

CHỦ ĐỀ 6

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm $M(x; y; z)$ thuộc đường thẳng Δ sao cho $T = \left| \overrightarrow{\alpha_1 MA_1} + \overrightarrow{\alpha_2 MA_2} + \dots + \overrightarrow{\alpha_n MA_n} \right|$ nhỏ nhất (với $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{\alpha_1 IA_1} + \overrightarrow{\alpha_2 IA_2} + \dots + \overrightarrow{\alpha_n IA_n} = \vec{0}$

Dựa vào đẳng thức $\overrightarrow{\alpha_1 IA_1} + \overrightarrow{\alpha_2 IA_2} + \dots + \overrightarrow{\alpha_n IA_n} = \vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I .

Ta có:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{\alpha_1 (MI + IA_1)} + \overrightarrow{\alpha_2 (MI + IA_2)} + \dots + \overrightarrow{\alpha_n (MI + IA_n)} \\ &= (\overrightarrow{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} MI) + \overrightarrow{\alpha_1 IA_1} + \overrightarrow{\alpha_2 IA_2} + \dots + \overrightarrow{\alpha_n IA_n} \\ &= (\overrightarrow{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} MI) \quad (\text{do } \overrightarrow{\alpha_1 IA_1} + \overrightarrow{\alpha_2 IA_2} + \dots + \overrightarrow{\alpha_n IA_n} = \vec{0}) \\ \Rightarrow T &= \left| \overrightarrow{\alpha_1 MA_1} + \overrightarrow{\alpha_2 MA_2} + \dots + \overrightarrow{\alpha_n MA_n} \right| = \left| \overrightarrow{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} MI \right| \end{aligned}$$

Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $T_{\min} \Leftrightarrow \left| MI \right|_{\min}$

Mà $M \in \Delta$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên đường thẳng Δ .

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

+ $M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$. Tính $\overrightarrow{IM}$

+ Do $IM \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{IM} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Rightarrow t \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

+ $M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$

+ $T = \left| \overrightarrow{\alpha_1 MA_1} + \overrightarrow{\alpha_2 MA_2} + \dots + \overrightarrow{\alpha_n MA_n} \right| = f(t)$ theo hàm t .

+ Xét $f(t)$ để tìm giá trị nhỏ nhất, suy ra t

$$\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và đường thẳng Δ . Tìm tọa độ điểm $M(x; y; z)$ thuộc đường thẳng Δ sao cho $T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$ nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) (với $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

Chú ý:

$$T_{\min} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$$

$$T_{\max} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$$

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

+ Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$

+ Dựa vào đẳng thức $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I .

+ Ta có:

$$\begin{aligned} T &= \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2 \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n})^2 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MI^2 + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 + 2MI(\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MI^2 + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 \quad (\text{do } \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MI^2 + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2$$

+ Vì $\alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2$ không đổi nên:

- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.
- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.

+ Mà $M \in \Delta$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên đường thẳng Δ .

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

+ $M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$. Tính $\overrightarrow{IM}$

+ Do $IM \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{IM} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Rightarrow t \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

$$+ M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$$

$$+ T = \left| \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right| = f(t) \text{ theo hàm } t.$$

+ Xét $f(t)$ để tìm giá trị nhỏ nhất, suy ra t

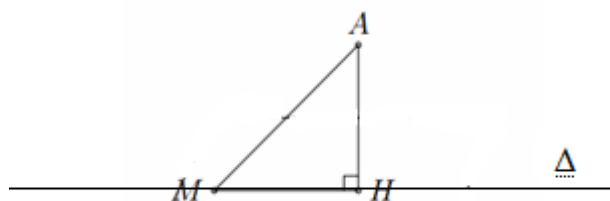
Bài toán 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ cố định và điểm M di động trên đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}. \text{ Tìm tọa độ điểm } M \text{ để } AM \text{ có giá trị nhỏ nhất.}$$

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng Δ .

+ Khi đó, tam giác AHM vuông tại H do đó $AM \geq AH$.

+ Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$.

+ Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A trên đường thẳng Δ .

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

$$+ M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct). \text{ Tính } \overrightarrow{AM}$$

$$+ \text{Do } AM \perp \Delta \text{ nên } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Rightarrow t \Rightarrow \text{độ điểm } M \text{ cần tìm.}$$

Cách 2: Phương pháp đại số

$$+ M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$$

$$+ T = \left| \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right| = f(t) \text{ theo hàm } t.$$

+ Xét $f(t)$ để tìm giá trị nhỏ nhất, suy ra t

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(3; -2; 3)$, $B(1; 0; 5)$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2}. \text{ Tìm tọa độ điểm } M \text{ trên đường thẳng } d \text{ để } MA^2 + MB^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

A. $M(1; 2; 3)$

B. $M(2; 0; 5)$

C. $M(3; -2; 7)$

D. $M(3; 0; 4)$

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm của AB , ta có $I = (2; -1; 4)$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } MA^2 + MB^2 &= \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = (\overline{MI} + \overline{IA})^2 + (\overline{MI} + \overline{IB})^2 \\ &= 2\overline{MI}^2 + \overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + 2\overline{MI} \cdot (\overline{IA} + \overline{IB}) = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = MI^2 + 6. \end{aligned}$$

Do đó $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI có độ dài ngắn nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng d .

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua I và vuông góc với đường thẳng d là

$$1.(x-2) - 2.(y+1) + 2.(y-4) = 0 \quad \text{hay} \quad (P): x - 2y + 2z - 12 = 0.$$

Phương trình tham số của đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Tọa độ điểm M cần tìm là nghiệm $(x; y; z)$ của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 2t \\ x - 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 5 \\ t = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } M(2; 0; 5).$$

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}$ và ba điểm $A(6; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 4)$.

Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc d sao cho biểu thức

$P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $a + b + c$ bằng

- A. -3. B. 4. C. 1. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Vì $M \in d$ nên giả sử $M(1-t; 2+t; -t)$.

$$\text{Ta có: } MA^2 = 3t^2 + 14t + 29; MB^2 = 3t^2 - 4t + 2; MC^2 = 3t^2 + 10t + 21$$

$$\Rightarrow P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = 18t^2 + 36t + 96 = 18(t+1)^2 + 78 \geq 78$$

Do đó $P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = -1$, khi đó:

$$M(2; 1; 1) \Rightarrow a + b + c = 4.$$

- Câu 3.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$, $M(2;1;0)$. Gọi $H(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho MH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.
- A. $T = 6$. B. $T = 12$. C. $T = \sqrt{5}$. D. $T = 21$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$. Vì $H \in d$ nên tọa độ điểm H có dạng $H(1+2t; -1+t; -t)$. Độ dài MH nhỏ nhất khi và chỉ khi H là hình chiếu của M lên d .

Ta có $\vec{u}(2;1;-1)$ là vector chỉ phương của d , $\vec{MH}(-1+2t; -2+t; -t)$.

H là hình chiếu của M lên $d \Leftrightarrow \vec{MH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(-1+2t) + (-2+t) - t = 0 \Leftrightarrow 6t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$. Tọa

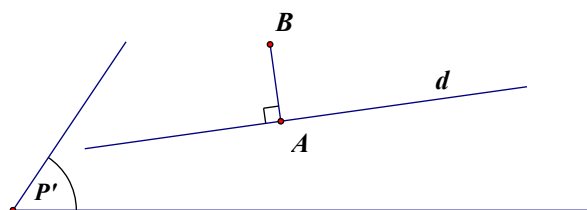
độ điểm $H\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ suy ra $\begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases}$.

Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 6$.

- Câu 4.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;0;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 2 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d lớn nhất.

- A. $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$. B. $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-2}$.
- C. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. D. $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.

Lời giải



Gọi (P') chứa A và song song (P) suy ra $(P'): x + y + 2z - 4 = 0$.

Ta thấy $B \in (P')$ do đó $d(B, d)$ đạt giá trị lớn nhất là AB .

Khi đó d vuông góc với AB và d vuông góc với giá của n là VTPT của (P) .

Suy ra một VTCP của d là $\vec{u} = [\vec{n}, \vec{AB}] = (2; 2; -2)$.

Kết hợp với điểm A thuộc d nên ta chọn đáp án **C**.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -3)$, $B(-2; -2; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Gọi M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (α) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Xác định phương trình đường thẳng MB khi MB đạt giá trị lớn nhất.

A.
$$\begin{cases} x = -2 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

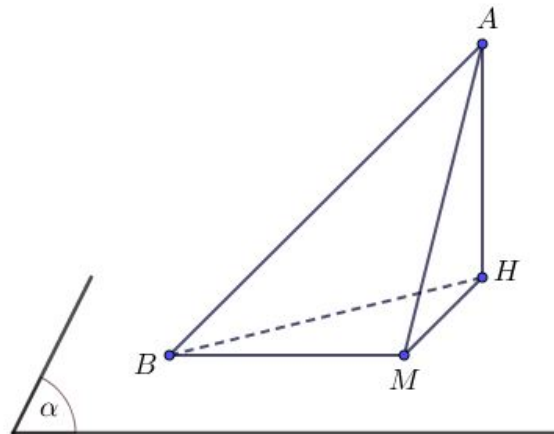
B.
$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) - 1 + 9 = 0 \Rightarrow B \in (\alpha)$

Gọi H là hình chiếu của A trên (α) thì $AH \perp MB$, $AM \perp MB \Rightarrow MH \perp MB$

$\Rightarrow MB \leq BH$. Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv H$, lúc đó M là hình chiếu của A trên (α) .

Gọi $H(x; y; z)$, $\vec{AH} = (x - 1; y - 2; z + 3)$.

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 2y - z + 9 = 0 \\ \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z + 3}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - z = -9 \\ x - y = -1 \\ x + 2z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow MB: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(-3; -2; -1) \Rightarrow \vec{MB} = (1; 0; 2)$$

Câu 6. Viết phương trình đường thẳng a đi qua $M(4; -2; 1)$, song song với mặt phẳng $(\alpha): 3x - 4y + z - 12 = 0$ và cách $A(-2; 5; 0)$ một khoảng lớn nhất.

A. $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{AM} = (6; -7; 1)$, vectơ pháp tuyến của (α) là $n = (3; -4; 1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên a .

$d(A; a) = AH \leq AM = \sqrt{86} \Rightarrow d(A; a)$ lớn nhất khi $H \equiv M$.

Khi đó a là đường thẳng đi qua M , song song với (α) và vuông góc với AM .

Gọi u là vectơ chỉ phương của $a \Rightarrow \begin{cases} u \perp n \\ u \perp \overrightarrow{AM} \end{cases}; [\overrightarrow{AM}, n] = (-3; -3; -3) = -3(1; 1; 1)$.

Chọn $u = (1; 1; 1)$. **Đáp án D thỏa mãn.**

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 0; 1)$, $B(1; -1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$

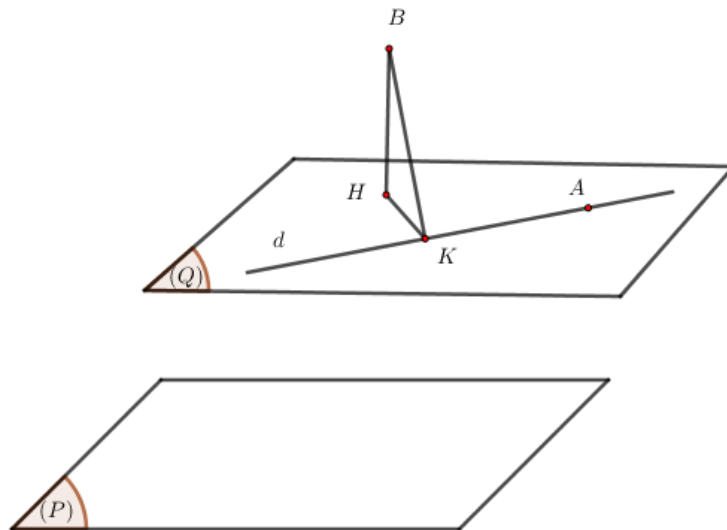
B. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{-11} = \frac{z-1}{2}$

C. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{2}$

D. $d: \frac{x+3}{-26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$

Lời giải

Chọn A



Gọi mặt phẳng (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P) . Khi đó phương trình của mặt phẳng (Q) là $1(x+3) - 2(y-0) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z + 1 = 0$.

Gọi H là hình chiếu của điểm B lên mặt phẳng (Q) , khi đó đường thẳng BH đi qua $B(1; -1; 3)$ và nhận

$$n_{(Q)} = (1; -2; 2) \text{ làm vector chỉ phương có phương trình tham số là } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Vì $H = BH \cap (Q) \Rightarrow H \in BH \Rightarrow H(1+t; -1-2t; 3+2t)$ và $H \in (Q)$ nên ta có

$$(1+t) - 2(-1-2t) + 2(3+2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{10}{9} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{AH} = \left(\frac{26}{9}; \frac{11}{9}; -\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{9}(26; 11; -2)$$

Gọi K là hình chiếu của B lên đường thẳng d , khi đó

Ta có $d(B; d) = BK \geq BH$ nên khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất khi $BK = BH$, do đó đường thẳng d đi

qua A và có vector chỉ phương $u = (26; 11; -2)$ có phương trình chính tắc: $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 4z = 0$, đường thẳng

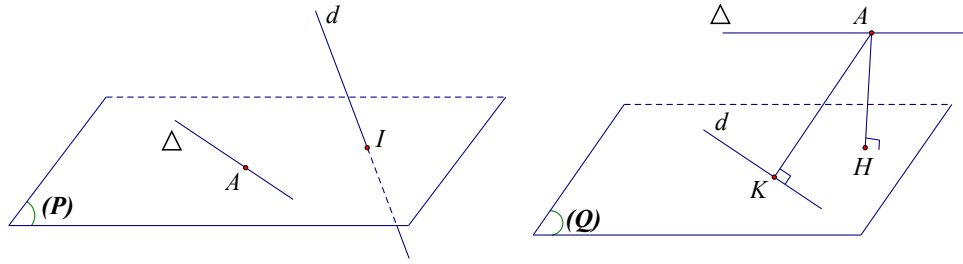
$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1; 3; 1)$ thuộc mặt phẳng (P) . Gọi Δ là đường thẳng đi qua A , nằm

trong mặt phẳng (P) và cách đường thẳng d một khoảng cách lớn nhất. Gọi $u = (a; b; 1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ . Tính $a + 2b$.

- A. $a + 2b = -3$. B. $a + 2b = 0$. C. $a + 2b = 4$. D. $a + 2b = 7$.

Lời giải

Chọn A



Đường thẳng d đi qua $M(1; -1; 3)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; -1; 1)$.

Nhận xét rằng, $A \notin d$ và $d \cap (P) = I(-7; 3; -1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và song song với Δ . Khi đó $d(\Delta, d) = d(\Delta, (Q)) = d(A, (Q))$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên (Q) và d . Ta có $AH \leq AK$.

Do đó, $d(\Delta, d)$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(A, (Q))$ lớn nhất $\Leftrightarrow AH_{\max} \Leftrightarrow H \equiv K$. Suy ra AH chính là đoạn vuông góc chung của d và Δ .

Mặt phẳng (R) chứa A và d có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(R)} = [\vec{AM}, \vec{u}_1] = (-2; 4; 8)$.

Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (R) nên có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{n}_{(R)}, \vec{u}_1] = (12; 18; -6)$.

Đường thẳng Δ chứa trong mặt phẳng (P) và song song với mặt phẳng (Q) nên có véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (66; -42; 6) = 6(11; -7; 1)$.

Suy ra, $a = 11; b = -7$. Vậy $a + 2b = -3$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; -3), B(-3; 2; 1)$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua $M(1; 2; 3)$ sao cho tổng khoảng cách từ A đến (d) và từ B đến (d) là lớn nhất. Khi đó phương trình đường thẳng (d) là

A. $\frac{x-1}{-5} = y-2 = \frac{z}{4}$.

B. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{-2}$.

D. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $d(A, (d)) \leq AM, d(B, (d)) \leq BM$.

$d(A, (d)) + d(B, (d))$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} AM \perp (d) \\ BM \perp (d) \end{cases}$.

$$\vec{MA} = (1; -1; -6) \text{ và } \vec{MB} = (-4; 0; -2)$$

Khi đó (d) có vectơ chỉ phương $u = [\vec{MA}, \vec{MB}] = (2; 26; -4) \Rightarrow u_1 = (1; 13; -2)$

Phương trình $(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{-2}$

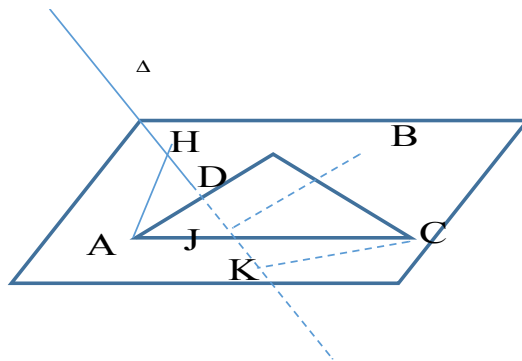
Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0), B(0;2;0), C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất. Hỏi Δ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

- A. $M(5;7;3)$ B. $M(-1;-2;1)$ C. $M(3;4;3)$ D. $M(7;13;5)$

Lời giải

Chọn A

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C



Ta có phương trình của $(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3y + z - 6 = 0$

Ta thấy $D(1;1;1) \in (P)$

Gọi H, J, K lần lượt là hình chiếu của A, B, C lên Δ

Khi đó: $AH \leq AD, BJ \leq BD, CK \leq CD$ Suy ra tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất

bằng $AD + BD + CD$ hay Δ là đường thẳng đi qua D và vuông góc với (P)

Suy ra phương trình $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ khi đó Δ đi qua $M(5;7;3)$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $D: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và $D': \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. Xét điểm M thay đổi. Gọi a, b lần lượt là khoảng cách từ M đến D và D' . Biểu thức $a^2 + 2b^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \in M_0(x_0, y_0, z_0)$. Khi đó giá trị $x_0 + y_0$ bằng

- A. $\frac{4}{3}$ B. 0 C. $\frac{2}{3}$ D. $\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C

Giả sử PQ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng D và D'

Với $P \in D$ và $Q \in D'$ có $P(0,0,1)$ và $Q(1,0,0)$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên đường thẳng D và D'

Khi đó ta có $a + b = ME + MF \geq EF \geq PQ$ hay $a + b \geq \sqrt{2}$.

Nhận thấy $\frac{1}{3}(a - 2b)^2 = (a^2 + 2b^2) - \frac{4}{3}a^2 + \frac{4}{3}ab + \frac{2}{3}b^2 = (a^2 + 2b^2) - \frac{2}{3}(a + b)^2$

Do đó ta có $\frac{1}{3}(a - 2b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2b^2 \geq \frac{2}{3}(a + b)^2$ hay $a^2 + 2b^2 \geq \frac{4}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a^2 + 2b^2$ bằng $\frac{4}{3}$ đạt được khi dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} M \in EF \\ EF \perp PQ \\ a = 2b \end{cases}$ hay

$\vec{MP} = -2\vec{MQ}$ hay $M(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3})$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P): (m-1)x + y + mz - 1 = 0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là

A. $2 < m < 6$.

B. $m > 6$.

C. $-2 < m < 2$.

D. $-6 < m < 2$.

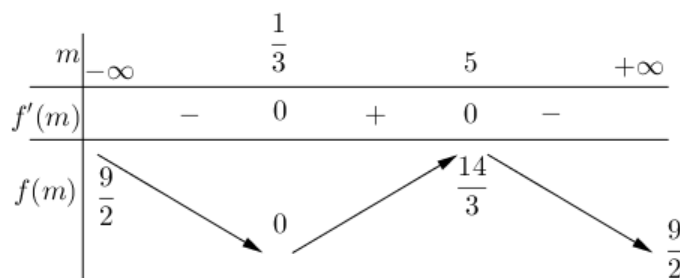
Lời giải

Chọn a

Cách 1:

Ta có $d(A; (P)) = \frac{|m-1+1+2m-1|}{\sqrt{(m-1)^2+1+m^2}} = \sqrt{\frac{(3m-1)^2}{2(m^2-m+1)}}$

Xét $f(m) = \frac{(3m-1)^2}{2(m^2-m+1)} \Rightarrow f'(m) = \frac{(5-m)(3m-1)}{2(m^2-m+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ m = 5 \end{cases}$



Vậy $\max d(A; (P)) = \sqrt{\frac{14}{3}}$ khi $m = 5 \in (2; 6)$.

Cách 2:

Ta đi tìm đối tượng cố định của mặt phẳng (P) :

$$(P): (m-1)x + y + mz - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+z)m - x + y - 1 = 0$$

Với mọi $m \in \mathbb{R}$ mặt phẳng (P) luôn đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $\begin{cases} x+z=0 \\ -x+y-1=0 \end{cases}$ tức luôn đi qua

$$(d): \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=-t \end{cases}$$

đường thẳng

Gọi $H(t; 1+t; -t) \in (d) \Rightarrow \overline{AH} = (t-1; t; -t-2)$. Để khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất thì

$AH \perp (P) \Rightarrow \overline{AH}$ cùng phương với VTPT của (P) là $\vec{n}_P = (m-1; 1; m)$, suy ra:

$$\frac{t-1}{m-1} = \frac{t}{1} = \frac{-t-2}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} mt-t=t-1 \\ mt=-t-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{3} \\ m=5 \in (2;6) \end{cases}$$

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; 3; -2)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(0; 8; -5)$

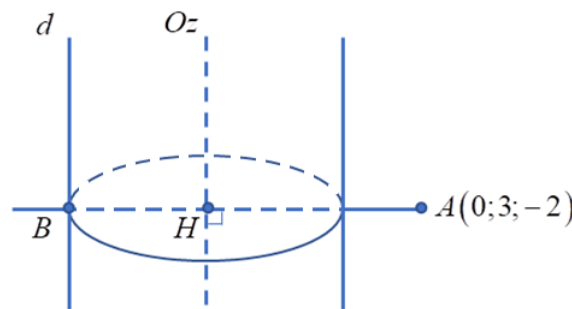
B. $N(0; 2; -5)$

C. $P(0; -2; -5)$

D. $Q(-2; 0; -3)$

Lời giải

Chọn C



Do đường thẳng $d \parallel Oz$ nên d nằm trên mặt trụ có trục là Oz và bán kính trụ là $R=2$.

Gọi H là hình chiếu của A trên trục Oz , suy ra tọa độ $H(0; 0; -2)$.

Do đó $d_{(A, Oz)} = AH = 3$.

Gọi B là điểm thuộc đường thẳng AH sao cho $\frac{AH}{AB} = \frac{3}{5}$

$$\Rightarrow B(0; -2; -2).$$

Vậy $d(A, d)_{\max} = 5 \Leftrightarrow d$ là đường thẳng đi qua B và song song với Oz .

$$d: \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \\ z=-2+t \end{cases}$$

Phương trình tham số của

Kết luận: d đi qua điểm $P(0; -2; -5)$.

Câu 14. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-3=0$ và tạo với

đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=4+3t \\ z=-3-2t \end{cases}$ một góc nhỏ nhất thì phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-t' \\ z=2t' \end{cases}$

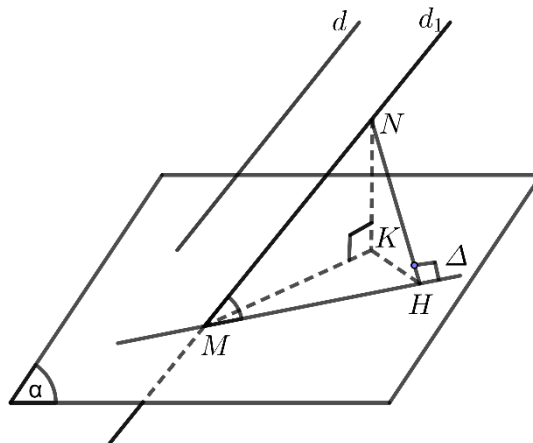
B. $\begin{cases} x=8+5t' \\ y=-3-4t' \\ z=2+t' \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1+2t' \\ y=1-t' \\ z=3-2t' \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=1+5t' \\ y=1-4t' \\ z=3+2t' \end{cases}$

Lời giải

Chọn B



Đường thẳng d có vector chỉ phương là $u=(0;3;-2)$.

Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến là $n=(1;1;-1)$.

Vì $u.n=0.1+3.1+(-2).(-1)=5 \neq 0$ nên d cắt (α) .

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua M và $d_1 \parallel d$, suy ra d_1 có phương trình: $\begin{cases} x=3 \\ y=1+3t \\ z=1-2t \end{cases}$.

Lấy $N(3;4;-1) \in d_1$. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ .

Ta có: $\angle(d, \Delta) = \angle NMH$ và $\sin \angle NMH = \frac{NH}{MN} \geq \frac{NK}{MN}$.

Do vậy $\angle(d, \Delta)$ nhỏ nhất khi $K \equiv H$ hay Δ là đường thẳng MK .

Đường thẳng NK có phương trình:
$$\begin{cases} x=3+t \\ y=4+t \\ z=-1-t \end{cases}$$

Tọa độ điểm K ứng với t là nghiệm của phương trình:

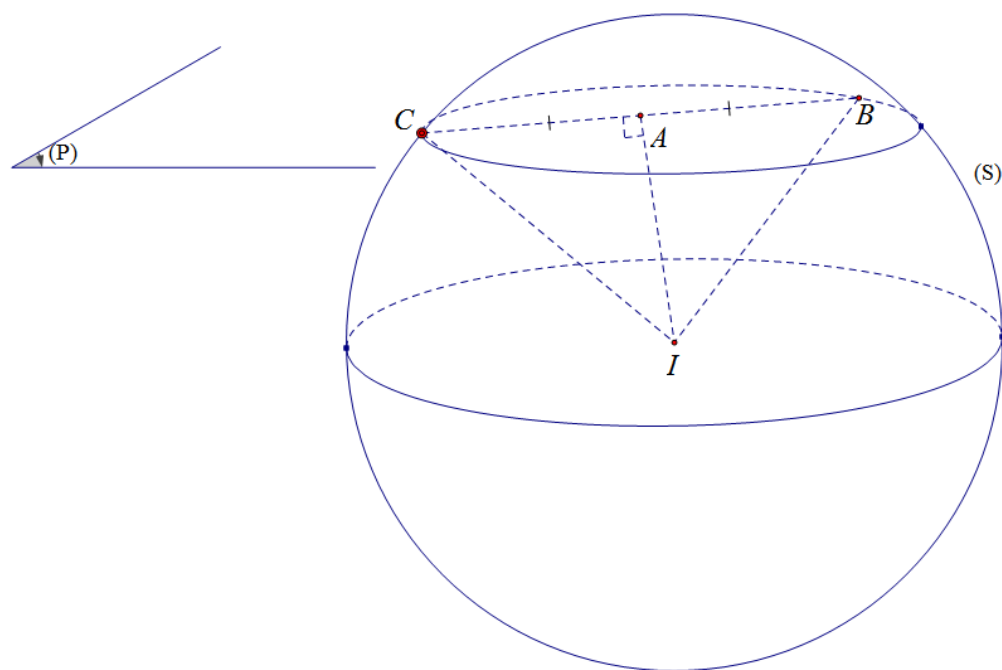
$$(3+t)+(4+t)-(-1-t)-3=0 \Leftrightarrow t=-\frac{5}{3}. \text{ Suy ra } K\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;-2)$, mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-7=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm B, C sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất, với I là tâm của mặt cầu (S) . Phương trình của đường thẳng Δ là

- A. $\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=-2-t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=-2+t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=-2 \end{cases}$

Lời giải

Chọn C



(S) có tâm $I(1;2;0)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+7}=2\sqrt{3}$.

$\vec{AI}=(1;1;2) \Rightarrow AI=\sqrt{6} < R \Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S) và A nằm trên dây cung BC (1).

$S_{\Delta IBC} = \frac{1}{2} IB \cdot IC \cdot \sin \angle BIC = \frac{R^2}{2} \sin \angle BIC \leq \frac{R^2}{2}$ nên diện tích ΔIBC đạt giá trị lớn nhất là $\frac{R^2}{2} \Leftrightarrow \sin \angle BIC = 1$

$\Rightarrow \angle BIC = 90^\circ \Rightarrow \Delta IBC$ vuông cân tại $I \Rightarrow BC = IC\sqrt{2} = R\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$

Gọi J là trung điểm của BC . Ta có $IJ \perp BC$ và $IJ = \frac{BC}{2} = \sqrt{6}$ (2).

ΔAIJ vuông tại $J \Rightarrow AI \geq IJ$, kết hợp thêm với (1) và (2) ta có $IJ = AI \Rightarrow A \equiv J \Rightarrow A$ là trung điểm của BC và $IA \perp BC$.

(P) có vector pháp tuyến $n_{(P)} = (1; 1; 1)$ có giá vuông góc với Δ .

Vậy Δ nhận $u = [n_{(P)}, \vec{AI}] = (1; -1; 0)$ làm vector chỉ phương và đi qua $A(0; 1; -2)$

$$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = -2 \end{cases}$$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2; 1; 3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 5)$ và bán kính $R = 6$.

$IE = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} < R \Rightarrow$ điểm E nằm trong mặt cầu (S) .

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) , A và B là hai giao điểm của Δ với (S) .

Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB \perp OE$, mà $AB \perp IH$ nên $AB \perp (HIE) \Rightarrow AB \perp IE$.

Suy ra: $u_{\Delta} = [n_P, \vec{EI}] = (5; -5; 0) = 5(1; -1; 0)$

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3; 3; -3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua M , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ .

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$ **B.** $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$ C. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$ D. $\frac{x+3}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{8}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$.

$$d(I,(\alpha)) = \frac{|2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 5 + 15|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 6 < R \Rightarrow (\alpha) \cap (S) = C(H;r), H \text{ là hình chiếu của } I \text{ lên } (\alpha).$$

Gọi Δ_1 là đường thẳng qua I và vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow \Delta_1$ có VTCP là $\vec{u}_{\Delta_1} = (2; -2; 1)$.

$$\Rightarrow \text{PTTS } \Delta_1: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}. \text{ Tọa độ } H \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \\ 2x - 2y + z + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow H(-2; 7; 3).$$

Ta có AB có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow AB$ là đường kính của $(C) \Leftrightarrow \Delta \equiv MH$.

Đường thẳng MH đi qua $M(-3; 3; -3)$ và có VTCP $\vec{MH} = (1; 4; 6)$.

$$\Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}.$$

Suy ra phương trình

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

Lời giải

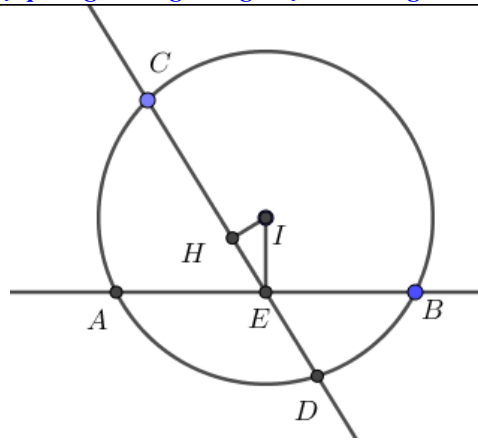
Chọn C

Ta có tâm và bán kính mặt cầu (S) là $I(3;2;5); R=6$

$$IE = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} < R$$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua E

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên Δ



Dây cung càng nhỏ khi khoảng cách từ tâm tới đường thẳng Δ càng lớn

Ta có $d(I, \Delta) = IH \leq IE$

Vậy dây cung nhỏ nhất khi đường thẳng Δ vuông góc với $\vec{IE} = (-1; -1; -2)$

Dựa vào các đáp án ta thấy trong các vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (9; 9; 8)$ $\vec{u}_3 = (-5; 3; 0)$ $\vec{u}_3 = (1; -1; 0)$

$\vec{u}_4 = (4; 3; -3)$

Thì chỉ có $\vec{u}_3 \cdot \vec{IE} = 0$

Nhận xét: ta hoàn toàn có thể viết được pt đường thẳng Δ bằng cách viết pt mặt phẳng (Q) đi qua E

nhận $\vec{IE} = (-1; -1; -2)$ làm một vectơ pháp tuyến, khi đó $\Delta = (P) \cap (Q)$

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$. Điểm M thay đổi trên (S) , điểm N thay đổi trên (P) . Độ dài nhỏ nhất của MN bằng

A. 1

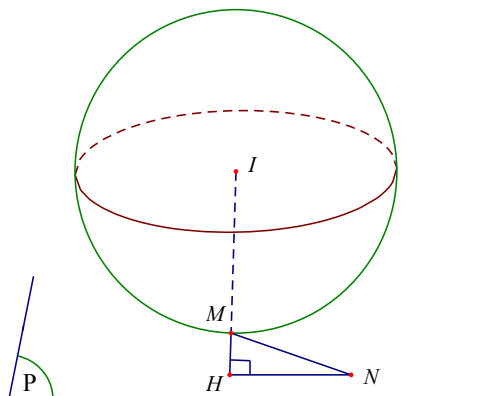
B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -1)$, bán kính $R=3$; $d(I; (P))=4 > R \Rightarrow$ mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) không có điểm chung.

Dựng $IH \perp (P), (H \in (P))$. Ta có: MN nhỏ nhất khi M là giao điểm của đoạn IH với (S) và $N \equiv H$.

Phương trình đường thẳng IH :
$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Điểm $M(1+2t; -2-t; -1+2t) \in (S)$ nên $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow (2t)^2 + (-t)^2 + (2t)^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 1$. Khi đó $M_1(3; -3; 1), M_2(-1; -1; -3)$.

Thử lại: $d(M_1; (P))=1$; $d(M_2; (P))=7 > IH=4$ (loại).

Vậy $MN_{\min} = MH = 1$ khi $M(3; -3; 1); N\left(\frac{11}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(3; 2; 0)$, $C(-1; 2; 4)$. Gọi M là điểm thay đổi sao cho đường thẳng MA, MB, MC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau; N là điểm thay đổi nằm trên mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{1}{2}$. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN .

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

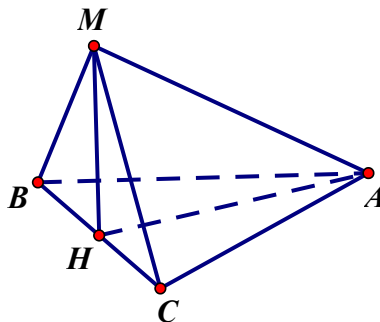
B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\vec{AB} = (2; 2; 0)$, $\vec{AC} = (-2; 2; 4) \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow \Delta ABC$ suy ra ΔABC vuông tại A .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (ABC) . Ta có:

$(MA, (ABC)) = (MA, HA) = \angle MAH$

$(MB, (ABC)) = (MB, HB) = \angle MBH$

$(MC, (ABC)) = (MC, HC) = \angle MCH$

Theo giả thiết $\overline{MAH} = \overline{MBH} = \overline{MCH} \Rightarrow \Delta MAH = \Delta MBH = \Delta MCH$ (g.c.g)

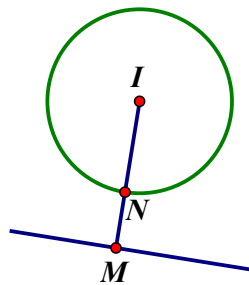
Do đó: $HA = HB = HC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Suy ra: H là trung điểm của $BC \Rightarrow H(1; 2; 2)$.

Ta có: $\left[\overline{AB}, \overline{AC} \right] = (8; -8; 8)$, Chọn vectơ chỉ phương của đường thẳng MH là $\overline{u_{MH}} = (1; -1; 1)$.

Phương trình đường thẳng MH có dạng:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 3)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Gọi $K(1+t; 2-t; 2+t)$ là hình chiếu vuông góc của điểm I trên đường thẳng MH .

Ta có: $\overline{IK} = (t-2; -t; t-1)$, $\overline{u_{MH}} = (1; -1; 1)$

Do $IK \perp MH$ nên $\overline{IK} \cdot \overline{u_{MH}} = 0$, ta được: $t = 1$. Khi đó: $K(2; 1; 3)$ và $IK = \sqrt{2}$

Do $IK > R$ nên đường thẳng MH không cắt mặt cầu.

Ta có: $MN \geq d(I, MH) - IN = IK - IN = \frac{\sqrt{2}}{2}$

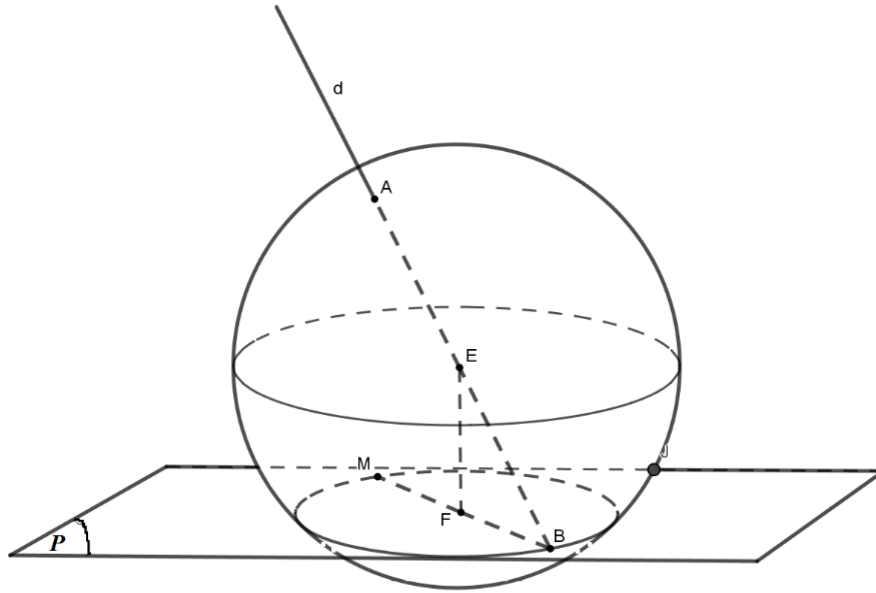
Vậy giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\overline{u} = (3; 4; -4)$ cắt (P) tại điểm B . Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° . Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

- A. $J(-3; 2; 7)$ B. $K(3; 0; 15)$ C. $H(-2; -1; 3)$ D. $I(-1; -2; 3)$

Lời giải

Chọn D



- Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $u = (3; 4; -4)$ có phương trình là:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{-4} \Rightarrow \text{giao điểm của } d \text{ và } (P) \text{ là } B = (-2; -2; 1).$$

- Do M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° nên M nằm trên mặt cầu (S) đường kính AB .

$$\text{Gọi } E \text{ là trung điểm của } AB \Rightarrow E = \left(-\frac{1}{2}; 0; -1 \right) \Rightarrow AE^2 = \frac{41}{4}$$

$$\Rightarrow (S): x^2 + y^2 + z^2 + x + 2z - 9 = 0$$

- Lại do $M \in (P)$ nên M nằm trên đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) , gọi là đường tròn (C) .

- Mặt khác B là điểm cố định trên đường tròn (C) nên độ dài MB lớn nhất khi MB là đường kính của đường tròn (C) .

- Gọi F là tâm của $(C) \Rightarrow F$ là hình chiếu vuông góc của E trên (P) .

Đường thẳng EF nhận vector pháp tuyến $n = (2; 2; -1)$ của (P) làm vector pháp tuyến

$$\Rightarrow EF: \frac{x+\frac{1}{2}}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow F = \left(-\frac{5}{2}; -2; 0 \right) \text{ (là giao điểm của } (P) \text{ và } EF).$$

- Vì MB là đường kính của (C) nên $M = (-3; -2; -1) \Rightarrow \overrightarrow{MB} = (1; 0; 2)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng $MB \Rightarrow$ phương trình đường thẳng MB là:

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- Trong các điểm đã cho ở các đáp án A, B, C, D chỉ có điểm $I(-1; -2; 3)$ (đáp án D) thuộc đường thẳng MB .

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và có bán kính $r = 2$.

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -mt \\ z = (m-1)t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Xét đường thẳng d , m là tham số thực. Giả sử $(P), (Q)$ là mặt phẳng chứa d và tiếp xúc với (S) lần lượt tại M, N . Khi đó đoạn MN ngắn nhất hãy tính khoảng cách từ điểm $B(1; 0; 4)$ đến đường thẳng d .

A. $\sqrt{5}$.

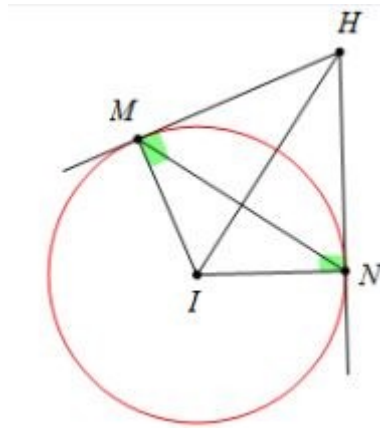
B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{4\sqrt{237}}{21}$.

D. $\frac{4\sqrt{273}}{21}$.

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng thiết diện đi qua tâm I, M, N cắt đường thẳng d tại $H \Rightarrow IH \perp d, d(I, d) = IH$.

Ta có $MN = 2MK = 2 \cdot \frac{MH \cdot MI}{IH} = 2 \cdot \frac{\sqrt{IH^2 - r^2} \cdot r}{IH} = \frac{4\sqrt{IH^2 - 4}}{IH} = \frac{4\sqrt{x^2 - 4}}{x} = f(x)$ với $x = IH > 2$.

Ta có $f'(x) = \frac{4}{x^2\sqrt{x^2 - 4}} > 0, \forall x > 2$, suy ra hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Do đó $MN_{\min} \Leftrightarrow IH_{\min}$. Ta có $u_d = (1; -m; m-1), A(1; 0; 0) \in d$, suy ra $d(I, d) = \frac{\left| \begin{bmatrix} u_d \\ IA \end{bmatrix} \right|}{|u_d|}$

$$\frac{\sqrt{25m^2 - 20m + 17}}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$$

Xét hàm số $f(m) = \frac{25m^2 - 20m + 17}{2m^2 - 2m + 2}$ có bảng biến thiên là

m	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	3	$+\infty$			
$f'(m)$	$-$	0	$+$	0	$-$		
f	$\frac{25}{2}$	$\searrow$	$\frac{25}{3}$	$\nearrow$	13	$\searrow$	$\frac{25}{2}$

$$d: \begin{cases} x=1+t \\ y=-\frac{1}{5}t (t \in \mathbb{R}) \\ z=-\frac{4}{5}t \end{cases}$$

Suy ra $IH_{\min}$ khi $m = \frac{1}{5}$. Đường thẳng d có phương trình là

$$d(B, d) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{AB}, u_d \right] \right|}{|u_d|} = \frac{\sqrt{416}}{\sqrt{42}} = \frac{4\sqrt{273}}{21}$$

Khoảng cách

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$ và điểm $A(1; 2; -3)$. Đường thẳng d đi qua A và có véc tơ chỉ phương $u = (3; 4; -4)$ cắt (P) tại B . Điểm M thay đổi trên (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc 90° . Độ dài đoạn MB lớn nhất bằng

A. $\frac{36}{\sqrt{5}}$.

B. $\sqrt{41}$.

C. 6.

D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$d: \begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \\ z=-3-4t \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng nên tọa độ điểm B thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \\ z=-3-4t \\ 2x+2y-z+9=0 \Rightarrow 2(1+3t)+2(2+4t)-(-3-4t)+9=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow B(-2; -2; 1) \end{cases}$$

Do M nhìn đoạn AB dưới một góc 90° nên M thuộc mặt cầu (S) có đường kính $AB = \sqrt{41}$. Lại do $M \in (P)$ nên M thuộc đường tròn giao tuyến giữa mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) .

Do MB là một dây cung của đường tròn này nên MB lớn nhất khi nó là đường kính của đường tròn giao tuyến giữa mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) . Gọi $I\left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right)$ là trung điểm AB thì I là tâm mặt cầu (S) và $d(I; (P)) = 3$. Khi đó bán kính đường tròn giao tuyến là

$$r = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - d^2(I; (P))} = \sqrt{\frac{41}{4} - 9} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ Vậy } MB_{\max} = 2r = \sqrt{5}.$$

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \frac{5}{6}$, mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Điểm M thay đổi trên đường tròn giao tuyến của (P) và (S) . Giá trị lớn nhất của $d(M; \Delta)$ là

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm là $I(1; -1; 0)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{30}}{6}$.

Ta có: $d(I; (P)) = \frac{1}{3} < R$. Khi đó bán kính đường tròn giao tuyến là: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{5}{6} - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Δ qua O và có vector chỉ phương $a = (1; 1; 1) \Rightarrow \vec{OI} = (1; -1; 0), [\vec{OI}, a] = (-1; -1; 2)$.

$$d(I; \Delta) = \frac{|\vec{OI}, a|}{|a|} = \frac{\sqrt{1+1+4}}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{2}.$$

Ta có:

Mặt khác $\Delta \perp (P)$, gọi H là tâm của đường tròn (C) giao tuyến của (P) và (S) .

Ta có: $IH \parallel \Delta$. Do đó $d(M; \Delta)$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(M; \Delta) = r + d(IH; \Delta) = r + d(I; \Delta)$

Khoảng cách lớn nhất của $d(M; \Delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

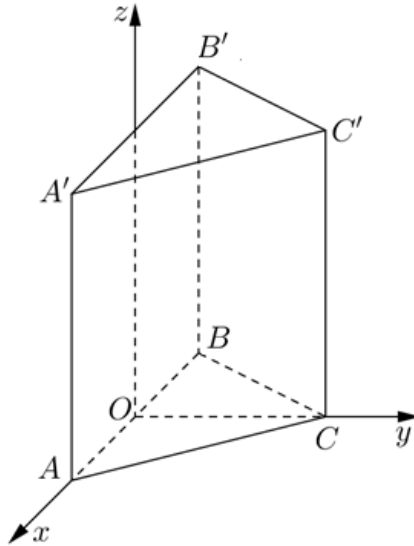
Vậy đáp án cần chọn là **A**.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(x_0; 0; 0)$, $B(-x_0; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$ và $B'(-x_0; 0; y_0)$ trong đó x_0, y_0 là các số thực dương và thỏa mãn $x_0 + y_0 = 4$. Khi khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C$ lớn nhất thì bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

- A. $R = \frac{\sqrt{29}}{2}$. B. $R = \frac{29}{4}$. C. $R = \frac{\sqrt{41}}{4}$. D. $R = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



+ Xác định tọa độ các đỉnh hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

$$A(x_0; 0; 0) \quad B(-x_0; 0; 0) \quad C(0; 1; 0)$$

$$A'(x_0; 0; y_0) \quad B'(-x_0; 0; y_0) \quad C'(0; 1; y_0)$$

+ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C'$.

$$\overrightarrow{AC'} = (-x_0; 1; y_0) \quad \overrightarrow{B'C'} = (x_0; 1; -y_0) \quad \text{và} \quad \overrightarrow{CC'} = (0; 0; y_0)$$

$$d(AC', B'C') = \frac{|\left[\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{CC'} \right]|}{\left| \left[\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'C'} \right] \right|} = \frac{|x_0 y_0|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \sqrt{\frac{(x_0 y_0)^2}{(x_0 + y_0)^2 - 2x_0 y_0}}$$

Đặt $t = x_0 y_0 \leq \left(\frac{x_0 + y_0}{2} \right)^2 = 4 \Rightarrow t \in (0; 4]$

Xét $f(t) = \frac{t^2}{16 - 2t} \Rightarrow f'(t) = \frac{32t - 2t^2}{(16 - 2t)^2}$

Cho $f'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 16 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(t)$			+	
$f(t)$				

Giá trị lớn nhất của $d(AC', B'C')$ bằng $f(4)$ nên $x_0 y_0 = 4$ (1)

Mặt khác $x_0 + y_0 = 4$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $x_0 = y_0 = 2$.

Khi đó, $AB = 4$, $AC = BC = \sqrt{5}$ và chiều cao hình lăng trụ là $h = CC' = 2$

Ta có $r = \frac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{5}{2}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy ΔABC .

Vậy $R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-2)$, $B(5;1;1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 12z + 9 = 0$. Xét đường thẳng d đi qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=2 \\ y=1+t \\ z=-2+2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=2 \\ y=1-4t \\ z=-2+t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-2t \\ z=-2+t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+4t \\ z=-2-t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-3;-6)$ và bán kính $R = \sqrt{3^2 + 6^2 - 9} = 6$.

Vì $IA = R$ nên $A \in (S) \Rightarrow d$ đi qua A và vuông góc với $IA \Rightarrow d$ nằm trong (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với IA . Ta có $(P): x + 2y + 2z = 0$.

Mặt khác, ta luôn có: $d(B, d) \geq d(B, (P)) = 3$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow d$ là hình chiếu của đường thẳng AB trên (P) .

Ta tìm hình chiếu H của B trên (P) :

Gọi Δ là đường thẳng qua B và vuông góc với $(P) \Rightarrow \Delta: \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$.

Vì H là giao điểm của Δ và (P) nên tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2} \\ x+2y+2z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow H(4;-1;-1)$

$\Rightarrow \overline{AH} = (2;-2;1)$.

Do đó, d là đường thẳng đi qua hai điểm A và H nên có phương trình: $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-2t \\ z=-2+t \end{cases}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ và hai điểm $A(2;0;3)$, $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc d thỏa mãn $MA^4 + MB^4$ nhỏ nhất. Tìm x_0 .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $x_0 = 2$

Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} MA^4 + MB^4 &= (MA^2 + MB^2)^2 - 2MA^2 \cdot MB^2 = \left(2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \right)^2 - 2 \left(MI^2 - \frac{AB^2}{4} \right)^2 \\ &= 4MI^4 + 2MI^2 AB^2 + \frac{AB^4}{4} - 2MI^4 + MI^2 AB^2 - \frac{AB^4}{8} \\ &= 2MI^4 + 3MI^2 AB^2 + \frac{AB^4}{4} = 2 \left(MI^2 + \frac{3AB^2}{4} \right)^2 - \frac{7}{10} AB^4 \end{aligned}$$

Do đó, $MA^4 + MB^4$ đạt GTNN khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên d .

Điểm $I(2; -1; 0)$. Lấy $M(2+t; -1+2t; 3t) \in d$. $\overrightarrow{IM} = (t; 2t; 3t)$

$$\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t + 4t + 9t = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Suy ra $M \equiv I$.

Vậy $x_0 = 2$

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A , song song với (P) và cách điểm $B(-1;0;2)$ một khoảng ngắn nhất. Tìm một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ ?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $u = (6; -3; -5)$

Cách 1

Gọi (Q) chứa Δ và song song với (P) . Suy ra (Q) có phương trình:

$$x - 1 + 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0$$

Khi đó $d(B; \Delta)_{\min} = BH$ với H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (Q) .

Đường thẳng BH đi qua B , vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

Tọa độ giao điểm H của đường thẳng BH và mặt phẳng (Q) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{Giải hệ trên ta được} \quad H\left(-\frac{1}{5}; \frac{8}{5}; 2\right).$$

Do đó Δ là đường thẳng AH có $\vec{AH} = \left(\frac{6}{5}; -\frac{3}{5}; -1\right)$.

Suy ra $u = (6; -3; -5)$ cũng là một vectơ chỉ phương của Δ .

Cách 2 :

Gọi $u = (a; b; c), a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là một vectơ chỉ phương của D .

Mặt phẳng $(P): x + 2y = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $n = (1; 2; 0)$.

D song song với (P) nên $nu = 0 \Leftrightarrow a + 2b = 0 \Leftrightarrow a = -2b \Rightarrow u = (-2b; b; c)$.

Ta có $\vec{AB} = (-2; -1; 1)$, $\vec{AB} \cdot u = (b + c; 2b - 2c; 4b)$.

Khoảng cách từ $B(-1; 0; 2)$ đến D là $d(B, D) = \frac{|\vec{AB} \cdot u|}{|u|} = \sqrt{\frac{21b^2 - 6bc + 5c^2}{5b^2 + c^2}}$.

Nếu $c = 0 \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow d(B, D) = \sqrt{\frac{21}{5}}$.

Nếu $c \neq 0$, đặt $t = \frac{b}{c} \Rightarrow d(B, D) = \sqrt{\frac{21t^2 - 6t + 5}{5t^2 + 1}}$.

Xét $f(t) = \frac{21t^2 - 6t + 5}{5t^2 + 1}, f'(t) = \frac{30t^2 - 8t - 6}{(5t^2 + 1)^2}$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ t = \frac{3}{5} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	$+\infty$
y'		0	0	
	-		+	-
y		6	$\frac{16}{5}$	$\frac{21}{5}$

$$f(t) \text{ bằng } \frac{16}{5} \text{ khi } t = \frac{3}{5}.$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị nhỏ nhất của

$$\mathfrak{P} \left(d(B, D) \right)_{\min} = \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ khi } t = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{3}{5}.$$

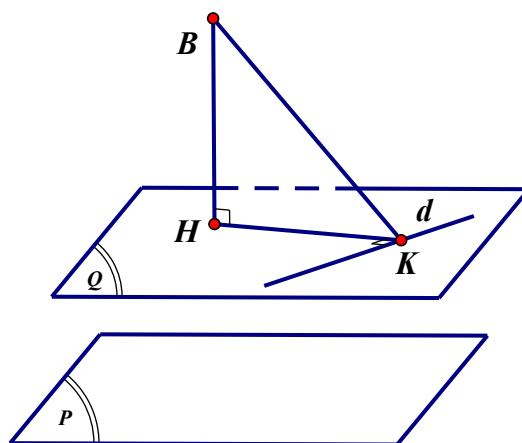
Chọn $b = -3, c = -5$ $\mathfrak{P} a = 6$. Vậy D nhận vecto $u = (6; -3; -5)$ làm vecto chỉ phương

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 0; 1)$, $B(1; -1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$



Ta thấy rằng d đi qua A và d song song với (P) nên d luôn nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và $(Q) \parallel (P)$. Như vậy bây giờ ta chuyển về xét trong mặt phẳng (Q) để thay thế cho (P) . Ta lập được phương trình mặt phẳng $(Q): x - 2y - 2z + 1 = 0$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B lên (Q) và d . Ta tìm được $H\left(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right)$. Ta luôn có được bất đẳng thức $d(B; d) = BK \geq BH$ nên khoảng cách từ B đến d bé nhất bằng BH .

Đường thẳng d bây giờ đi qua A, H nên có phương trình $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

Câu 30. Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(0; 3; -2)$. Xét đường thẳng d thay đổi song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, hãy viết phương trình chính tắc của đường thẳng d .

Trả lời:

Lời giải

$$d: \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=-2+t \end{cases}$$

Đáp án:

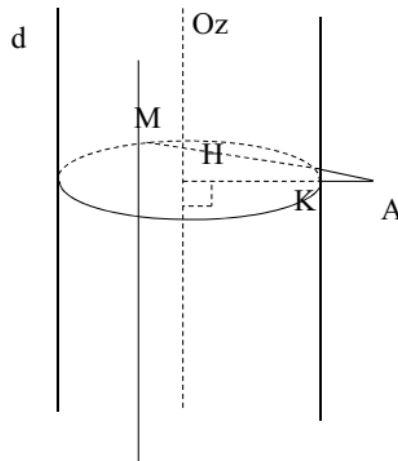
Vì d song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2 nên d thuộc mặt trụ trục Oz và bán kính bằng 2.

Có $H(0; 0; -2)$ là hình chiếu vuông góc của $A(0; 3; -2)$ trên Oz.

Có $\overline{HA}(0; 3; 0) \Rightarrow HA = 3$ nên A nằm ngoài mặt trụ.

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với Oz. M là hình chiếu vuông góc của A trên d

Gọi K là giao điểm của AH và mặt trụ (K nằm giữa A và H).



Để thấy $d(A; d) = AM \leq AK$; $AK = AH - d(A; d) = 1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv K$.

$$\overline{HK} = \frac{2}{3} \overline{HA} \Rightarrow K(0; 2; -2) \Rightarrow d: \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=-2+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Khi đó ta có:

Câu 31. Trong không gian Oxyz, đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng

$(\alpha): x + y - z - 3 = 0$ và tạo với đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 3t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$ một góc nhỏ nhất. Viết phương trình của đường thẳng Δ .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\begin{cases} x = 8 + 5t' \\ y = -3 - 4t' \\ z = 2 + t' \end{cases}$

Cách 1.

Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d lên (α) , khi đó góc (d, d') là góc nhỏ nhất trong các góc tạo bởi d với đường thẳng bất kỳ trong (α) .

d có véc tơ chỉ phương $u_d = (0; 3; -2)$, (α) có véc tơ pháp tuyến $n_\alpha = (1; 1; -1)$, gọi n_β là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) tạo bởi d và d' thì $n_\beta \perp u_d, n_\beta \perp n_\alpha$ ta chọn $n_\beta = [n_\alpha, u_d] = (1; 2; 3)$

Gọi $u_{d'}$ là véc tơ chỉ phương của d' thì $u_{d'} \perp n_\alpha, u_{d'} \perp n_\beta$, ta chọn $u_{d'} = [n_\alpha, n_\beta] = (5; -4; 1)$.

Đường thẳng Δ song song hoặc trùng với d' nên có véc tơ chỉ phương $u_\Delta = u_{d'} = (5; -4; 1)$.

Trong các đáp án A, B, C, D cho ở đề bài thì chỉ có đáp án B có véc tơ chỉ phương thỏa điều kiện.

Thay tọa độ của M vào phương trình của Δ trong đáp án B ta được:

$$\begin{cases} 3 = 8 + 5t' \\ 1 = -3 - 4t' \Leftrightarrow t' = -1 \\ 1 = -3 - 2t' \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy đáp án B thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2.

d có véc tơ chỉ phương $u_d = (0; 3; -2)$, (α) có véc tơ pháp tuyến $n_\alpha = (1; 1; -1)$,

Giả sử Δ có véc tơ chỉ phương $u_\Delta = (a; b; c), (a^2 + b^2 + c^2 > 0)$

Do $\Delta \subset (\alpha)$ ta có: $n_\alpha \cdot u_\Delta = 0 \Leftrightarrow a + b - c = 0 \Leftrightarrow c = a + b$.

Gọi φ là góc giữa Δ và d , $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, khi đó:

$$\cos \varphi = \left| \cos(u_\Delta, u_d) \right| = \frac{|3b - 2c|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|b - 2a|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2a^2 + 2b^2 + 2ab}}$$

Góc φ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos \varphi$ lớn nhất, ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu $a = 0$ ta được $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

Trường hợp 2. Nếu $a \neq 0$ ta được:

$$\cos \varphi = \frac{|t-2|}{\sqrt{26(t^2+t+1)}}, \left(t = \frac{b}{a} \right)$$

Ta có $26 \cos^2 \varphi = \frac{t^2 - 4t + 4}{t^2 + t + 1}$, đặt $f(t) = \frac{t^2 - 4t + 4}{t^2 + t + 1}, t \in \mathbb{R}$, có:

$$f'(t) = \frac{5t^2 - 6t - 8}{(t^2 + t + 1)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$:

t	$-\infty$	$-4/5$	2	$+\infty$	
f(t)	+	0	-	0	+
f(t)	1	$28/3$	$2/3$	1	

Do $\cos \varphi \geq 0$ nên $\cos \varphi$ lớn nhất khi $f(t)$ lớn nhất, từ bảng biến thiên ta được $\max_{\mathbb{R}} f(t) = f\left(-\frac{4}{5}\right)$.

Khi đó $\frac{b}{a} = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow 5b = -4a$, chọn $a = 5 \Rightarrow b = -4$ và ta được và ta được $c = 1$.

Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương $u_{\Delta} = (5; -4; 1)$.

Trong các đáp án A, B, C, D cho ở đề bài thì chỉ có đáp án B có véc tơ chỉ phương thỏa điều kiện.

Thay tọa độ của M vào phương trình của Δ trong đáp án B ta được:

$$\begin{cases} 3 = 8 + 5t' \\ 1 = -3 - 4t' \Leftrightarrow t' = -1 \\ 1 = -3 - 2t' \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy đáp án B thỏa yêu cầu bài toán.

$$(d): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng và hai điểm $A(1; 5; 0)$, $B(3; 3; 6)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên (d) sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính $P = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $P = 3$

$$M \in d \Rightarrow M(-1 + 2t; 1 - t; 2t)$$

Chu vi tam giác MAB là: $AM + BM + AB$. Vì $AB = \text{const}$ nên chu vi nhỏ nhất khi

$(AM + BM)$ nhỏ nhất.

$$\overrightarrow{AM}(2t-2; -t-4; 2t), \quad \overrightarrow{BM}(2t-4; -t-2; 2t-6)$$

$$AM + BM = \sqrt{9t^2 + 20} + \sqrt{9t^2 - 36t + 56} = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(6-3t)^2 + (2\sqrt{5})^2}$$

Đặt $u = (3t; 2\sqrt{5}), v = (6-3t; 2\sqrt{5}) \Rightarrow u+v = (6; 4\sqrt{5})$

Áp dụng bất đẳng thức vector: $|u| + |v| \geq |u+v|$. Dấu bằng xảy ra khi u, v cùng hướng.

Ta có: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \geq |u+v| = \sqrt{6^2 + (4\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{29}$. Do đó $(AM + BM)$ nhỏ nhất khi

tồn tại số k dương sao cho $u = kv \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = k(6-3t) \\ 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ k=1 \end{cases}$. Khi đó $M(1; 0; 2)$.

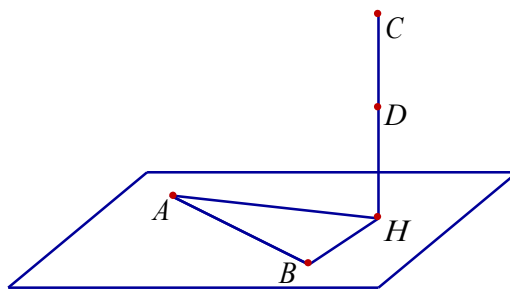
Vậy $P = a + b + c = 1 + 0 + 2 = 3$.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1; 1; 6)$, $B(-3; -2; -4)$, $C(1; 2; -1)$, $D(2; -2; 0)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = a + b + c = 1$



Gọi C_{ABM} là chu vi của tam giác ABM .

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -3; -10) \Rightarrow AB = \sqrt{113}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -3; -10), \quad \overrightarrow{CD} = (1; -4; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -2 + 12 - 10 = 0 \Rightarrow AB \perp CD$$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với đường thẳng CD .

H là giao điểm của (P) và đường thẳng CD .

Phương trình mặt phẳng (P) qua $A(-1; 1; 6)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{CD} = (1; -4; 1)$ là:

$$x - 4y + z - 1 = 0$$

Phương trình đường thẳng CD :
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$H \in CD \Leftrightarrow H(1+t; 2-4t; -1+t)$$

$$H \in (P) \Leftrightarrow 1+t - 4(2-4t) - 1+t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow H\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$$

Với $\forall M \in CD$, ta có
$$\begin{cases} AM \geq AH \\ BM \geq BH \end{cases} \Rightarrow AM + BM \geq AH + BH$$

$$C_{ABM} = AB + AM + BM \geq \sqrt{113} + AH + BH, \quad \forall M \in CD$$

Suy ra $\min C_{ABM} = \sqrt{113} + AH + BH$, đạt được $M \equiv H \Leftrightarrow M\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$

$$\text{Vậy } T = a + b + c = 1$$