

Trả lời ngắn

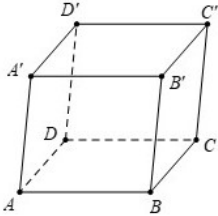
Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu vector bằng vector $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

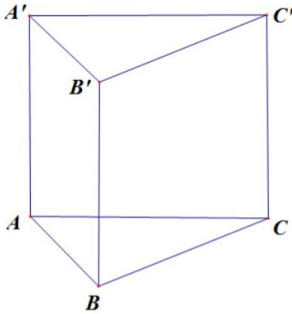


Các vector bằng vector $\overrightarrow{BC}$ là: $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{B'C'}$. Vậy có 3 vector bằng vector $\overrightarrow{BC}$.

Đáp án: 3

Câu 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết $\triangle ABC$ có cạnh bằng 3. Tìm vector tổng $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{B'C'}$

Lời giải



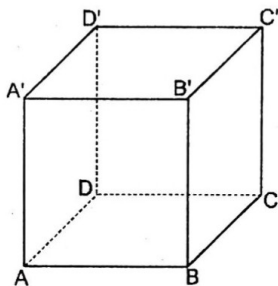
$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{B'C'}| = |\overrightarrow{BA}| = 3$$

Ta có:

Đáp án: 3

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$.

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

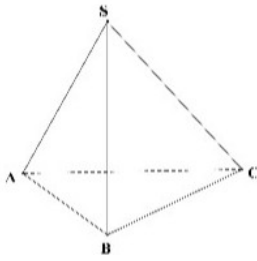
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \angle BAC = 45^\circ$$

Do đó:

Đáp án: 45

Câu 4. Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = 2, BC = 2\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Lời giải



Có: $BC^2 = SB^2 + SC^2 (2.2^2 = 2^2 + 2^2) \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại S .

Lại có: $SA = AC = SC = 2 \Rightarrow \Delta SAC$ là tam giác đều.

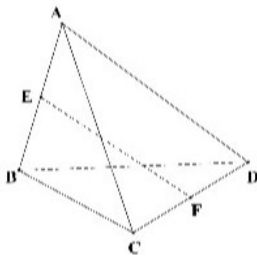
$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA} = 0 - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA} \cdot \cos \angle ASC = -2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = -\frac{2^2}{2} = -2$$

Vậy $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = -2$.

Đáp án: -2

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD . Cho $AB = 2a, CD = 2b, EF = 2c$. Với M là một điểm tùy ý, biết tổng $MA^2 + MB^2 = k \cdot ME^2 + l \cdot a^2$. Tính $k + l$.

Lời giải



Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến, ta có:

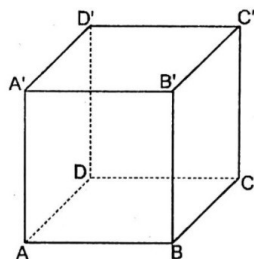
$$ME^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2} = 2ME^2 + 2a^2$$

Vậy $k + l = 2 + 2 = 4$.

Đáp án: 4

Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'} = l \cdot \overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $k + l$ có giá trị là bao nhiêu?

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b, \overrightarrow{AA'} = c$.

$$\overrightarrow{MA'} = k \cdot \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{-k(a+b)+c}{1-k}$$

Có:

$$\overrightarrow{NC} = l \overrightarrow{ND} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{a+b+c-lb}{1-l}$$

Có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \left(-\frac{k}{1-k} - \frac{1}{1-l} \right) a + \left(-\frac{k}{1-k} - 1 \right) b + \left(\frac{1}{1-k} - \frac{1}{1-l} \right) c$$

Suy ra:

$$\text{Mà: } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AB} = -a + b + c$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{MN} // \overrightarrow{BD'} \text{ nên } \overrightarrow{MN} // \overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \frac{3k+1}{1-k} = -2 \Leftrightarrow k = -3 \Rightarrow l = -1$$

$$\text{Vậy } k + l = -4.$$

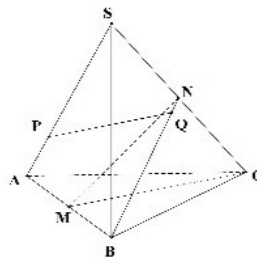
Đáp án: -4

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\overrightarrow{SA} = a, \overrightarrow{SB} = b, \overrightarrow{SC} = c$ và các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, SC . Các điểm P, Q trên các đường thẳng SA, BN sao cho $\overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{CM}$. Hãy biểu diễn vector $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vector a, b, c . $\overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{CM}$. Khi biểu diễn vector $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vector a, b, c , ta được: $\overrightarrow{PQ} = -\frac{m}{n}a - \frac{p}{q}b + \frac{r}{z}c$ (với $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \frac{r}{z}$ là các phân số tối giản và $m, n, p, q, r, z \in \mathbb{Z}$). Tính $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + \frac{r}{z}$.

Lời giải

$$\frac{4}{3}$$

Đáp án: $\frac{4}{3}$



$$\text{Đặt } \overrightarrow{PA} = x\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BQ} = y\overrightarrow{BN}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = x\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} + y\overrightarrow{BN} = (x-1)\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + y(\overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SB}) \\ &= (x-1)a + (1-y)b + \frac{y}{2}c. \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}) - \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - c$$

Lại có:

$$\overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \frac{x-1}{0,5} = \frac{1-y}{0,5} = \frac{y}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c$$

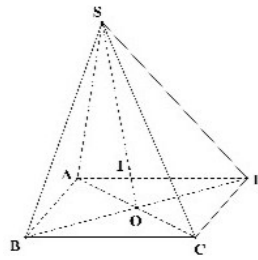
Vậy

Đáp án: $[-1m:\$mathtype_71\$]$

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, M là điểm thay đổi trên SO . Tỉ số $\frac{SM}{SO}$ sao cho $P = MS^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ nhỏ nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $\frac{4}{5}$



Gọi I là điểm thỏa mãn $\vec{SI} = 4\vec{IO}$.

$$\begin{aligned} P &= (\vec{MI} + \vec{IS})^2 + (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 + (\vec{MI} + \vec{ID})^2 \\ \text{Suy ra:} \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 2MI(\vec{IS} + \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID}) \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 2MI(\vec{IS} + 4\vec{IO} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \end{aligned}$$

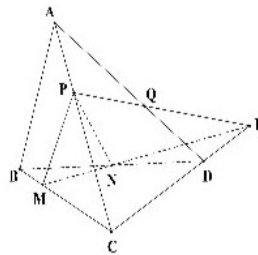
Vậy $P_{\min}$ khi $M \equiv I \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{4}{5}$.

Đáp án: $\frac{4}{5}$

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD và AC sao cho $BC = 4BM, AC = 3AP, BD = 2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q . Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$.

Lời giải

Đáp án: $\frac{3}{5}$



Đặt $\vec{AB} = a, \vec{AC} = b, \vec{AD} = c, \vec{AQ} = k\vec{AD} = kc$

Theo đề bài, ta có: $\vec{AM} = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b; \vec{AN} = \frac{1}{2}(a + c); \vec{AP} = \frac{1}{3}b$

$$\begin{cases} \vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = -\frac{1}{4}a - \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c \\ \vec{MP} = \vec{AP} - \vec{AM} = -\frac{3}{4}a + \frac{1}{12}b \\ \vec{MQ} = \vec{AQ} - \vec{AM} = -\frac{3}{4}a - \frac{1}{4}b + kc \end{cases}$$

Ta có:

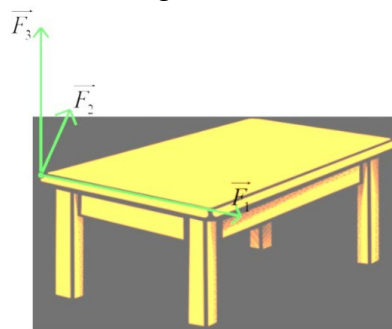
Vì M, N, P, Q đồng phẳng nên

$$x\vec{MN} + y\vec{MP} = \vec{MQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,25x + 0,75y = 0,75 \\ 0,25x - \frac{1}{12}y = 0,25 \\ 0,5x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ k = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy $\vec{AQ} = \frac{3}{5}\vec{AD} \Rightarrow \frac{AQ}{AD} = \frac{3}{5}$.

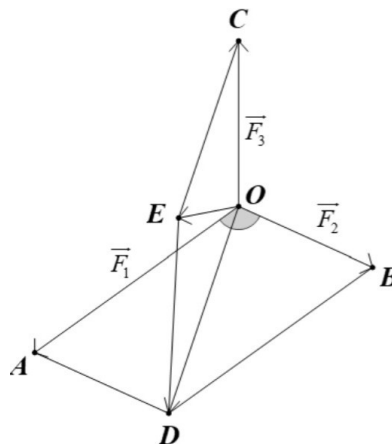
Đáp án: [!m:\$\mathtt{102}\$]

Câu 10. Có ba lực cùng tác động vào một cái bàn như hình vẽ. Trong đó hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ tạo với nhau một góc 110° và có độ lớn lần lượt là $9N$ và $4N$, lực $\vec{F}_3$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ và có độ lớn $7N$. Độ lớn hợp lực của ba lực trên là $a(N)$, tìm giá trị của a .



Lời giải

Theo đề bài ta có hình vẽ sau:



Hợp lực tác động vào ba vật là $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD} + \vec{OC} = \vec{OE}$

Áp dụng định lý cosin trong $\triangle OAD$, ta có:

$$OD^2 = OA^2 + AD^2 - 2OA \cdot AD \cdot \cos \angle OAD = 9^2 + 4^2 - 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot \cos 80^\circ = 97 - 72 \cos 80^\circ$$

Vì $OC \perp (OBDA)$ nên $OC \perp OD \Rightarrow ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó $\triangle OCE$ vuông tại C nên:

$$OE^2 = OC^2 + EC^2 = 4^2 + 97 - 72 \cos 80^\circ = 113 - 72 \cos 80^\circ$$

$$\Rightarrow OE = \sqrt{113 - 72 \cos 80^\circ} \approx 10$$

Suy ra độ lớn của hợp lực của ba lực trên khoảng $10N$.

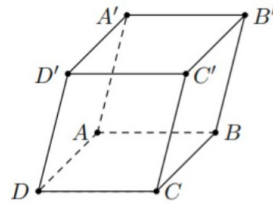
Vậy $a = 10$.

Đáp án: 10

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}) = \vec{0}$?

Lời giải

Đáp án: $k = 1$



Ta có

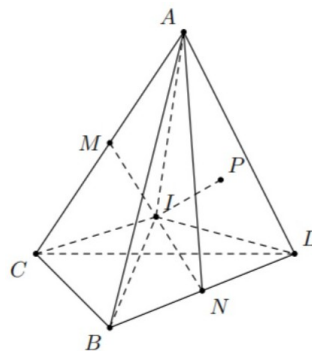
$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{AD'} \\ \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{D'A} \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{AD'} + k\overrightarrow{D'A} = \vec{0} \leftrightarrow (k-1)\overrightarrow{D'A} = \vec{0} \leftrightarrow k = 1$$

Đáp án: [!m:\$\mathtype_136\$]

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD . Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\overrightarrow{PI} = k(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$?

Lời giải

Đáp án: $k = \frac{1}{4}$



+ Vì M, N, I lần lượt là trung điểm của AC, BD, MN

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IN} \\ \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0} \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$$

+ Khi đó $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 4\overrightarrow{PI}$

$$\overrightarrow{PI} = k(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \leftrightarrow \overrightarrow{PI} = k.4.\overrightarrow{PI} \leftrightarrow 1 = 4k \leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$

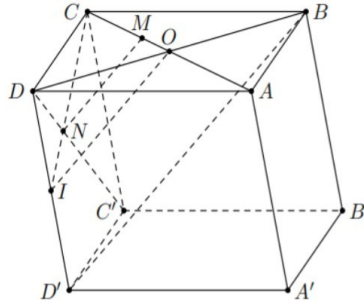
+ Mà

Đáp án: [!m:\$\mathtype_149\$]

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC = 3MC$. Lấy điểm N trên đoạn $C'D$ sao cho $C'N = x.C'D$. Với giá trị nào của x thì MN song song BD' ?

Lời giải

Đáp án: $\frac{2}{3}$



- + Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.
- + Gọi I là trung điểm DD' .
- + Nối $C'D$ cắt CI tại $N' \rightarrow N'$ là trọng tâm $\triangle CDD'$.
- + Ta có OI là đường trung bình của $\triangle BDD' \rightarrow OI \parallel BD'$.

+ Lại có $\frac{CN'}{CI} = \frac{CM}{CO} \rightarrow MN' \parallel OI \rightarrow MN' \parallel BD'$.

$$MN \parallel BD' \leftrightarrow N' \equiv N \rightarrow C'N = \frac{2}{3}C'D \leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

+ Theo bài ta có

Đáp án: [!m:\$\mathtype_166\$]

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các đường thẳng AD, BC, MN cùng song song với một mặt phẳng.

Lời giải

Đáp án: -2

+ bài toán tương đương tìm x để $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.

+ $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$

+ $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC} \leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + x(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \leftrightarrow \overrightarrow{AN} = (1+x)\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{BC}$

$\rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (2+x)\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD} + (x+3)\overrightarrow{BC}$

+ Để $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng $\leftrightarrow 2+x=0 \leftrightarrow x=-2$.

Đáp án: -2

Câu 15. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{AC_1}$?

- A. $k=4$.
- B. $k=1$.
- C. $k=0$.
- D. $k=2$.

Lời giải

Đáp án: 1

+ Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1}$

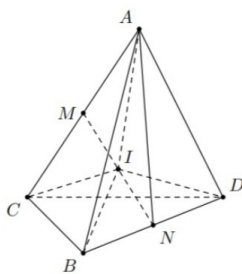
$\rightarrow \overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{AC_1} \leftrightarrow k=1$

Đáp án: 1

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD . Gọi I là trung điểm đoạn MN . Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức $\vec{IA} + (2k - 1)\vec{IB} + k\vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$?

Lời giải

Đáp án: 1



+ Vì M, N, I lần lượt là trung điểm của AC, BD, MN

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{IA} + \vec{IC} = 2\vec{IM} \\ \vec{IB} + \vec{ID} = 2\vec{IN} \\ \vec{IM} + \vec{IN} = \vec{0} \end{cases} \rightarrow \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$$

+ Ta có $\vec{IA} + (2k - 1)\vec{IB} + k\vec{IC} + \vec{ID}$
 $= \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} + (2k - 2)\vec{IB} + (k - 1)\vec{IC} = \vec{0}$
 $\rightarrow (k - 1)(2\vec{IB} + \vec{IC}) = \vec{0}$

+ Mà $2\vec{IB} + \vec{IC} \neq \vec{0} \leftrightarrow k - 1 = 0 \leftrightarrow k = 1$.

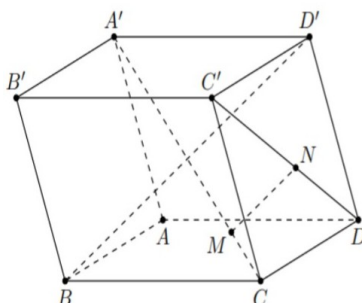
Đáp án: 1

Câu 17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các số thực m, n thỏa mãn $\vec{MA'} = m\vec{MC}$ và $\vec{NC'} = n\vec{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $m + n$ bằng bao nhiêu?

- A. $m - n = -\frac{3}{2}$.
 B. $m + n = -3$.
 C.
 D. $m + n = -2$.

Lời giải

Đáp án: -4



+ Đặt $x = \vec{BA}$, $y = \vec{BC}$, $z = \vec{BB'}$.

$$\begin{aligned} \vec{MN} &= \vec{MC} + \vec{CD} + \vec{DN} = \frac{1}{m-1}(x - y + z) + x + \frac{1}{1-n}(-x + z) \\ &= \left(1 + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{n-1}\right)x - \frac{1}{m-1}y + \left(\frac{1}{m-1} + \frac{1}{1-n}\right)z \end{aligned}$$

$$+ \overline{BD'} = x + y + z$$

$$+ \text{ Vì } MN \parallel BD' \rightarrow 1 + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{n-1} = -\frac{1}{m-1} = \frac{1}{m-1} + \frac{1}{1-n} \leftrightarrow m = -3, n = -1$$

Đáp án: -4

Câu 18. Trong không gian cho các vector a, b, c không đồng phẳng thỏa mãn $(x-y)a + (y-z)b = (x+z-2)c$. Tính $x+y+z$?

Lời giải

Đáp án: 3

+ Có $(x-y)a + (y-z)b - (x+z-2)c = 0$. Do a, b, c không đồng phẳng nên mỗi vector được phân tích duy nhất qua ba vector nói trên.

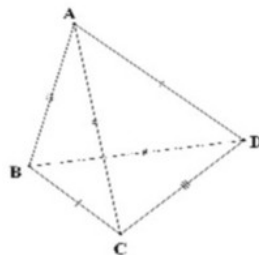
$$\begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ x+z-2=0 \end{cases} \leftrightarrow x=y=z=1 \rightarrow x+y+z=3$$

Đáp án: 3

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC=DA=a, CA=DB=b, AB=DC=c$. Gọi S là diện tích toàn phần (tổng diện tích tất cả các mặt). Tính giá trị lớn nhất của $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2}$.

Lời giải

$$\text{Đáp án: } \frac{9}{S^2}$$



Do tứ diện $ABCD$ có $BC=DA=a, CA=DB=b, AB=DC=c$ nên $\triangle BCD = \triangle ADC = \triangle DAB = \triangle CBA$. Gọi

S' là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt đó thì $S = 4S' = \frac{abc}{R}$, nên bất đẳng thức cần

chứng minh $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \leq \frac{9}{S^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$

Theo công thức Leibnitz: Với điểm M bất kì và G là trọng tâm của tam giác ABC thì $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + 9MG^2)$

Cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta được $9R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 9OG^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$.

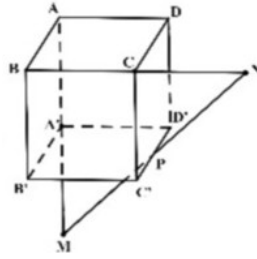
Đáp án: $\frac{9}{S^2}$

Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần lượt tại

M, N, P sao cho $\overline{NM} = 2\overline{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.

Lời giải

Đáp án: 2



Đặt $\overrightarrow{AD} = a, \overrightarrow{AB} = b, \overrightarrow{AA'} = c$

Vì $M \in AA'$ nên $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AA'} = kc$

$N \in BC \Rightarrow \overrightarrow{BN} = l \overrightarrow{BC} = la, P \in C'D' \Rightarrow \overrightarrow{C'P} = mb$

Ta có $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -la - b + kc$

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'P} = (1-l)a + mb + c$

$$\text{Do } \overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP} \Rightarrow -la - b + kc = 2[(1-l)a + mb + c] \Leftrightarrow \begin{cases} -l = 2(1-l) \\ -1 = 2m \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2, m = -\frac{1}{2}, l = 2$$

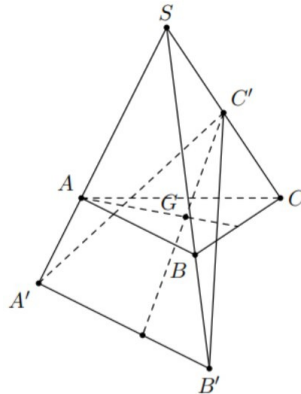
Vậy $\frac{MA}{MA'} = 2$.

Đáp án: 2

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $\frac{SA}{SA'} = a, \frac{SB}{SB'} = b, \frac{SC}{SC'} = c$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Để mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC thì $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 3



+ Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.

$\rightarrow 3\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 0$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SA'} \\ \overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SB'} \\ \overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SC'} \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{a}{3}\overrightarrow{SA'} + \frac{b}{3}\overrightarrow{SB'} + \frac{c}{3}\overrightarrow{SC'}$$

+ Mà

+ Vì $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm ΔABC nên:

$\rightarrow \overrightarrow{GA'}, \overrightarrow{GB'}, \overrightarrow{GC'}$ đồng phẳng

$\rightarrow \exists l, m, n$ sao cho $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$ và $l\overrightarrow{GA'} + m\overrightarrow{GB'} + n\overrightarrow{GC'} = 0$

$$\leftrightarrow l(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SA'}) + m(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SB'}) + n(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SC'}) = \vec{0}$$

$$\leftrightarrow (l+m+n)\overrightarrow{SG} = l\overrightarrow{SA'} + m\overrightarrow{SB'} + n\overrightarrow{SC'} \leftrightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{l}{l+m+n}\overrightarrow{SA'} + \frac{m}{l+m+n}\overrightarrow{SB'} + \frac{n}{l+m+n}\overrightarrow{SC'}$$

$$\rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} = \frac{l}{l+m+n} + \frac{m}{l+m+n} + \frac{n}{l+m+n} \leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} = 1 \leftrightarrow a+b+c = 3$$

Đáp án: 3

---HẾT---