TRƯỜNG THCS TRẦN MAI NINH **MÔN: TOÁN**
Năm học: 2013-2014
Thời gian: 120 phút

Bài 1. (4 điểm)

a) Cho $a-b=7$. Tính giá trị của biểu thức

$$M=a^2(a+1)-b^2(b-1)+3ab^2-2ab-3a^2b$$

b) Cho $x>0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P=3x-4x^2-\frac{1}{4x}+2014$$

Bài 2. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $|x-5|^{2013}+|x-6|^{2014}=1$

b) Chứng minh biểu thức $Q=x^4+2014x^2+2013x+2014$ dương với mọi x

Bài 3. (4 điểm)

a) Tìm m để đa thức $x^3+y^3+z^3+mxyz$ chia hết cho đa thức $x+y+z$

b) Tìm x,y nguyên thỏa mãn: $x^4+y+4=y^2-x^2$

Bài 4. (6 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ có AC vuông góc với BD tại O. Kẻ BH vuông góc với $CD(H\in CD)$

a) Biết $AB//CD; BH=4cm; BD=5cm.$ Tính AC

b) Biết $AB=\frac{1}{2}CD; AO=\frac{1}{3}AC,$ diện tích tam giác AOB bằng $4cm^2$. Tính diện tích tứ giác $ABCD.$

Bài 5. (2 điểm)

Cho ΔABC có đường cao kẻ từ $A,$ đường trung tuyến xuất phát từ B và đường phân giác kẻ từ đỉnh C đồng quy. Gọi a,b,c lần lượt là độ dài ba cạnh $BC; AC; AB.$ Chứng minh $(a+b)(a^2+b^2-c^2)=2a^2b$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) $M = a^3 + a^2 - b^3 - b^2 + 3ab(b - a) - 2ab$

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + a^2 + b^2 + 3ab(-7) - 2ab$

$= 7(a^2 + ab + b^2) + a^2 + b^2 - 23ab$

$= 8(a - b)^2 = 8.7^2 = 392$

b) Ta có: $P = -\left(4x^2 - 4x + 1 + x + \dfrac{1}{4x} - 2015\right)$

$= -\left[(2x - 1)^2 + \dfrac{(2x - 1)^2}{4x}\right] + 2014$

$P \le 2014 \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow Max_P = 2014 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Bài 2.

a) Ta có $x = 5; x = 6$ là nghiệm của phương trình

*Với $x < 5 \Rightarrow |x - 5|^{2013} > 0; |x - 6|^{2014} > 1 \Rightarrow |x - 5|^{2013} + |x - 6|^{2014} > 1$

$\Rightarrow x < 5$ không có giá trị nào của nghiệm phương trình

*Với $x > 6$ thì $|x - 5|^{2013} > 1; |x - 6|^{2014} > 0 \Rightarrow |x - 5|^{2013} + |x - 6|^{2014} > 1$

$\Rightarrow x > 6$ không có giá trị nào là nghiệm phương trình

*Với $5 < x < 6$ thì $|x - 5|^{2013} < x - 5; |x - 6|^{2014} < 6 - x$

$\Rightarrow |x - 5|^{2013} + |x - 6|^{2014} < 1$

Nên $5 < x < 6$ không có giá trị nào của nghiệm phương trình

Vậy $S = \{5; 6\}$

b) Ta có: $Q = x^4 - x + 2014(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2014)$

Chứng minh được $x^2 + x + 1 > 0 \, \forall x; x^2 - x + 2014 > 0 \, \forall x$

Nên $Q > 0 \, \forall x$

Bài 3.

a) Ta có: $A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + mxyz + 3xyz$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + (m + 3)xyz$

$A \vdots (x + y + z) \Leftrightarrow m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$

Vậy với $m = -3$ thì thỏa đề.

b) Ta có: $x^4 + y + 4 = y^2 - x^2 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -4$

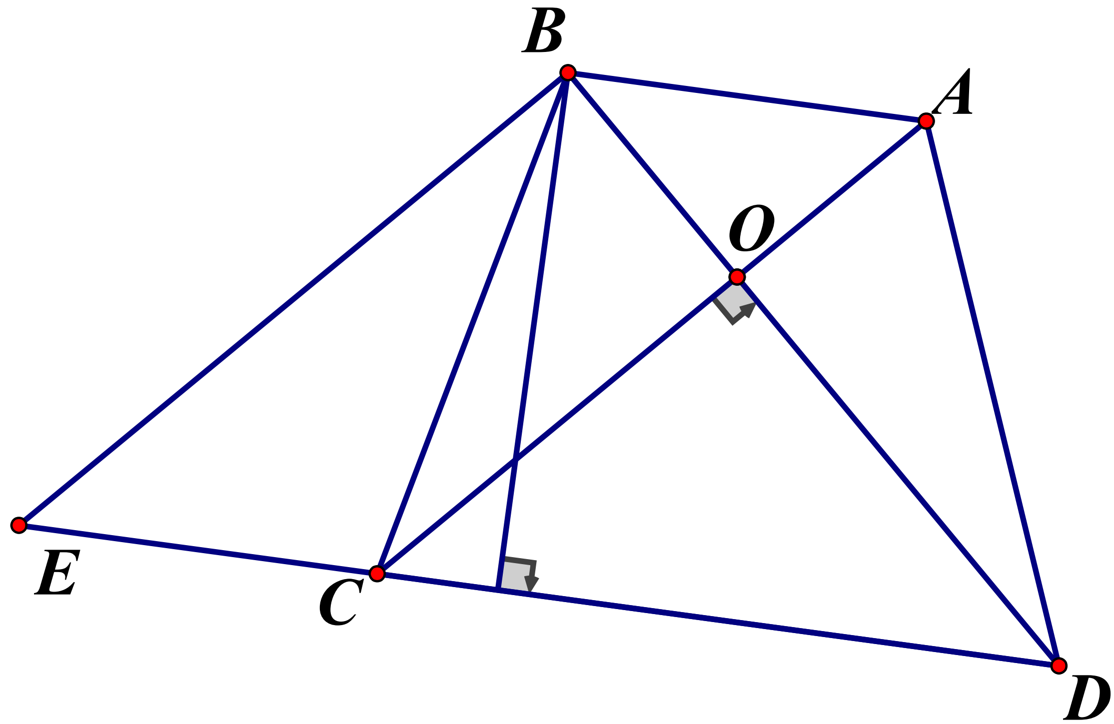
$\Leftrightarrow (x^2 + y)(x^2 - y + 1) = -4$

Ta có y, z nguyên; $(x^2 + y + x^2 - y + 1) = 2x^2 + 1$ là số lẻ nên $x^2 + y$ và $(x^2 - y + 1)$ có một số lẻ. Ta có bảng:

$x^2 - y + 1$	-1	-4	4	-1
$x^2 + y$	4	1	-1	4
y	3	3	-2	-2
x^2	`	-2 loại	1	-2 loại

Vậy các giá trị (x, y) cần tìm là $(1;3);(-1;3);(1;-2);(-1;-2)$

Bài 4.



a) Kẻ $BE // AC(E \in DC)$, ta có $ABEC$ là hình bình hành

$AC \perp BD(gt) \Rightarrow BD \perp BE$ tại B và $AC = BE$

Ta có: $HD^2 = BD^2 - BH^2 = 9 \Rightarrow HD = 3cm$

$\Delta BHD \sim \Delta EBD(g.g)$

$$\Rightarrow \Delta BHD \sim \Delta EBD(g.g) \Rightarrow \frac{BH}{EB} = \frac{HD}{BD} \Rightarrow BE = \frac{BH.HD}{HD} = \frac{20}{3} \Rightarrow AC = \frac{20}{3}$$

b) Vì $AB = \frac{1}{2}CD; AO = \frac{1}{3}AC$

$$\Rightarrow AO = \frac{1}{2}OC \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AO}{CO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta ABO \sim \Delta CDO$$

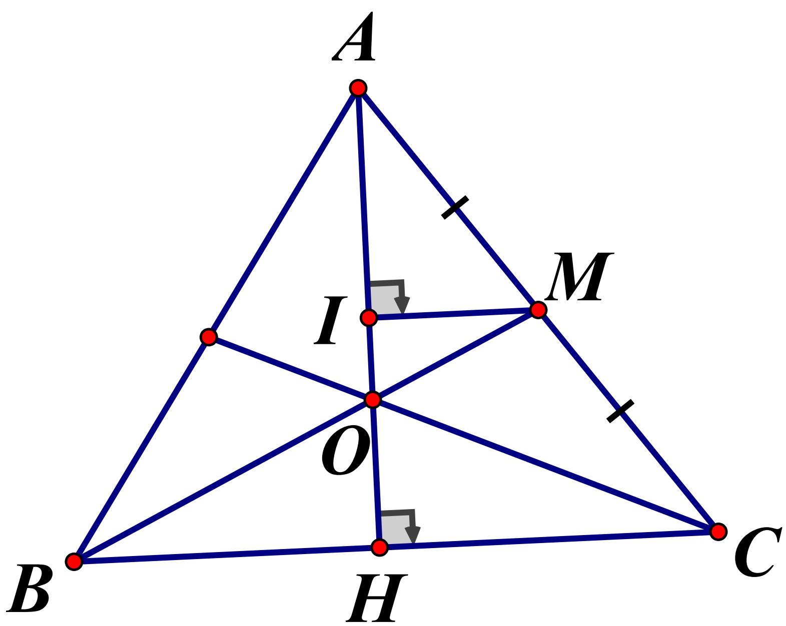
$$\Rightarrow \frac{S_{ABO}}{S_{CDO}} = \left(\frac{AO}{CO}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{DOC} = 4S_{ABO} = 16cm^2$$

Vì $OC = 2OA \Rightarrow S_{BOC} = 2S_{AOB} = 8cm^2$

$$S_{AOD} = \frac{1}{2}S_{COD} = 8cm^2$$

$S_{ABCD} = 36cm^2$

Bài 5.



Gọi O là giao điểm của các đường cao AH, trung tuyến BM, phân giác CD.

Kẻ $MI \perp AH \Rightarrow MI = \frac{1}{2}HC$

$\Rightarrow \frac{MI}{HB} = \frac{MO}{BO} = \frac{MC}{BC} \Rightarrow \frac{2MI}{BH} = \frac{2MC}{BC} \Rightarrow \frac{HC}{HB} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \Rightarrow aHC = bHB$

Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông ta có:

$a^2 = BC^2 = HB^2 + HC^2 + 2HB.HC$

$b^2 = AH^2 + HC^2$

$c^2 = AH^2 + BH^2$

$\Rightarrow (a+b)(a^2 + b^2 - c^2) = (a+b)(2a.HC) = 2a(a.HC + b.HC)$

$= 2a.(bHB + bHC) = 2a(ab) = 2a^2b$

Vậy ta có: $(a+b)(a^2 + b^2 - c^2) = 2a^2b$