

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THCS NĂM HỌC 2023 - 2024
CỤM CÁC TRƯỜNG TRÊN ĐỊA BÀN THỊ TRẤN MỘC CHÂU**

Môn Thi: TOÁN. Ngày thi: 16.11.2023
(Thời gian 150 phút không kể thời gian giao đề)
(Đề gồm 01 trang)

Bài 1. (5 điểm)

$$P = \frac{x}{x - \sqrt{x}} + \frac{2}{x + 2\sqrt{x}} + \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+2\sqrt{x})}$$

1) Cho biểu thức:

a) Rút gọn P .

b) Tính P khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

2) Cho hàm số $y = mx - 2m - 1$ ($m \neq 0$)

a) Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số với các trục Ox, Oy . Xác định m để diện tích tam giác AOB bằng 4 (đvdt)

Bài 2. (3 điểm)

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

b) Tìm số tự nhiên n sao cho $n^2 + 2n + 12$ là số chính phương

Bài 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2 + 2022x - 2021 = 2\sqrt{2024x - 2023}$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + z = \sqrt{6} \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \end{cases}$$

Bài 4. (6 điểm)

Cho AB là đường kính của đường tròn $(O; R)$. C là một điểm thay đổi trên đường tròn (C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H . Gọi I là trung điểm của AC , OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O; R)$ tại M .

a) Chứng minh 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MC là tiếp tuyến của $(O; R)$.

c) Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ACB đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R .

Bài 5. (2 điểm)

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 2$

$$P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

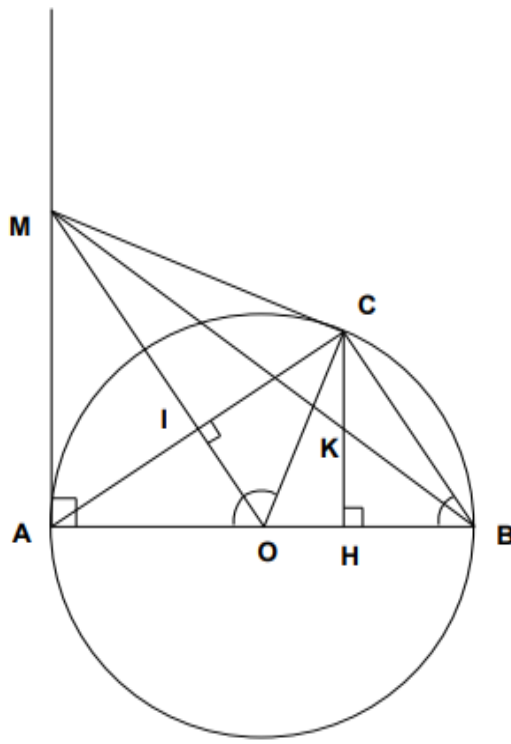
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN
KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THCS NĂM HỌC 2023 - 2024
CỤM CÁC TRƯỜNG TRÊN ĐỊA BÀN THỊ TRẤN MỘC CHÂU

Bài	Nội dung	Điểm
1 (5 đ)	1. a) Với $x > 0; x \neq 1$, ta có: $P = \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$ $= \frac{x(\sqrt{x}+2) + 2(\sqrt{x}-1) + x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} - 2 + x + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$ $= \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	1.b) $x = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1$	0,5
	$P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$	0,5
	1.c) ĐK: $x > 0; x \neq 1$: $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	Để P nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x}-1$ là ước của 2. $U(2) = \{-1; 1; -2; 2\}$	0,25
	Nếu $\sqrt{x}-1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$ (TM)	
	Nếu $\sqrt{x}-1=-1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ (KTM)	0,25
	Nếu $\sqrt{x}-1=2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=9$ (TM)	0,25
	Nếu $\sqrt{x}-1=-2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=-1$ (Vô lí)	
	Vậy với $x=4$ hoặc $x=9$ thì P nhận giá trị nguyên.	
2.a) Giả sử đồ thị hàm số đi qua điểm $M(x_0, y_0)$ với mọi m. Ta có: $y_0 = mx_0 - 2m - 1$ với mọi m. $\Leftrightarrow mx_0 - 2m - 1 - y_0 = 0$ với mọi m. $\Leftrightarrow m(x_0 - 2) - (y_0 + 1) = 0$ với mọi m. $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$		
Vậy đồ thị hàm số đi qua điểm cố định $M(2; -1)$	0,5	
2.b) Đồ thị hàm số cắt hai trục Ox và Oy khi $m \neq 0$ và $-2m - 1 \neq 0$ Hay $m \neq 0$ và $m \neq -\frac{1}{2}$		

	<p>A là giao điểm của đồ thị với trục Ox ta có $y = 0$ thay vào hàm số ta được $x = \frac{2m+1}{m}$</p> <p>B là giao điểm của đồ thị với trục Oy ta có $x = 0$ thay vào hàm số ta được $y = -2m - 1$</p> <p>Vậy $A\left(\frac{2m+1}{m}; 0\right); B(0; -2m - 1)$</p> <p>Diện tích tam giác là:</p> $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \left \frac{2m+1}{m} \right \cdot -2m - 1 = \frac{(2m+1)^2}{2 m }$ <p>Mà $S = 4 \Leftrightarrow (2m+1)^2 = 8 m$</p> <p>+) Nếu $m > 0$, ta có phương trình: $4m^2 + 4m + 1 = 8m$ $\Leftrightarrow (2m - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ (TM)</p> <p>+) Nếu $m < 0$, ta có phương trình: $4m^2 + 4m + 1 = -8m$</p> $\Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{2} \text{ (TM)} \\ m = \frac{-3 - 2\sqrt{2}}{2} \text{ (TM)} \end{cases}$ <p>Vậy $m \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{2}; \frac{-3 - 2\sqrt{2}}{2} \right\}$</p>	0,5
2 (3 đ)	<p>a) $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow (x + y)^2 = (x + 1)(x + 2)$ (*)</p> <p>Vế trái của (*) là số chính phương; VP của (*) là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0.</p> $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -2 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$ <p>Vậy có 2 cặp số nguyên $(x; y) = (-1; 1)$ hoặc $(x; y) = (-2; 2)$ thỏa mãn</p> <p>b) Vì $n^2 + 2n + 12$ là số chính phương nên đặt $n^2 + 2n + 12 = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$)</p> $\Rightarrow (n^2 + 2n + 1) + 11 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - (n + 1)^2 = 11$ $\Leftrightarrow (k + n + 1)(k - n - 1) = 11$ <p>Nhận thấy $k + n + 1 > k - n - 1$ và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết</p> $(k + n + 1)(k - n - 1) = 11 \cdot 1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} k + n + 1 = 11 \\ k - n - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ n = 4 \text{ (TM)} \end{cases}$ <p>Vậy với $n = 4$ thì $n^2 + 2n + 12$ là số chính phương</p>	0,5 0,5 0,5 0,5
3 (4 đ)	<p>a) Giải phương trình: $x^2 + 2022x - 2021 = 2\sqrt{2024x - 2023}$</p> <p>ĐK: $x \geq \frac{2023}{2024}$</p> $x^2 + 2022x - 2021 = 2\sqrt{2024x - 2023}$ $\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 2024x - 2023 - 2\sqrt{2024x - 2023} + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (\sqrt{2024x - 2023} - 1)^2 = 0$ <p>Do $(x - 1)^2 \geq 0$ và $(\sqrt{2024x - 2023} - 1)^2 \geq 0$ với mọi $x \geq \frac{2023}{2024}$ nên:</p>	0,25 0,25 0,5 0,5

	$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ \sqrt{2024x - 2023} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{2024x - 2023} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2024x - 2023 = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$ <p>Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.</p>	0,5
	<p>b) $\begin{cases} x + y + z = \sqrt{6} \quad (1) \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \quad (2) \end{cases}$</p> $(2) \Leftrightarrow (x^3 + y^3) + z^3 - 3xyz = 0$ $\Leftrightarrow (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 + z^3 - 3xyz = 0$ $\Leftrightarrow [(x + y)^3 + z^3] - 3x^2y - 3xy^2 - 3xyz = 0$ $\Leftrightarrow (x + y + z) [(x + y)^2 - (x + y) \cdot z + z^2] - (3x^2y + 3xy^2 + 3xyz) = 0$ $\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz + z^2) - 3xy(x + y + z) = 0$ $\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz + z^2 - 3xy) = 0$ $\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = 0$ <p>Kết hợp (3), (1): $x + y + z = \sqrt{6}$, ta có:</p> $(x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz - xy) = 0$ $\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz - xy) = 0$ $\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yz - 2xy = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2xz + x^2) = 0$ $\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 = 0 \\ (y - z)^2 = 0 \\ (z - x)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \quad (4)$ <p>Kết hợp (4), (1): $x + y + z = \sqrt{6}$, ta có: $x = y = z = \frac{\sqrt{6}}{3}$</p> $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$ <p>Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là</p>	0,5 0,5 0,5

4
(6 đ)



0,5

a) Ta có $OI \perp AC$ (Đường kính đi qua trung điểm của dây cung), $CH \perp AB(gt)$.

Suy ra: $\widehat{CIO} = \widehat{CHO} = 90^\circ$ vậy tứ giác $CIOH$ là tứ giác nội tiếp,

suy ra C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

b) Xét $\triangle AOM$ và $\triangle COM$ có:

$$OA = OC = R$$

OM là cạnh chung

$\widehat{AOM} = \widehat{COM}$ (Vì $\triangle OCM$ cân tại O nên đường trung tuyến OI đồng thời là đường phân giác)

$\Rightarrow MC \perp CO \Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của $(O; R)$.

c) Chu vi tam giác ACB là $P_{ACB} = AB + AC + CB = 2R + AC + CB$

Ta lại có:

$$(AC - CB)^2 \geq 0 \Rightarrow AC^2 + CB^2 \geq 2AC \cdot CB \Rightarrow 2AC^2 + 2CB^2 \geq AC^2 + CB^2 + 2AC \cdot CB$$

$$2(AC^2 + CB^2) \geq (AC + CB)^2 \Rightarrow AC + CB \leq \sqrt{2(AC^2 + CB^2)}$$

$$\Rightarrow AC + CB \leq \sqrt{2AB^2} \text{ (Pitago)}$$

$$\Rightarrow AC + CB \leq \sqrt{2 \cdot 4R^2} \Rightarrow AC + CB \leq 2R\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $AC = CB \Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa cung AB .

Suy ra $P_{ACB} \leq 2R + 2R\sqrt{2} = 2R(1 + \sqrt{2})$.

Dấu "=" xảy ra khi C là điểm chính giữa cung AB

Vậy $\max P_{ACB} = 2R(1 + \sqrt{2})$ khi C là điểm chính giữa cung AB .

1,5

0,5

0,5

0,5

0,5

0,5

0,5

0,5

0,5

5
(2 đ)

Vì $x, y, z > 0$ ta có:

Áp dụng BĐT Côsi đối với 2 số dương $\frac{x^2}{y+z}$ và $\frac{y+z}{4}$ ta được:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$$

0,5

	<p>Tương tự ta có: $\frac{y^2}{x+z} + \frac{x+z}{4} \geq y(2); \frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq z(3)$</p> <p>Cộng (1), (2), (3) ta được</p> $\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \right) + \frac{x+y+z}{2} \geq x+y+z$ $\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq x+y+z - \frac{x+y+z}{2}$ $\Rightarrow P \geq (x+y+z) - \frac{x+y+z}{2} = 2 - \frac{2}{2} = 2 - 1 = 1$ <p>Dấu "=" xảy ra khi $\Leftrightarrow x=y=z = \frac{2}{3}$</p> <p>Vậy GTNN của P là $1 \Leftrightarrow x=y=z = \frac{2}{3}$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
--	--	----------------------------------