

**A. LÝ THUYẾT****I. Đại số**

- Căn thức bậc hai và các phép biến đổi
- Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai
- Căn bậc ba
- Hàm số bậc nhất

II. Hình học

- Hệ thức lượng trong tam giác vuông
- Đường tròn

B. BÀI TẬP THAM KHẢO**Phần I : Đại số****Dạng 1 : Rút gọn biểu thức :****Bài 1 : Rút gọn biểu thức :**

$$A = 2\sqrt{28} + \sqrt[3]{-27} - \frac{3\sqrt{175}}{\sqrt{7}}$$

$$D = \left(\frac{\sqrt{15} - \sqrt{20}}{2 - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{21} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$$

$$B = (\sqrt{12} + \sqrt{27} - 12\sqrt{3}) : \sqrt{3}$$

$$E = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} - \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{1 - \sqrt{3}}$$

$$C = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} + \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$F = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5} - 2} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$$

$$\text{Bài 2 : Cho biểu thức : } P = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3x + 3}{x - 9} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3} - 1 \right)$$

- Rút gọn P.
- Tính P khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$
- Tìm x để $P < \frac{1}{2}$
- Tìm GTNN của P

$$\text{Bài 3 : Cho biểu thức : } M = \frac{x + 12}{x - 4} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{4}{\sqrt{x} - 2} \quad (x \geq 0; x \neq 4)$$

- Rút gọn M.
- Tìm x nguyên để $\frac{1}{M}$ có giá trị là số nguyên
- So sánh M với 1
- Tìm giá trị của x để $M^2 = -M$

$$\text{Bài 4 : Cho biểu thức : } P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} + \frac{8\sqrt{x}}{x - 4} \right) : \left(2 - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 2} \right)$$

- Rút gọn P.
- Tính P khi $x = \frac{8}{3 + \sqrt{5}}$
- Tìm GTNN của P khi $x > 4$
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $P \in \mathbb{Z}$

$$\text{Bài 5 : Cho biểu thức } B = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}}$$

- Rút gọn B
- Tính B biết $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$
- Tìm x để B nguyên
- Tìm GTNN của $\frac{1}{B}$

Bài 6 : Cho biểu thức $E = \left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$

- Rút gọn E
- Tính E biết $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$
- Tìm x để $E < 1$.
- Tìm số tự nhiên x để E là số tự nhiên
- Tìm x để $E = \sqrt{x}$.
- Với $x > 1$. So sánh E với

Dạng 2: Giải phương trình

- $\sqrt{4-5x}=12$
- $\frac{1}{2}\sqrt{x-1}-\frac{3}{2}\sqrt{9x-9}+24\sqrt{\frac{x-1}{64}}=-17$
- $\sqrt{x^2-2x+4}=2x-2$
- $\sqrt{x-3}-2\sqrt{x^2-9}=0$
- $\sqrt{x^2-2x}=\sqrt{2-3x}$
- $\sqrt{x^2-4}-x+2=0$
- $\sqrt{1-4x+4x^2}=5$
- $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}=2$
- $\sqrt{x^2+6x+9}=2x-1$
- $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$
- $\sqrt{4x-20}+\sqrt{x-5}-\frac{1}{3}\sqrt{9x-45}=4$

Bài 7 : Giải phương trình

Dạng 3 : Hàm số và đồ thị

Bài 8 : Cho hàm số bậc nhất $y=(m-1)x + 2m - 3$ có đồ thị là đường thẳng (d)

- Tìm m để (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3
- Tìm m để (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -1
- Tìm m để (d) tạo với Ox một góc nhọn
- Tìm m để đồ thị của (d) tạo với Ox một góc
- Chứng minh rằng với mọi m 1 thì đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định

Bài 9: cho hàm số : $y=(2m-3)x - 1$ (d). Tìm m để :

- Hàm số là hàm số bậc nhất
- Hàm số là hàm số bậc nhất đồng biến, nghịch biến.
- Đồ thị của (d) đi qua điểm (-2;3)
- Đồ thị của (d) là một đường thẳng song song với đường thẳng $y = (-m + 2)x + 2m$
- Đồ thị của (d) đồng quy với 2 đường thẳng : $y = 2x - 4$ và $y = x + 1$

Bài 10 : Cho hai đường thẳng $y = 4x + m - 1$ (d) và $y = \frac{4}{3}x + 15 - 3m$ (d')

- Tìm m để (d) cắt (d') tại 1 điểm C trên trục tung
- Với m tìm được ở câu a, tìm tọa độ giao điểm A,B của (d) và (d') với trục hoành
- Tính diện tích và chu vi tam giác ABC.

Bài 11 : Cho hàm số bậc nhất $y = (2m + 1)x - 2m + 5$ có đồ thị là đường thẳng (d)

- Tìm m để (d) đi qua gốc tọa độ
- Biết (d₁) và (d₂) là đồ thị của hàm số $y = 2x + 7$ và $y = x - 4$. Hãy tìm m để (d),(d₁) và (d₂) đồng quy
- Chứng minh (d) luôn luôn đi qua một điểm cố định không phụ thuộc giá trị m.

Bài 12 : Cho hàm số bậc nhất $y = (m - 3)x + n$ có đồ thị là đường thẳng (d)

- Xác định m,n để (d) đi qua A(-1 ;5) và song song với (d') : $y = 1-2x$. Vẽ hình minh họa
- Xác định m,n biết hệ số góc của (d) là -2 và (d) đi qua B(3 ;2)
- Cho $m - n = 2$. Tìm giá trị m,n để khoảng cách từ điểm I(-1 ;0) đến (d) là lớn nhất

Bài 13 : Viết phương trình đường thẳng thỏa mãn một trong các điều kiện sau :

- a. Đi qua 2 điểm A(2 ;2) và B(3 ;-3)
- b. Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2
- c. Song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ và đi qua điểm M(-4 ;5)

Bài 14 : Cho hàm số : $y = (m-2)x + 2$ có đồ thị là đường thẳng d

- a. Tìm m để d cắt Ox tại điểm có hoành độ là $\frac{1}{2}$
- b. Tìm m để d cắt đường thẳng $y=2mx$ tại một điểm nằm bên phải trục tung
- c. Với $m \neq 2$. Tìm m để d cắt hai trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 5
- d. Với $m \neq 2$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến d bằng 1
- e. Tìm điểm mà d luôn đi qua với mọi giá trị của m

Phần II : Hình học

Bài 15 : (Đề thi HKI - Q. Đồng Đa 18.19)

Cho đường tròn (O;R), đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Bx của (O). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB có chứa Bx, lấy điểm M thuộc (O) (M khác A và B) sao cho $MA > MB$. Tia AM cắt Bx tại C. Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD với (O) (D là tiếp điểm).

- a. Chứng minh $OC \perp BD$
- b. Chứng minh bốn điểm O,C,B,D cùng thuộc một đường tròn
- c. Chứng minh $\widehat{CMD} = \widehat{CDA}$

Bài 16 : (Đề thi HKI - Q. Bắc Từ Liêm 18.19)

Cho điểm E thuộc nửa đường tròn tâm O, đường kính MN. Kẻ tiếp tuyến N của nửa đường tròn tâm O, tiếp tuyến này cắt đường thẳng ME tại D.

- a. Chứng minh tam giác MEN vuông tại E. Từ đó chứng minh : $DE \cdot DM = DN^2$
- b. Từ O kẻ OI vuông góc với ME (I thuộc ME). Chứng minh rằng bốn điểm O,I,D,N cùng thuộc một đường tròn
- c. Vẽ đường tròn đường kính OD, cắt nửa đường tròn tâm O tại điểm thứ hai là A. Chứng minh rằng DA là tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm O.
- d. Chứng minh rằng : $\widehat{DEA} = \widehat{DAM}$

Bài 17: (Đề thi HKI - Q. Cầu Giấy 18.19)

Cho đường tròn (O;R) cố định. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA và MB (A,B là tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OM và AB

- a. Chứng minh OM vuông góc với AB và $OH \cdot OM = R^2$
- b. Từ M kẻ cát tuyến MNP với đường tròn (N nằm giữa M và P). Gọi I là trung điểm của NP (I khác O). Chứng minh bốn điểm A,M,I,O cùng thuộc một đường tròn và tìm tâm của đường tròn đó.
- c. Qua N kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O), cắt MA, MB theo thứ tự ở C,D. Biết $MA=5\text{cm}$. Tính chu vi tam giác MCD.
- d. Qua O kẻ đường thẳng d vuông góc với OM, cắt MA và MB lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của M để diện tích tam giác MEF nhỏ nhất.

Bài 18: (Đề thi HKI - Q. Hai Bà Trưng 18.19)

Cho đường tròn (O;R), đường kính AB. Điểm C thuộc đường tròn sao cho $AC > CB$. C khác A và B. Kẻ CH vuông góc với AB tại H, kẻ OI vuông góc với AC tại I

- a. Chứng minh bốn điểm C,H,O,I cùng thuộc một đường tròn

b. Kẻ tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$, tia OI cắt Ax tại M . Chứng minh $OI \cdot OM = R^2$ Tính độ dài đoạn OI biết $OM = 2R$ và $R = 6\text{cm}$

c. Gọi giao điểm của BM với CH là K . Chứng minh tam giác AMO đồng dạng với tam giác HCB và $KC = KH$

d. Giả sử (O,R) cố định, điểm C thay đổi trên đường tròn nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện của đề bài. Xác định vị trí của C để chu vi tam giác OHC đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R

Bài 19 : (Đề thi HKI - Q.Hoàn Kiếm 18.19)

Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Gọi MA và MB là hai tiếp tuyến với đường tròn O (A, B là tiếp điểm). Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) . H là giao điểm của OM và AB . I là trung điểm của BD .

- Chứng minh tứ giác $OHBI$ là hình chữ nhật
- Cho biết OI cắt MB tại K , chứng minh KD là tiếp tuyến của (O)
- Giả sử $OM = 2R$, tính chu vi tam giác ADK theo R .
- Đường thẳng qua O và vuông góc với MD cắt tia AB tại Q . Chứng minh K là trung điểm của DQ

Bài 20 : (Đề thi HKI - Q. Nam Từ Liêm 18.19)

Cho điểm M thuộc nửa đường tròn $(O;R)$, đường kính AB (M khác A và B). Gọi E và F lần lượt là trung điểm của MA và MB .

- Chứng minh rằng : Tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật
- Tiếp tuyến tại M của nửa đường tròn (O,R) cắt các đường thẳng OE, OF lần lượt tại C và D
Chứng minh : CA tiếp xúc với nửa đường tròn (O,R) . Tính độ dài CA khi $R = 3\text{cm}$ và $\widehat{MAQ} = 30^\circ$
- Chứng minh : $AC \cdot BD = R^2$ và $S_{ACDB} \geq 2R^2$
- Gọi I là giao điểm của BC và EF , MI cắt AB tại K . Chứng minh rằng : EF là đường trung trực của MK .

Bài 21 : (Đề thi HKI - Q.Tây Hồ 18.19)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Từ một điểm M nằm trên nửa đường tròn ta vẽ tiếp tuyến x,y . Vẽ AD và BC vuông góc với xy .

- Chứng minh rằng : $MC = MD$
- Chứng minh rằng : $AD + BC$ có giá trị không đổi khi M di động trên đường tròn.
- Chứng minh rằng đường tròn đường kính CD tiếp xúc với ba đường thẳng AD, BC và AB .
- Xác định vị trí của điểm M trên đường tròn (O) để cho diện tích tứ giác $ABCD$ lớn nhất

Bài 22 : (Đề thi HKI - Q.Thanh Xuân 18.19)

Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa đường tròn, vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn. Trên nửa đường tròn, lấy điểm C bất kì. Vẽ tiếp tuyến của (O) tại C cắt Ax, By lần lượt tại D và E .

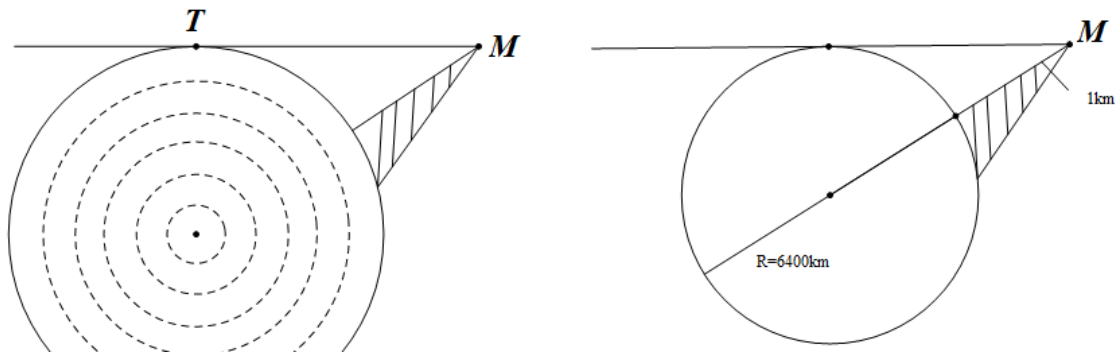
- Chứng minh rằng : $AD + BE = DE$
- AC cắt DO tại M , BC cắt OE tại N . Tứ giác $CMON$ là hình gì ? Vì sao ?
- Chứng minh rằng : $MO \cdot DM + ON \cdot NE$ không đổi
- AN cắt CO tại điểm H , khi C di chuyển trên nửa đường tròn $(O;R)$ thì điểm H di chuyển trên đường nào? Vì sao ?

Bài 23 : (Đề thi HKI - Q.Long Biên 18.19)

Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . Vẽ hai tiếp tuyến Ax, By với (O) . Trên đường tròn (O) lấy M sao cho $MA > MB$. Tiếp tuyến tại M của (O) cắt Ax tại C và cắt By tại D .

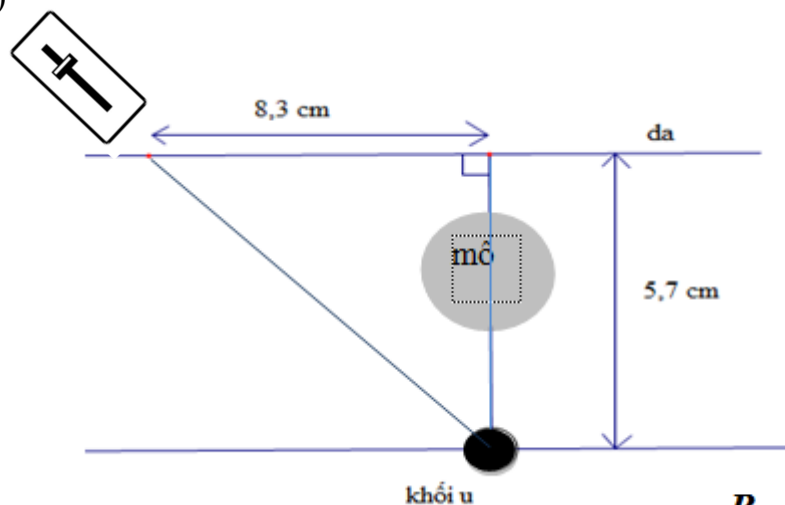
- Chứng minh $CD = AC + BD$
- Chứng minh : $\angle COD = 90^\circ$ và tính tích $AC \cdot BD$ theo R
- Đường thẳng BC cắt (O) tại F . Gọi T là trung điểm của BF , vẽ tia OT cắt By tại E . Chứng minh : EF là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- Qua điểm M vẽ đường thẳng song song với AC và cắt BC tại N . Trên đoạn thẳng AC lấy điểm K sao cho $AK = \frac{1}{4}AC$. Trên đoạn BD lấy điểm I sao cho $BI = \frac{1}{4}BD$. Chứng minh : 3 điểm K, N, I thẳng hàng

Bài 24 : Ngồi trên một đỉnh núi cao 1km có thể nhìn thấy một điểm T trên mặt đất với khoảng cách tối đa là bao nhiêu? Biết rằng bán kính của trái đất gần bằng 6400km.

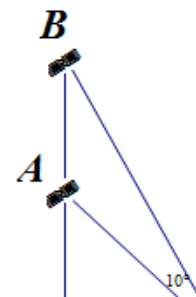


Bài 25 : Một khối u của bệnh nhân cách mặt da 5,7cm, được chiếu bởi chùm tia gamma. Để tránh làm tổn thương mô, bác sĩ đặt nguồn tia cách khối u (trên mặt da) 8,3 cm (như hình vẽ)

- Hỏi góc tạo bởi chùm tia với mặt da ? (Làm tròn đến độ)
- Chùm tia phải đi một đoạn bằng bao nhiêu cm để đến được khối u ? (Làm tròn đến số thập phân thứ nhất)



Bài 26 : Hai chiếc thuyền A và B ở vị trí được minh họa như hình.



- a. Tính khoảng cách BC
- b. Tính khoảng cách giữa hai chiếc thuyền

PHẦN III : MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO:

Bài 27 : Cho x, y, z là các số dương thay đổi thỏa mãn : $xy + xz + yz = 5$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $T = 3x^2 + 3y^2 + z^2$

Bài 28 : Cho các số thực : $x, y, z > 0$ và $x + 2y + 3z \geq 20$

Tìm GTNN của $P = x + y + z + \frac{3}{x} + \frac{9}{2y} + \frac{4}{z}$

Bài 29 : Cho các số thực x, y thỏa mãn : $x^2 + y^2 = 1$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $M = \sqrt{3}xy + y^2$

Bài 30 : Giải phương trình : $x + 5\sqrt{x+4} = 2\sqrt{x-1}$