

Lời giải

Lời giải

Với bất kì t_0 , ta có:

$$s'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{4,9t^2 - 4,9t_0^2}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} 4,9(t + t_0) = 9,8t_0.$$

Do đó, vận tốc của quả bóng tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 9,8t$.Mặt khác, vì chiều cao của toà tháp là $461,3m$ nên quả bóng sẽ chạm đất tại thời điểm t_1 .

$$4,9t_1^2 = 461,3 \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{461,3}{4,9}}$$

Từ đó, ta có:

Vậy vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất là:

$$v(t_1) = 9,8t_1 = 9,8 \cdot \sqrt{\frac{461,3}{4,9}} \approx 95,1(m/s).$$

Câu 3. Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $7\%/$ năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi (làm tròn đến hàng phần nghìn) mà người đó nhận được sau 1 năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức:

Lãi kép với kì hạn 6 tháng;

Lời giải

Lời giải

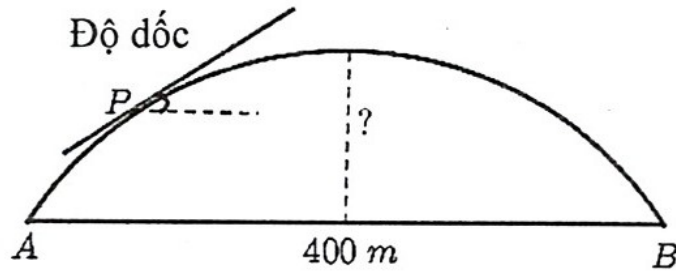
Số tiền vốn và lãi người đó nhận được sau một năm theo thể thức lãi kép với kì hạn 6 tháng là:

$$T = A \left(1 + \frac{r}{2} \right)^2 = 100(1 + 3,5\%)^2 = 107,123$$

(triệu đồng)

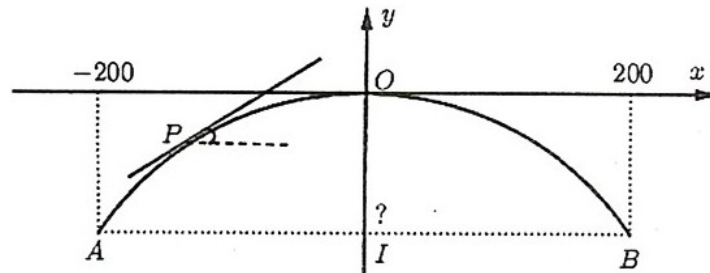
Câu 4. Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là $400m$. Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt

cầu và phương ngang). Tính chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Lời giải

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, sao cho đỉnh cầu là gốc tọa độ và mặt cắt của cây cầu có hình dạng parabol $y = -ax^2$ (với a là hằng số dương).

Hệ số góc của tiếp tuyến của parabol bằng $k = y'(x_0) = -2ax_0, -200 \leq x_0 \leq 200$.

Hệ số góc xác định độ dốc của mặt cầu (độ dốc dương) là $|k| = 2a|x| \leq 400a$.

Vì độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° nên ta có:

$$400a \leq \tan 10^\circ \Leftrightarrow a \leq \frac{4,408174518}{10000}.$$

Chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là đoạn OI , cũng chính là độ lớn của tung độ điểm B khi a đạt giá trị lớn nhất.

Do đó, $OI = |-a \cdot 200^2| = 17,6(m)$.

Vậy chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là $17,6m$.

Câu 5. Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q(t) = 2t^2 + t$, trong đó t được tính bằng giây và Q được tính theo Culông. Tính cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4(s)$.

Lời giải

Lời giải

Ta có: $Q'(t) = (2t^2 + t)' = 4t + 1$ nên cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4(s)$ là $Q'(4) = 4 \cdot 4 + 1 = 17(C/s)$.

Câu 6. Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất, biết độ cao h của nó (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi phương trình $h(t) = 24,5t - 4,9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

Lời giải

Lời giải

Khi vật chạm đất thì $h = 0 \Leftrightarrow 24,5t - 4,9t^2 = 0 \Rightarrow t = 5$.

Ta có: $v(t) = h'(t) = 24,5 - 9,8t$ nên tốc độ của vật tại thời điểm nó chạm đất $t = 5$ là $v(5) = |h'(5)| = |24,5 - 9,8 \cdot 5| = 24,5(m/s)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x) = -2x^3 + x$ có đồ thị (C) .

Tính hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 ;

Lời giải

Lời giải

Ta có: $f'(x) = (-2x^3 + x)' = -6x^2 + 1$ nên hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 là:
 $f'(1) = -6 \cdot (1)^2 + 1 = -5$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = -2x^3 + x$ có đồ thị (C) .

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(-2;14)$.

Lời giải

Lời giải

Ta có: $f'(x) = (-2x^3 + x)' = -6x^2 + 1$ nên hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-2;14)$ là:
 $f'(-2) = -6 \cdot (-2)^2 + 1 = -23$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là:

$$y - 14 = -23(x + 2) \Leftrightarrow y = -23x - 32.$$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{3x}$ có đồ thị (C) .

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

Lời giải

Lời giải

Toạ độ giao điểm của (C) với trục hoành là điểm $(-1;0)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(-1;0)$ là:

$$y - 0 = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}(x + 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{3x}$ có đồ thị (C) .

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại giao điểm của (C) với đường thẳng $y = x + 1$.

Lời giải

Lời giải

Toạ độ giao điểm của (C) với đường thẳng $y = x + 1$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = \frac{x+1}{3x} \\ y = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{3x} = x+1 \\ y = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 = 0 \\ y = x+1 \end{cases}$$

phương trình:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 0 \\ x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(-1;0)$ là:

$$y - 0 = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}(x + 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ là:

$$y - \frac{4}{3} = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow y = -3\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3} \Leftrightarrow y = -3x + \frac{7}{3}.$$

Câu 11. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2x^3 + 1$ tại $x_0 = 2$.

Lời giải

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 16}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} 2(x^2 + 2x + 4) = 24.$$

Vậy $f'(2) = 24$.

Câu 12. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ tại $x_0 = -1$.

Lời giải

Lời giải

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Câu 13. Cho hàm số . Tính $f'(0)$.

Lời giải

Lời giải

Với $x \neq 0$ xét:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (4 - x)}{4x(2 + \sqrt{4 - x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2 + \sqrt{4 - x})} = \frac{1}{4(2 + \sqrt{4 - 0})} = \frac{1}{16} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Câu 14. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 3$.

Tại điểm có hoành độ bằng -2.

Lời giải

Lời giải

Ta có: $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 3 = -3$

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = 4(x + 2) - 3 = 4x + 5$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tung độ tiếp điểm bằng 3.

Lời giải

Lời giải

$$+ \text{ Ta có: } y_0 = 3 \Rightarrow \frac{2x_0 - 1}{x_0 - 2} = 3 \Rightarrow x_0 = 5$$

$$+ f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{2x - 1}{x - 2} - 3}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x + 5}{x - 5} = -\frac{1}{3}$$

+ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -\frac{1}{3}(x-5)+3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x+2}$ có đồ thị (C). Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -3.

Lời giải

Lời giải

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $x_0 = -3$ là:

$$f'(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\frac{1}{x+2} + 1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+2)} = -1$$

Câu 17. Một người gửi tiết kiệm 20 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6% / năm theo thể thức lãi kép liên tục. Tính số tiền người đó nhận được sau: 1 tháng;

Lời giải

Lời giải

Ta có $r = 6\% = 0,06$ tháng $= \frac{1}{12}$ năm.

Công thức tính tổng số tiền lãi và vốn sau t năm là $T = A \cdot e^{rt}$

Số tiền người đó nhận được sau 1 tháng là $S = 20 \cdot 10^6 \cdot e^{0,06 \cdot \frac{1}{12}} \approx 20100250$ đồng.

Câu 18. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Tính sau thời gian ngắn nhất (theo năm) để số tiền người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

Lời giải

Lời giải

Giả sử số tiền người đó gửi vào ngân hàng là A . Sau n năm số tiền người đó nhận được là $2A$.

Áp dụng công thức $S = Ae^{0,075t}$ ta có $2A \leq A \cdot e^{0,075t}$
 $\Leftrightarrow 0,075t \geq \ln 2 \Leftrightarrow t \geq \approx 9,24$

Người đó phải gửi ít nhất 10 năm thì số tiền thu được gấp đôi số tiền ban đầu.

Câu 19. Số lượng vi khuẩn trong một phòng thí nghiệm A được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Tính thời gian kể từ lúc ban đầu, số lượng loại vi khuẩn A là 20 triệu con?

Lời giải

Lời giải

Ta có $s(3) = 625$ nghìn con $\Rightarrow s(0) \cdot 2^3 = 625 \Rightarrow s(0) = \frac{625}{8}$ nghìn con.

$\Rightarrow s(0) \cdot 2^t = 20000 \Rightarrow 2^t = 20000 : \frac{625}{8}$
 $\Rightarrow 2^t = 2^8 \Rightarrow t = 8$

Vậy thời gian để số vi khuẩn đạt 20 triệu con là 8 phút.

Câu 20. Người ta sử dụng công thức $S = A \cdot e^{nr}$ để dự báo dân số của một quốc gia, trong đó A là số dân của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau n năm và r là tỉ lệ gia tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001, dân số của Việt Nam là 78685800 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 1,2%. Hãy tính xem dân số nước ta đạt 110 triệu người vào năm nào?

Lời giải

Lời giải

Theo công thức tăng trưởng mũ: $S = A \cdot e^{nr}$

$$\Rightarrow 110000000 = 78685800 \cdot e^{1,2\% \cdot n} \Leftrightarrow n = \frac{1}{1,2\%} \ln \frac{110000000}{78685800} \simeq 27,91$$

$\Rightarrow$ Sau 28 năm thì dân số Việt Nam đạt 110 triệu người.

Vậy dân số nước ta đạt 110 triệu người vào năm 2029.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \text{ tại } x = 0.$$

Câu 21. Tính đạo hàm của hàm số

Lời giải

Lời giải

Ta có: $f(0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}$

Vậy $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 + 1$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1; 4)$.

Lời giải

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 4x$. Do đó $y'(1) = 7$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1; 4)$ là $y = 7x - 3$.

Câu 23. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $\Delta: 9x - y + 6 = 0$.

Lời giải

Lời giải

Đường thẳng $\Delta: 9x - y + 6 = 0 \Rightarrow y = 9x + 6$ có hệ số góc là 9.

Vì tiếp tuyến cần tìm song song với đường thẳng Δ nên tiếp tuyến có hệ số góc $k = 9$.

$$y' = k \Rightarrow 3x^2 - 6x = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Suy ra hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình

Với $x = -1$, phương trình tiếp tuyến là $y = 9x + 6$ (loại vì trùng với đường thẳng Δ).

Với $x = 3$, phương trình tiếp tuyến là $y = 9x - 26$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 9x - 26$.

Câu 24. Ông Năm gửi tiết kiệm 200 triệu đồng với lãi suất $9,1\% /$ năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà ông Năm nhận được sau một năm nếu tiền lãi được tính theo thể thức lãi kép với kì hạn 3 tháng (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Lời giải

Ta có: $A = 200; r = 14\%$ và $n = \frac{12}{3} = 4$.

Vậy tổng số tiền vốn và lãi mà ông Năm nhận được sau một năm nếu tiền lãi được tính theo thể thức lãi kép với

kỳ hạn 3 tháng là $T = A \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n = 200 \cdot \left(1 + \frac{9,1\%}{4} \right)^4 \approx 218,8$ triệu đồng.

Câu 25. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + x + |x+1|}{x}$ tại $x_0 = -1$.

Lời giải

Lời giải

Ta có: $\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{x^2 + x + |x+1|}{x(x+1)}$
 Nên $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{x(x+1)} = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 1}{x(x+1)} = 2$
 Do đó $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x_0 = -1$.

Câu 26. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$.

Lời giải

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+3) = 5$;
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3x - 4) = 0$. Dẫn tới $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Suy ra hàm số không liên tục tại $x_0 = 1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x \leq 1 \\ x^2 + bx+1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

Tìm b để hàm số này có đạo hàm tại $x=1$.

Lời giải

Lời giải

Ta có: $f(1) = 3; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+1) = 3; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + bx+1) = b+2$
 Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$ thì $f(x)$ liên tục tại $x=1$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow b+2 = 3 \Rightarrow b=1$. Với $b=1$, thì $f'(1^+) = f'(1^-) = 3$.
 Vậy $b=1$ thì hàm số đã cho có đạo hàm tại $x=1$.

---HẾT---