

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT TRIỆU SƠN 6

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**VẬN DỤNG TÍNH CHẤT CỦA TỨ DIỆN VUÔNG ĐỂ
GIẢI LỚP CÁC BÀI TOÁN TÍNH KHOẢNG CÁCH
TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN LỚP 11**

Người thực hiện: Nguyễn Thị An
Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc lĩnh vực (môn): Toán

THANH HÓA NĂM 2017

	<i>Trang</i>
I. MỞ ĐẦU	
1. Lý do chọn đề tài	3
2. Mục đích nghiên cứu	3
3. Đối tượng nghiên cứu	3
4. Phương pháp nghiên cứu	4
II. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM	
1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm.	4
2. Thực trạng của vấn đề	4
3. Giải pháp tổ chức thực hiện	5
3.1 Tóm tắt các kiến thức cơ bản	5
3.2 Các ví dụ mở đầu	7
3.3 Các bài toán về tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng	9
3.4 Các bài toán về tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau	15
3.5 Một số bài tập chọn lọc	19
4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường	20
III. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	
1. Kết luận	21
2. Kiến nghị	22
TÀI LIỆU THAM KHẢO	23

I. MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Hình học không gian (HHKG) là một nội dung quan trọng trong chương trình toán học phổ thông, nó đóng vai trò rất quan trọng trong việc hình thành và phát triển năng lực tư duy cho học sinh. Chính vì vậy HHKG thường có mặt trong các kỳ thi đánh giá năng lực của học sinh và đặc biệt là kỳ thi THPT Quốc Gia.

HHKG nói chung và các bài toán tính khoảng cách nói riêng là một nội dung khó đối với đa số học sinh nói chung và đặc biệt là các em học sinh trường THPT Triệu Sơn 6 nói riêng.

Tiếp nối SKKN của năm học 2015 - 2016, trên cơ sở đã đạt được những kết quả nhất định trong những năm học vừa qua với kinh nghiệm từ thực tiễn giảng dạy và học hỏi đồng nghiệp tôi mạnh dạn chọn và tiếp tục phát huy đề tài ***"Vận dụng tính chất của tứ diện vuông để giải lớp các bài toán tính khoảng cách trong hình học không gian lớp 11"*** làm đề tài SKKN của năm học 2016 - 2017.

Điểm mới trong đề tài SKKN lần này là: Đề xuất áp dụng tính chất của tứ diện vuông để tính một lớp các bài toán về khoảng cách, một số kinh nghiệm xác định và dựng tứ diện vuông một cách đơn giản và đặc biệt là một hệ thống các ví dụ, các bài tập có chọn lọc. Với mục đích chia sẻ bớt những khó khăn với các học trò. Rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp, sẽ chia của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp và độc giả để đề tài áp dụng có hiệu quả trong việc dạy và học về bài toán khoảng cách trong HHKG lớp 11.

2. Mục đích nghiên cứu

Trong giới hạn của một sáng kiến kinh nghiệm tôi xin đề xuất áp dụng tính chất của tứ diện vuông để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, trình bày một số kinh nghiệm của mình được đúc kết trong quá trình giảng dạy cho học sinh trong việc xác định và dựng tứ diện vuông đảm bảo tính đơn giản trong tư duy thuật giải và dễ áp dụng trong tính toán.

Tôi không có tham vọng giúp học sinh giải được tất cả các bài toán về tính khoảng cách mà chỉ mong muốn trang bị thêm cho các em một cách nhìn, một phương pháp, một hướng tư duy... từ đó để các em có thể tự tin hơn khi tiếp cận các bài toán về tính khoảng cách. Hy vọng đây là một tài liệu hữu ích cho các em học tập và các thầy cô tham khảo.

3. Đối tượng nghiên cứu

Bài toán tính khoảng cách là một trong những bài toán quan trọng trong chương trình hình học không gian lớp 11. Bản chất của đa số các bài toán tính khoảng cách lại là bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng và

trong đề tài này tôi sẽ nghiên cứu tìm cách tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt một cách đơn giản và nhẹ nhàng nhất. Đó là cách chuyển các bài toán khoảng cách về áp dụng tính chất của tứ diện vuông và một số kinh nghiệm, một số cách xác định và dựng tứ diện vuông một cách đơn giản cho từng loại, dạng bài cụ thể.

4. Phương pháp nghiên cứu

Xây dựng cơ sở lý luận, tóm lược các kiến thức cơ bản, xây dựng hệ thống bài tập và tổ chức triển khai thực hiện.

Kiểm tra, đánh giá và đúc rút các kinh nghiệm thu được từ thực tiễn giảng dạy, báo cáo chuyên môn ở tổ, tranh thủ các ý kiến đóng góp của tổ chuyên môn được tổ chuyên môn đánh giá cao từ đó bổ sung để có sở lý luận hoàn thiện và tổ chức triển khai áp dụng.

II. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

1. Cơ sở lý luận

Mục tiêu của giáo dục là phải lấy người học làm trung tâm, khơi dậy đam mê, hứng thú và khát vọng của học sinh. Phải đào tạo được những con người lao động tự chủ, sáng tạo, có năng lực giải quyết các vấn đề thường gặp.

Phải đổi mới phương pháp giáo dục, khắc phục lối truyền thụ một chiều, rèn luyện nếp tư duy sáng tạo của người học.

Trong các mục tiêu của bộ môn Toán, mục tiêu phát triển năng lực tư duy được đặt lên hàng đầu.

Để làm được những mục tiêu trên vai trò của người thầy, người cô là vô cùng quan trọng. Ở đó mỗi thầy cô phải không ngừng học hỏi để nâng cao trình độ chuyên môn, thực sự tận tụy và tâm huyết với học trò và không ngừng đổi mới phương pháp và tìm tòi các phương pháp mới, cách tiếp cận mới sao cho đơn giản, hiệu quả tạo tinh thần phấn khởi và hứng thú ở người học.

2. Thực trạng của vấn đề

Hình học nói chung và HHKG nói riêng đòi hỏi ở người học khả năng trừu tượng hóa, tư duy logic chặt chẽ ... chính vì vậy HHKG là một nội dung khó đối với các em học sinh lớp 11.

HHKG mà đặc biệt là các bài toán về tính khoảng cách là một vấn đề khó đối với học sinh, các bài toán thường đòi hỏi khả năng trừu tượng hóa, khả năng nhạy bén, tư duy chặt chẽ và khả năng tính toán chính xác. Vì vậy các bài toán về tính khoảng cách và các bài toán liên quan thường có mặt trong các kỳ thi đặc biệt là kỳ thi THPT Quốc Gia.

Là một nội dung khó và mới nên trong chương trình hình học lớp 11 có ba chương thì dành hai chương cuối cho nội dung này. Điều đó khẳng định vị trí của hình học không gian trong chương trình hình học. Tuy nhiên với lượng kiến

thức rất nhiều nên với khoảng thời gian trên nếu giáo viên không biết cách tổng hợp, khái quát bản chất của các dạng toán thì sẽ lan man gây ra hiện tượng " *rối kiến thức* " cho học sinh.

Thực tế đa số học sinh yếu kém và trung bình thường sợ các bài toán hình, đặc biệt là hình học không gian và đặc biệt nữa là các bài toán về tính khoảng cách.

Mặt khác không ít các thầy cô khi dạy về HHKG và đặc biệt là các bài toán về tính khoảng cách còn sử dụng phương pháp truyền thống tức là thuyết trình, giảng giải... mà ít quan tâm đến việc tìm tòi phương pháp mới ngắn gọn, dễ hiểu và mối quan hệ giữa các bài toán...

Trong quá trình giảng dạy, qua các tiết dự giờ, qua trao đổi chuyên môn tôi thấy rất ít các thầy cô vận dụng tính chất của tứ diện vuông vào giải các bài toán tính khoảng cách.

Rất nhiều bài toán về HHKG lớp 11 khi giải bằng phương pháp hình học tổng hợp thì tương đối phức tạp, gây nhiều khó khăn cho học sinh khi phải vẽ thêm đường và có nhiều phép toán phức tạp. Tuy nhiên khi vận dụng kết quả của tứ diện vuông thì lời giải của bài toán trở nên ngắn gọn, đẹp, tạo hứng thú cho học sinh và đặc biệt phù hợp với tinh thần đổi mới thi như hiện nay. Đặc biệt bài toán tính khoảng cách trong các đề thi trung học phổ thông quốc gia nếu áp dụng kết quả của tứ diện vuông sẽ rất đơn giản và dễ hiểu cho học sinh.

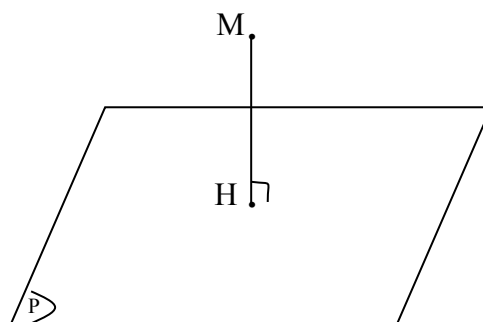
3. Giải pháp tổ chức thực hiện

3.1 Tóm tắt các kiến thức cơ bản

a) Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

- Trong không gian cho mặt phẳng (P) và một điểm M , gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P) . Khi đó khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là độ dài đoạn MH [1].

- Ký hiệu: $d(M, (P)) = MH$

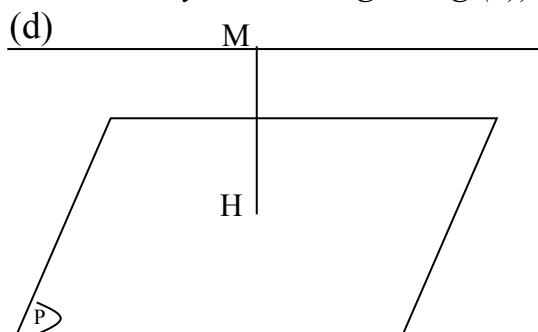


b) Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

- Trong không gian cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) song song với nhau. Khi đó khoảng cách giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên đường thẳng (d) đến mặt phẳng (P) [1].

- Ký hiệu: $d((d), (P)) = d(M, (P))$

(trong đó M là điểm bất kỳ trên đường thẳng (d))



c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

- Trong không gian cho hai đường thẳng chéo nhau (d_1) và (d_2) . Gọi AB là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng trên. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau (d_1) và (d_2) là độ dài đoạn AB .

Ký hiệu: $d((d_1), (d_2)) = AB$ [1].

- Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ta có nhiều cách nhưng các cách được dùng nhiều hơn cả là:

+) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung (dùng định nghĩa);

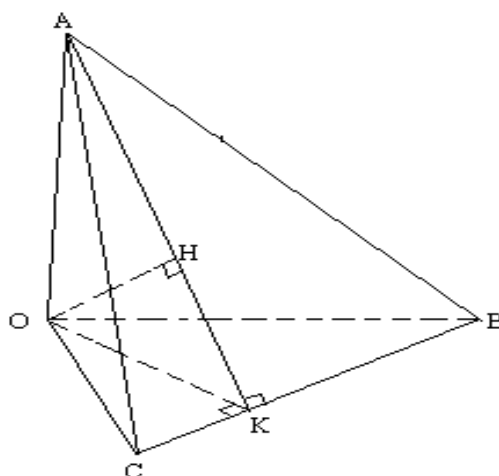
+) Gọi mặt phẳng (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng (d_2) và song song với đường thẳng (d_1) . Khi đó: $d((d_1), (d_2)) = d((d_1), (P)) = d(M, (P))$ với M là điểm bất kỳ trên đường thẳng (d_1) [1].

+) Gọi mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) là hai mặt phẳng song song với nhau lần lượt chứa đường thẳng (d_1) và đường thẳng (d_2) . Khi đó: $d((d_1), (d_2)) = d((P), (Q)) = d(M, (Q))$ với M là điểm bất kỳ trên mặt phẳng (P) [1].

d) Tứ diện vuông: Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB và OC đôi một vuông góc với nhau tại O (tứ diện $OABC$ như trên được gọi là tứ diện vuông đỉnh O). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC) , khi đó:

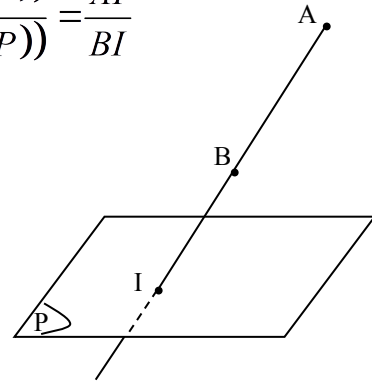
a) $d(O, (ABC)) = OH$ (*)

b) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ (2*) [1]



e) Tính chất: Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B. Nếu I là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P). Khi đó: $\frac{d(A, (P))}{d(B, (P))} = \frac{AI}{BI}$

Hay: $d(A, (P)) = \frac{AI}{BI} d(B, (P)) \quad (3^*)$



3.2 Các ví dụ mở đầu

Ví dụ 1 (Trích đề thi khối A và khối A1 năm 2014).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SD = \frac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm của cạnh AB. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) [2].

Cách giải 1 (cách giải thông thường)

- Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$. Do đó $SH \perp HD$.

- Ta có

$$SH = \sqrt{SD^2 - (HA^2 + AD^2)} = a.$$

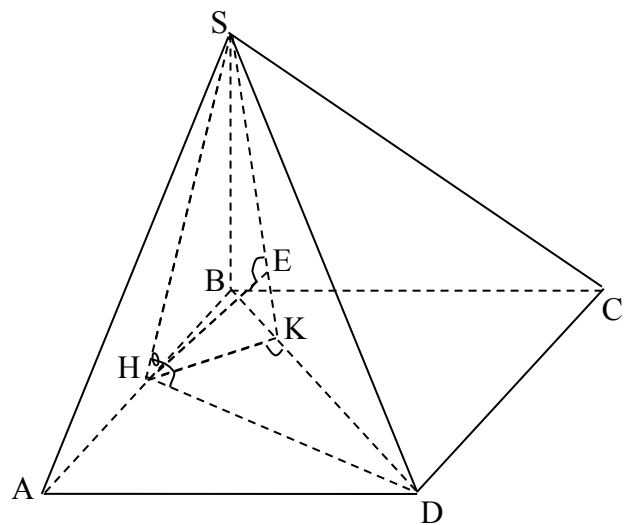
- Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên BD và E là hình chiếu vuông góc của H lên SK.

- Ta có $BD \perp HK$ và $BD \perp SH$, nên $BD \perp (SHK)$.

- Suy ra $BD \perp HE$ mà $HE \perp SK$, do đó: $HE \perp (SBD)$.

- Ta có $HK = HB \cdot \sin \angle KBH = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, suy ra $HE = \frac{HS \cdot HK}{\sqrt{HS^2 + HK^2}} = \frac{a}{3}$

- Do đó: $d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD)) = 2HE = \frac{2a}{3}$ [2].



Cách giải 2 (Áp dụng tính chất của tứ diện vuông)

- Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$. Do đó $SH \perp HD$, Khi đó: $SH = \sqrt{SD^2 - (HA^2 + AD^2)} = a$.

- Gọi O là trung điểm của BD, khi đó O là tâm của hình vuông ABCD. Suy ra HB, HO, HS đôi một vuông góc tại H nên tứ diện HSBO là tứ diện vuông

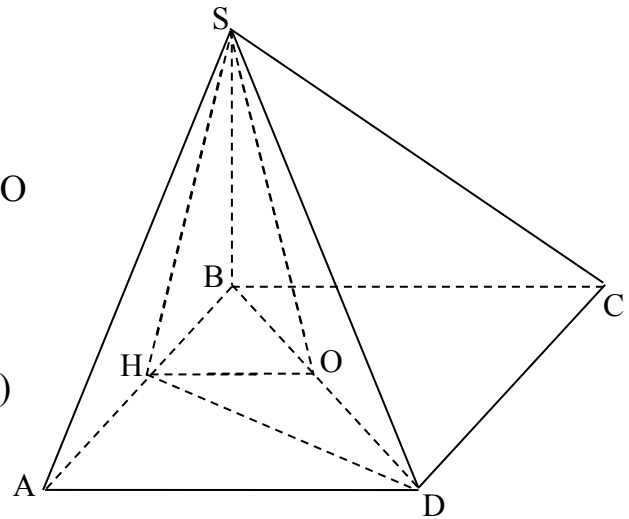
đỉnh H và $HB = HO = \frac{a}{2}$.

- Mà $d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD)) = 2d$

- Mặt khác trong tứ diện HSBO vuông tại H, ta có:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HO^2} = \frac{9}{a^2} \Rightarrow d = \frac{a}{3}$$

- KL: $d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD)) = 2d = \frac{2a}{3}$.



Ví dụ 2 (Trích đề thi THPT Quốc Gia năm 2015).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 45° . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC [2].

Cách giải 1 (cách giải thông thường)

- Ta có: $\angle SCA = \angle SC, (ABCD) = 45^\circ$

Suy ra $SA = AC = a\sqrt{2}$.

- Kẻ đường thẳng (d) qua B và song song với AC. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên (d); H là hình chiếu vuông góc của A trên SM.

- Ta có: $MB \perp SA$, $MB \perp MA$ nên $MB \perp (SAM)$ do đó $MB \perp AH$.

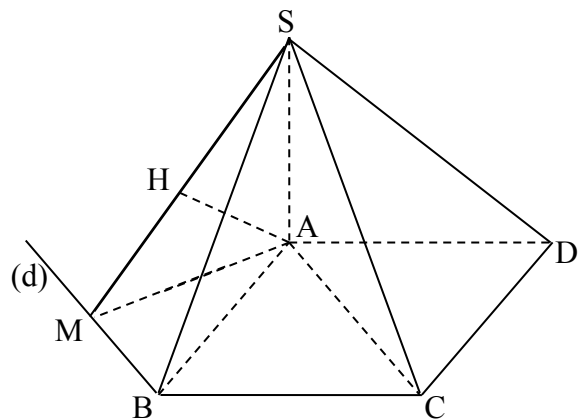
- Mặt khác $AH \perp SM$ nên $AH \perp (SMB)$.

- Do $AC \parallel BM$ nên $AC \parallel (SBM)$ do đó: $d(AC, SB) = d(AC, (SBM)) = AH$

- Tam giác SAM vuông tại A, có đường cao AH, nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$$

- KL: $d(AC, SB) = d(AC, (SBM)) = AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$ [2]



Cách giải 2 (Áp dụng tính chất của tứ diện vuông)

- Ta có: $\angle SCA = \angle SC, (ABCD) = 45^\circ$. Suy ra $SA = AC = a\sqrt{2}$.

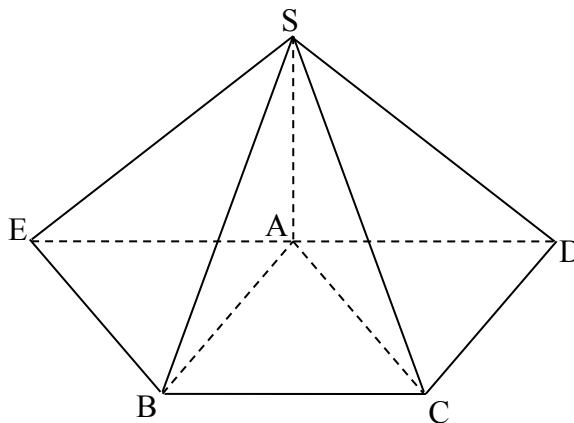
- Gọi E là điểm đối xứng với D qua A, khi đó $AC \parallel BE$ nên $AC \parallel (SBE)$.

- Khi đó: $d(AC, SB) = d(AC, (SBE)) = d(A, (SBE)) = d$

- Do tứ diện ASBE là tứ diện vuông đỉnh A nên:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{10}}{5}$$

- KL: $d(AC, SB) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$



Nhận xét: Vậy qua hai ví dụ đại diện cho hai dạng bài và mỗi bài hai cách giải khác nhau như trên ta thấy được

1⁰) Đối với các em học sinh có học lực trung bình và yếu thì cách giải 1 có một số khó khăn sau:

- Dựng thêm nhiều đường phụ và chứng minh đường vuông góc với mặt để khẳng định khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Thao tác này rất tốt đối với các em học sinh khá giỏi nhưng đối với đa số học sinh thuộc diện trung bình và yếu đặc biệt là các em học sinh trường THPT Triệu Sơn 6 nơi tôi công tác thì thao tác trên gây rất nhiều khó khăn.

- Tính toán quá nhiều bước, nhiều thao tác và chính từ nhiều thao tác tư duy, học sinh dễ nhầm lẫn, khó tiếp thu...và gặp nhiều khó khăn khi giải các bài tương tự.

- Từ những khó khăn ban đầu đó mà nhiều em đã vấp ngã ngay từ những thao tác đầu tiên.

2⁰) Đối với cách giải 2 có hai bước rõ rệt đó là: **Xác định và tạo một tứ diện vuông** (thông thường đỉnh của tứ diện vuông là hình chiếu của đỉnh lên mặt đáy hoặc đỉnh góc vuông...) và **chuyển khoảng cách cần tính về khoảng cách từ đỉnh của tứ diện vuông tới mặt đối diện**.

3⁰) Ta có thể áp dụng cách giải 2 cho nhiều bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng hoặc khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. **Tư duy mạch lạc, hình vẽ đơn giản, kết quả quen thuộc dễ nhớ và dễ vận dụng và đặc biệt hiệu quả với hình thức thi trắc nghiệm** đó là những điểm mạnh của cách giải 2 mà ta sẽ áp dụng trong SKKN này.

Do khuôn khổ của SKKN nên tôi chỉ lựa chọn hai bài toán khoảng cách tiêu biểu cho phương pháp trên và trong mỗi bài toán tôi không nêu hai cách giải như trên để so sánh mà ở mỗi dạng bài toán tôi xây dựng hệ thống ví dụ từ đơn giản đến phức tạp để học sinh tự khám phá, phát hiện ra phương pháp giải nhằm phát triển năng lực tư duy cho học sinh.

3.3 Các bài toán về tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

- Bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng là bài toán rất quan trọng trong các bài toán tính khoảng cách, vì nếu các em hiểu và vận

dụng được cũng như làm tốt bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng sẽ là cơ sở để làm tốt các bài toán tính khoảng cách khác.

- Các ví dụ minh họa sau đây được xây dựng tăng dần về mức độ và đặc trưng cho các loại hình thường gặp (tuy nhiên để thuận tiện cho quá trình tiếp thu các ví dụ đi tuần tự từ hình chóp đến lăng trụ) với mục đích để các em tự nhận thấy và phát hiện ra đỉnh của tứ diện vuông, từ đó có thể áp dụng kết quả của tứ diện vuông vào để tính.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a , $\angle BAD = 60^\circ$, SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SO = \frac{3a}{4}$. Tính theo a

a) $d(O, (SBC))$;

b) $d(A, (SBC))$.

GV: 1^0 Trong bài toán trên điểm O có gì đặc biệt? Tứ diện OBCS là tứ diện gì, vì sao?

2^0 Để tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) ta cần tính những yếu tố nào?

3^0 Tính các khoảng cách trên bằng cách áp dụng kết quả của tứ diện vuông.

a) - Theo bài ra ta có tam giác ABD là tam giác đều cạnh a nên:

$$OB = \frac{BD}{2} = \frac{a}{2} \text{ và } OC = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

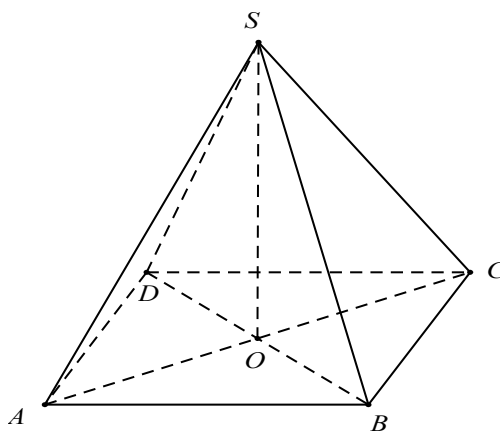
- Do tứ diện OSBC vuông tại O, đặt: $d(O, (SBC)) = d$. Khi đó:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{64}{9a^2} \Rightarrow d = \frac{3a}{8}$$

$$\text{- KL: } d(O, (SBC)) = \frac{3a}{8}$$

b) Ta có:

$$d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC)) = \frac{3a}{4}$$



GV: Ta thấy điểm O trong ví dụ trên là một điểm rất " **đặc biệt**" mà các điểm khác không có được. Điểm O là đỉnh của rất nhiều tứ diện vuông, vì vậy việc tính khoảng cách từ điểm O đến các mặt bên không quá khó khăn. Do đó để tính khoảng cách từ một điểm tùy ý đến một mặt trong bài toán trên ta thường chuyển về khoảng cách từ điểm O mà điểm A trong bài toán trên là một ví dụ.

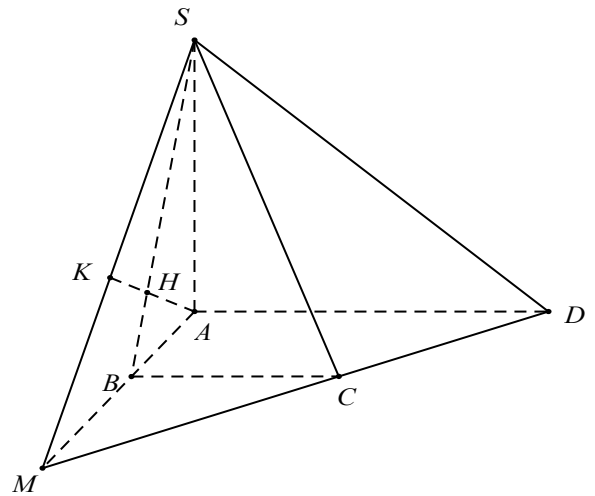
Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, có $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy (ABCD). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính theo a

- a) $d(A, (SBD))$ b) $d(A, (SCD))$ c) $d(H, (SCD))$ [3]

GV: *1⁰) Trên hình vẽ dưới đây từ điểm nào ta có thể dựng được các tứ diện vuông một cách đơn giản nhất.*

2⁰) Giải bài toán trên bằng cách áp dụng kết quả của tứ diện vuông.

a) - Xét tứ diện vuông ASBD đỉnh A, ta đặt: $d(A, (SBD)) = d$. Khi đó:



$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{7}{4a^2} \Rightarrow d = \frac{2a}{\sqrt{7}}$$

- Suy ra: $d(A, (SBD)) = \frac{2a\sqrt{7}}{7}$.

b)- Gọi M là giao điểm của AB với CD. Khi đó tứ diện ASDM là tứ diện vuông đỉnh A, ta đặt: $d(A, (SCD)) = d$. Khi đó:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow d = a$$

- Suy ra: $d(A, (SCD)) = a$

c)- Gọi K là giao điểm của AH với SM, mà B là trung điểm của AM. Mặt khác: $\frac{BH}{BS} = \frac{BH \cdot BS}{BS^2} = \frac{BA^2}{BS^2} = \frac{1}{3}$. Suy ra H là trọng tâm của tam giác SAM.

- Mà: $\frac{d(H, (SCD))}{d(A, (SCD))} = \frac{HK}{AK} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(H, (SCD)) = \frac{1}{3} d(A, (SCD)) = \frac{a}{3}$

$$\text{- KL: } d(H, (SCD)) = \frac{a}{3}$$

GV: 1) Trong bài toán trên ta thấy điểm A có một vị trí quan trọng trong các bài toán tính khoảng cách.

2) Nhiều bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt nào đó ta thường đưa về tính khoảng cách từ điểm A đến mặt đó.

3) Tương tự học sinh tự lấy một điểm và áp dụng tính khoảng cách...

4) Qua hai ví dụ trên điểm H trong ví dụ 1 và điểm A trong ví dụ 2 đều là hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt đáy và hai điểm H và A khá "lộ". Trong các ví dụ tiếp theo ta sẽ thấy các điểm "đặc biệt" đó sẽ được "dấu kín" hơn. Để rõ hơn điều đó ta nghiên tiếp ví dụ sau.

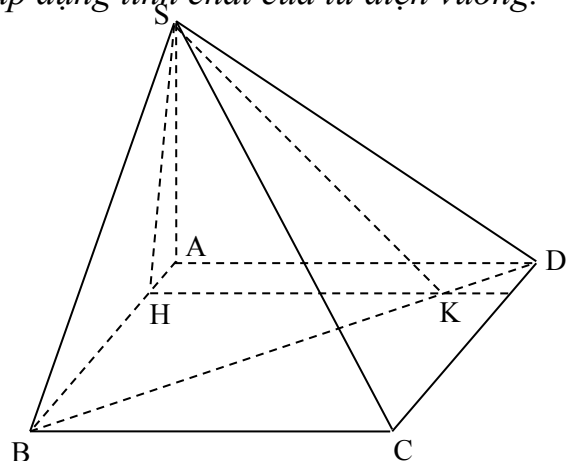
Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, tam giác SAB là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy (ABCD). Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) theo a, biết SA = a.

GV: 1) Đỉnh nào ta có thể dễ xây dựng được các tứ diện vuông?

2) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau cho ta điều gì?

3) Giải bài toán bằng phương pháp áp dụng tính chất của tứ diện vuông.

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên cạnh AB. Do mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy (ABCD) nên SH với mặt phẳng (ABCD).



- Ta có: $HA = \frac{a}{2}, HB = \frac{3a}{2}, HS = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HK = \frac{3a}{2}$

$$\text{Mà } d(A, (SBD)) = \frac{AB}{HB} d(H, (SBD)) = \frac{4}{3} d(H, (SBD)) = \frac{4}{3} d$$

Mặt khác $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{20}{9a^2} \Rightarrow d = \frac{3a}{2\sqrt{5}}$

- Suy ra: $d(A, (SBD)) = \frac{4}{3}d(H, (SBD)) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

GV: Qua các ví dụ trên cho phép ta "**nghĩ tới**" đỉnh của tứ diện vuông "**hầu như**" là hình chiếu của đỉnh S trên mặt đáy. Trong các ví dụ trên vị trí hình chiếu đã thay đổi từ một đỉnh đến một điểm trên một cạnh và tiếp theo sẽ là một điểm tùy trên mặt đáy. Để rõ hơn ta nghiên cứu tiếp ví dụ sau.

Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có $SA = SB = SD$, đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và tam giác SAC vuông tại S. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) [3].

GV: *I⁰) Từ giả thiết $SA = SB = SD$ cho ta điều gì? Hình chiếu của đỉnh S lên mặt đáy $(ABCD)$ nằm ở đâu?*

2^o) *Dựng tứ diện vuông như thế nào? Áp dụng tính chất của tứ diện vuông để tính khoảng cách.*

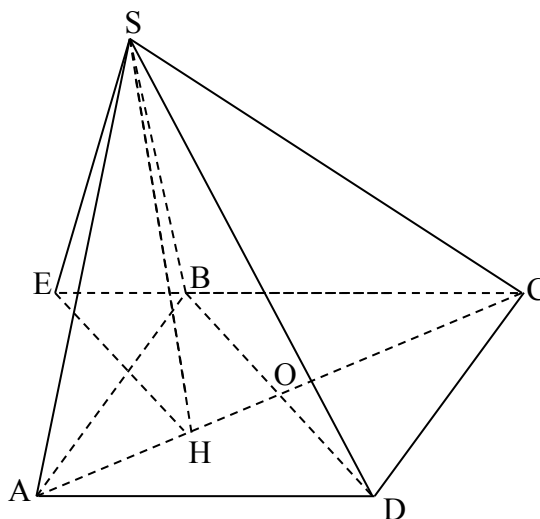
- Do $SA = SB = SD$ nên hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABD. Mà tam giác ABD là tam giác đều nên H là trọng tâm của tam giác ABD.

- Tam giác ABD đều cạnh a nên

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}, HC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

- Mà tam giác SAC vuông tại S nên

$$\text{ta có: } SH = \sqrt{HA \cdot HC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



- Từ H dựng đường thẳng song song với BD, cắt BC tại E. Khi đó tứ diện HSCE là tứ diện vuông đỉnh H và $HC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, $SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $HE = \frac{2a}{3}$

- Mà: $d(A, (SBC)) = \frac{3}{2}d(H, (SBC)) = \frac{3}{2}d$

Mặt khác ta có: $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{9}{2a^2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

Do đó: $d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

GV: 1^0) Qua ví dụ trên một lần nữa khẳng định vị trí quan trọng của hình chiếu vuông góc của đỉnh lên mặt đáy và vị trí của hình chiếu hầu hết phản ánh độ khó của bài toán chính vì vậy vị trí hình chiếu đã lần lượt từ các vị trí rất quen thuộc đến các vị trí bất kỳ.

2^0) Cũng qua đó ta có được một số kinh nghiệm dựng tứ diện vuông và áp dụng tính chất của tứ diện vuông để đơn giản bài toán tính khoảng cách.

3^0) Tương tự như trên các em có thể tự ra đề và kiểm nghiệm. Chẳng hạn, tính $d(D, (SBC))$ hay $d(O, (SBC))$... yêu cầu các em tính khoảng của các điểm còn lại.

4^0) Phát triển bài toán qua các bài toán liên quan đến lăng trụ. Vậy cách xây dựng tứ diện vuông trong hình lăng trụ sẽ như thế nào? Đỉnh của tứ diện vuông nằm ở đâu? Chúng ta nghiên cứu qua ví dụ sau.

Ví dụ 5 (Khối B năm 2014). Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB, góc giữa đường thẳng A'C và mặt đáy bằng 60^0 . Tính theo a khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACC'A') [2].

GV: 1^0) Điểm nào sẽ là đỉnh của tứ diện vuông định xây dựng?

2^0) Vận dụng tính chất của tứ diện vuông để tính $d(B, (ACC'A'))$

- Gọi H là trung điểm của cạnh AB, suy ra $A'H \perp (ABC)$ và $\angle A'CH = 60^0$. Do

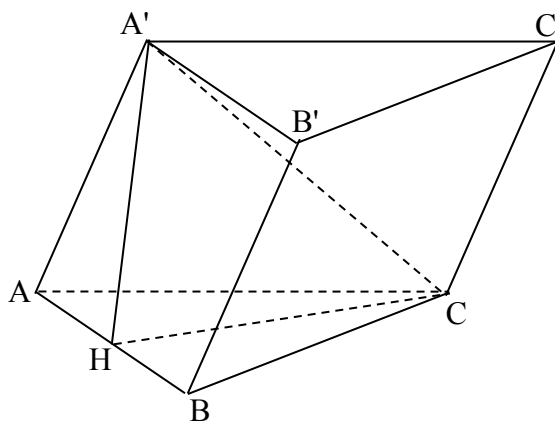
đó: $A'H = CH \cdot \tan \angle A'CH = \frac{3a}{2}$.

- Do tam giác ABC đều cạnh a nên

$HA = \frac{a}{2}$, $HC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

- Ta có:

$d(B, (AA'C'C)) = 2d(H, (A'AC)) = 2d$



- Mà trong tứ diện vuông HAC'A' đỉnh H ta có:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HA'^2} \Rightarrow d = \frac{3a\sqrt{13}}{26}$$

- Do đó: $d(B, (AA'C'C)) = 2d(H, (A'AC)) = 2d = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$.

GV: Nâng tầm bài toán khi thay đổi vị trí hình chiếu trên mặt đáy. Ta nghiên cứu tiếp một ví dụ mà vị trí hình chiếu là một điểm nằm trong mặt đáy, khi đó tứ diện vuông sẽ dựng như thế nào?

Ví dụ 6 (trích đề thi HSG Tỉnh Bắc Giang 2015).

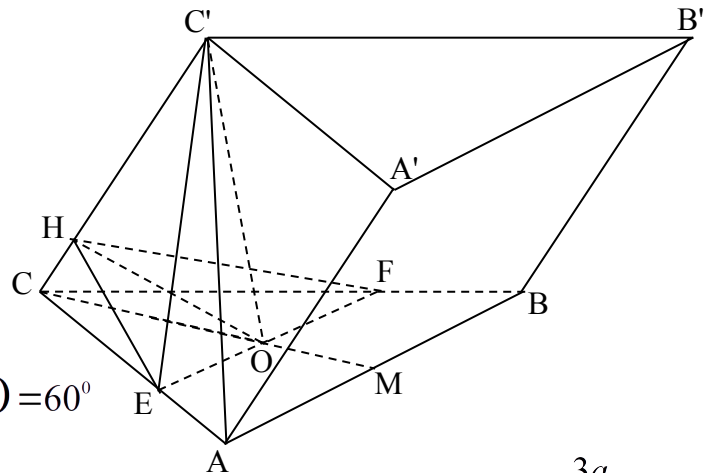
Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều tâm O . Hình chiếu vuông góc của đỉnh C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với O . Biết khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng CC' bằng a , góc giữa hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BCC'B')$ bằng 60° . Tính theo a khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(ACC'A')$ [4].

GV: 1^o) Áp dụng tính chất của tứ diện vuông vào tính khoảng cách.

2^o) Tứ diện vuông cần xây dựng có đỉnh là điểm nào?

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên CC' . Khi đó $OH = a$.

- Qua O dựng đường thẳng song song với AB cắt AC và CB lần lượt tại E và F . Khi đó:



$$(\overline{ACC'A'}, (\overline{BCC'B'})) = (\overline{HE}, \overline{HF}) = 60^\circ$$

Suy ra: $\angle EHF = 120^\circ$, do đó: $OE = a\sqrt{3}$, $OC = 3a$ mà $OH = a$ nên $OC' = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$

- Ta có: $d(B', (ACC'A')) = d(B, (ACC'A')) = 3d(O, (A'AC)) = 3d$

- Trong tứ diện vuông $OC'CE$ đỉnh O ta có:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{OC'^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OE^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{KL: } d(B', (ACC'A')) = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$$

GV: Qua các ví dụ trên ta thấy được sự đơn giản của hình vẽ, tính gọn nhẹ trong biểu thức tính toán khi vận dụng tính chất của tứ diện vuông vào một số

bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Bên cạnh đó một số kinh nghiệm dựng tứ diện vuông là nét nổi bật trong các lời giải trên.

3.4 Các bài toán về tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Các bài toán về tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là các bài toán thường gặp trong các đề thi và "thông thường" ta chuyển khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về bài toán khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng (trong khuôn khổ của SKKN ta chỉ quan tâm đến lớp bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau thông qua khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng). Chính vì vậy bài toán khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau có thể coi là bài toán khoảng cách từ một điểm đến một mặt ở mức độ cao hơn.

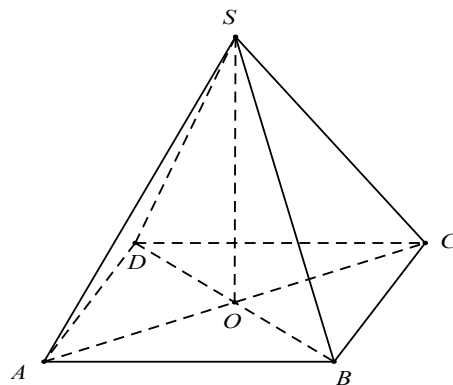
Để nhẹ nhàng cho quá trình tiếp cận một số ví dụ sau được khai thác từ các ví dụ ở phần trước đó.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a , $\angle BAD = 60^\circ$, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC .

GV: 1^0) Dựng mặt phẳng chứa cạnh SC và song song với cạnh AD . Chuyển bài toán về khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

2^0) Áp dụng kết quả tứ diện vuông để tính.

- Do $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (SBC)$.
- Khi đó: $d(AD, SC) = d(AD, (SBC))$
 $= d(A, (SBC))$
 $= 2d(O, (SBC)) = \frac{3a}{4}$



GV: 1^0) Đây là một ví dụ nhỏ để chỉ rõ việc chuyển khoảng cách giữa hai đường chéo nhau về khoảng cách từ một điểm đến một mặt mà ta sẽ áp dụng cho các bài toán sau. Áp dụng cách làm trên cho các cặp cạnh còn lại, yêu cầu học sinh tập ra đề và tính.

2^0) Tương tự vị trí của hình chiếu có vai trò rất quan trọng và mức độ khó dễ của một bài toán phụ thuộc khá lớn vào vị trí của hình chiếu. Để hiểu thêm các em làm ví dụ sau.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = SB = SD$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $\angle BAD = 60^\circ$ và tam giác SAC vuông tại S . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC [3].

GV: *Dựng mặt phẳng chứa cạnh SC và song song với cạnh AD. Tương tự chuyển về bài toán quen thuộc và giải*

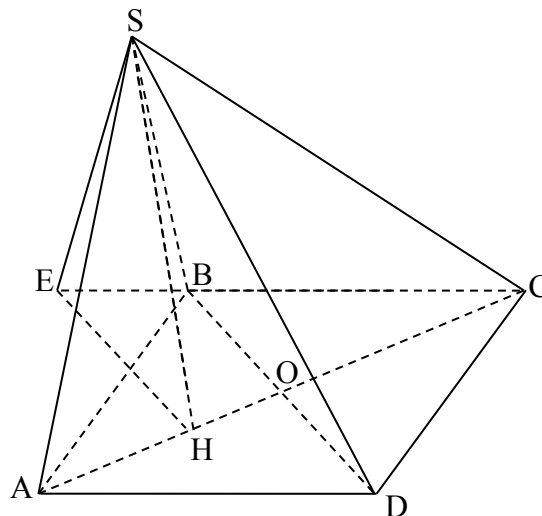
- Do $SA = SB = SD$ nên hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với tâm của tam giác ABD. Mà tam giác ABD là tam giác đều nên H là trọng tâm của tam giác ABD.

- Tam giác ABD đều cạnh a nên

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}, HC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

- Mà tam giác SAC vuông tại S nên

ta có: $SH = \sqrt{HA \cdot HC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$



- Do $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (SBC)$, do đó:

$$d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = \frac{3}{2} d(H, (SBC)) = \frac{3}{2} d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

(đã tính ở ví dụ 4 phần khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng)

GV: *1⁰) Qua hai ví dụ trên ta thấy được mối liên hệ mật thiết giữa hai bài toán khoảng cách và vị trí của hình chiếu của đỉnh lên mặt đáy đối với hình chóp.*

2⁰) Vấn đề còn lại là đối với lăng trụ thì điểm "đặc biệt" là điểm nào chúng ta quan tâm đến các ví dụ sau

Ví dụ 3. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Tính $d(AC, DC')$ theo a.

GV: *Nói tới hình lập phương có nhiều điểm thuận lợi, bởi vì ở đó rất dễ để ta xác định một tứ diện vuông phù hợp. Vậy tứ diện vuông đó là tứ diện nào?*

- Do $AC \parallel (DA'C')$ nên $d(AC, DC') = d(AC, (DA'C'))$

$$= d(A, (DA'C')) = d(D', (DA'C')) = d$$

- Mặt khác trong tứ diện vuông D'A'C'D đỉnh D' ta có:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{D'D^2} + \frac{1}{D'A'^2} + \frac{1}{D'C'^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow d = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

- Do đó: $d(AC, DC') = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 4. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = BC = a$ và cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính $d(AM, B'C)$ theo a [3].

GV: Do lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng và đáy là tam giác vuông tại B nên đỉnh nào có thể là đỉnh của một tứ diện vuông?

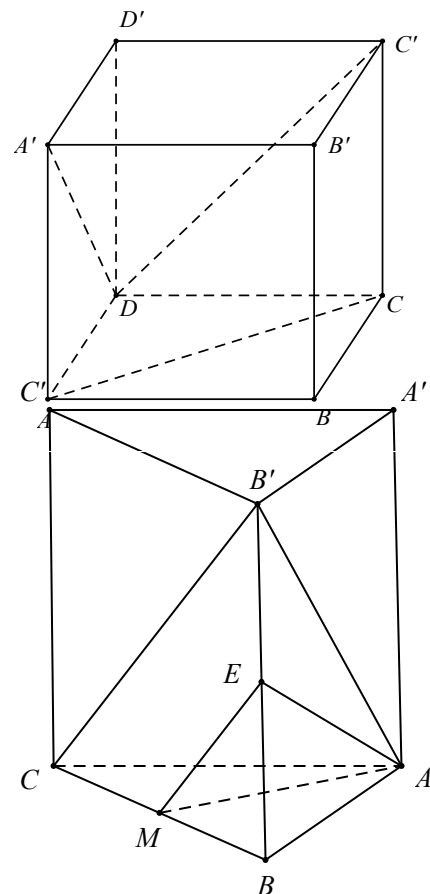
- Gọi E là trung điểm của cạnh BB' thì $B'C // (AME)$. Do đó:

$$d(AM, B'C) = d(B'C, (AME)) = d(B', (AME)) \\ = d(B, (AME)) = d$$

- Vì tứ diện $BAME$ là tứ diện vuông đỉnh B nên ta có:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow d = \frac{a}{\sqrt{7}}$$

- Suy ra: $d(B, (AME)) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$. Vậy: $d(AM, B'C) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$

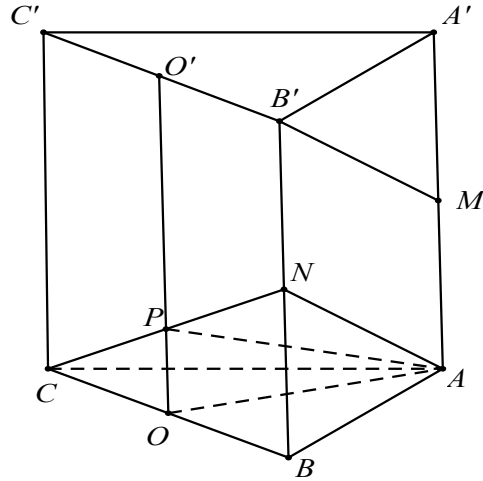


GV: 1^0 Qua các ví dụ trên để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ta thực hiện theo các bước sau: Đặt một mặt phẳng chứa đường này và song song với đường còn lại; chuyển về khoảng cách từ một điểm đến một mặt; dựng một tứ diện vuông và áp dụng tính chất để tính.

2^0 Các ví dụ sau sẽ phát triển theo hai hướng: Vị trí của đỉnh tứ diện vuông và cách dựng mặt phẳng chứa đường này song song với đường còn lại.

Ví dụ 5. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB' . Tính $d(B'M, CN)$ theo a [5].

GV: Lăng trụ đã cho là lăng trụ đều nên nó là lăng trụ đứng và đáy là đa giác đều. Do đó cạnh bên vuông góc với mặt đáy, tuy nhiên đáy là tam giác đều nên các đỉnh của đáy không thể là đỉnh của tứ diện vuông. Vậy đỉnh của tứ diện vuông là đỉnh nào?



- Gọi O và O' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và B'C' và P là giao điểm của OO' với CN. Do $B'M // (CAN)$ nên:

$$d(B'M, CN) = d(B'M, (CAN)) = d(B', (CAN)) = d(B, (CAN)) \\ = 2d(O, (CAN)) = 2d(O, (CAP)) = 2d$$

- Tứ diện OACP là tứ diện vuông tại O nên ta có:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OP^2} = \frac{64}{3a^2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{3}}{8}$$

- Vậy: $d(O, (CAP)) = \frac{a\sqrt{3}}{8}$.

Do đó: $d(B'M, CN) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 6. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của cạnh DD'. Tính $d(K, A'D)$ [6].

GV: 1^o) *Dựng mặt phẳng chứa A'D và song song với KC.*

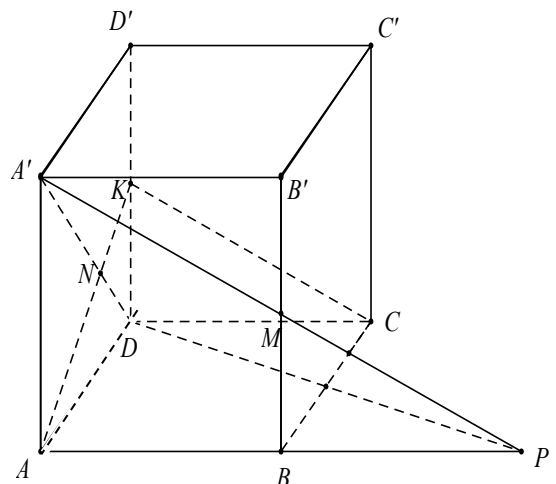
2^o) *Xác định tứ diện vuông và áp dụng tính chất để tính.*

- Gọi M là trung điểm của cạnh BB', ta có $A'M // KC$ nên :

$$d(K, A'D) = d(K, (A'MD)) \\ = d(M, (A'MD))$$

- Gọi N là giao điểm của AK với A'D và P là giao điểm của AB với A'M.

Khi đó: $\frac{d(K, (A'MD))}{d(A, (A'MD))} = \frac{NK}{NA} = \frac{1}{2}$



$$\text{Suy ra: } d(CK, A'D) = \frac{1}{2}d(A, (A'MD)) = \frac{1}{2}d(A, (A'DP))$$

- Tứ diện AA'DP là tứ diện vuông đỉnh A nên ta có:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AP^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow d = \frac{2a}{3}$$

$$\text{- Suy ra: } d(A, (A'DP)) = \frac{2a}{3}.$$

$$\text{Vậy: } d(CK, A'D) = \frac{a}{3}$$

3.5 Một số bài tập chọn lọc

Bài 1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BC = a$, $AB = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh AC, tam giác SBM là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính theo a các khoảng cách

a) $d(A, (SBC))$

b) $d(C, (SAB))$

ĐS: a) $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$ b) $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$ [7]

Bài 2. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết $AA' = 1$, $BC = 2$, $AB = \sqrt{3}$ và M là trung điểm của cạnh CC'. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (A'BM).

ĐS: $\frac{2\sqrt{57}}{19}$ [7]

Bài 3. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C', có đáy ABC là tam giác vuông cân ở B và $AB = a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB và diện tích mặt bên ABB'A' bằng $3a^2$. Tính theo a khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACB').

ĐS: $\frac{2a}{3}$ [8]

Bài 4. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh B lên mặt phẳng (A'B'C'D') là trung điểm H của cạnh A'B'. Tính theo a khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (A'BC), biết đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng (A'B'C'D') một góc 45° .

ĐS: $\frac{a\sqrt{30}}{6}$ [8]

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $SA = a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BC.

ĐS: $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$ [8]

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$.

- a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính $d(SM, BN)$ theo a.
b) Gọi G là trọng tâm tam giác SAB. Tính $d(G, (SBD))$ theo a.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad \text{a) } \frac{a\sqrt{22}}{11} \quad \text{b) } \frac{a\sqrt{10}}{15} \quad [8]$$

Bài 7. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$. Góc giữa đường thẳng A'B và mặt phẳng (ABC) bằng 30° . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A'B và B'C', biết góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 45° .

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad \frac{a\sqrt{6}}{6} \quad [7]$$

Bài 8. Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình chữ nhật và $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ADD'A') và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B'D' và A'D theo a.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad [7]$$

4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường

Qua thực tế giảng dạy đối với học sinh lớp 11 và 12 tại trường THPT Triệu Sơn 6, bản thân tôi đã áp dụng trực tiếp đề tài này cho lớp 11C4 đã đạt được hiệu quả rất khả quan: Các em đã nhận biết được thế nào là tứ diện vuông, nắm được tính chất cơ bản của nó, biết vận dụng được tính chất cơ bản đó vào tư duy để tìm cách giải cho các bài toán khoảng cách đặc biệt là khả năng xác định đỉnh của tứ diện vuông và cách dựng tứ diện vuông. Hơn thế qua theo dõi các tiết học tôi thấy các em tự tin hơn, phấn khởi hơn và hứng thú hơn từ đó các em đã thích các tiết học hình hơn trước. Đó là những kết quả bước đầu rất khả quan của SKKN.

Đặc biệt trong năm học 2016 - 2017 qua các bài kiểm tra mà cụ thể là bài kiểm tra học kỳ 2 vừa rồi đề do tổ ra và tổ chức chấm một cách khách quan thì kết quả môn Toán của lớp 11C4 đã có những kết quả tiến bộ rõ rệt. Đặc biệt các ý tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau đa số học sinh của lớp đã làm được, mặc dù đây là ý phân loại học sinh và số lượng học sinh trong trường làm được là không nhiều.

Đề tài được báo cáo dạng chuyên đề trong sinh hoạt chuyên môn của tổ Toán trường THPT Triệu Sơn 6 và được các thầy cô góp ý cũng như đánh giá cao. Đề tài được dùng làm tài liệu chuyên môn của tổ và áp dụng vào giảng dạy

giảng dạy cho các em học sinh lớp 11 trong trường cũng như ôn thi THPT Quốc Gia cho các em học sinh khối 12 bắt đầu từ năm học 2017 - 2018.

So sánh giữa các lớp và giữa các học sinh có áp dụng và không áp dụng đề tài để đánh giá hiệu quả của SKKN. Tôi đã chọn hai lớp 11 là 11C4 là lớp thực nghiệm và lớp 11C3 làm lớp đối chứng cùng giảng dạy về bài toán khoảng cách. Sau thời gian ba buổi dạy bồi dưỡng, tôi tổ chức kiểm tra đánh cả hai lớp với thời lượng 30 phút với nội dung như sau:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$; đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$ và $AD = 2a$. Tính theo a

1) Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) ;

2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC .

Lớp	Số học sinh làm bài kiểm tra	Khá giỏi		Trung bình		Yếu kém	
		SL	TL%	SL	TL%	SL	TL%
11C3	42	6	14,28	20	47,63	16	38,09
11C4	42	17	40,48	19	45,24	6	14,28

+) Qua bảng kết quả trên ta thấy việc áp dụng đề tài SKKN đã đem lại kết quả rõ rệt.

+) Qua theo dõi tinh thần học tập trên lớp tôi thấy không khí học tập của lớp 11C4 sôi nổi, tích cực hơn, các em phấn khởi và rất hứng thú học. Học sinh dễ tiếp thu và dễ vận dụng từ đó tự tin hơn, qua chấm bài tôi thấy việc trình bày bài của học sinh lớp 11C4 mạch lạc hơn và rõ ràng hơn.

Như vậy "Vận dụng tính chất của tứ diện vuông để giải lớp các bài toán tính khoảng cách trong hình học không gian 11" đã mang lại hiệu quả cao hơn các phương pháp thông thường.

III. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Kết luận

Qua quá trình áp dụng vào thực tế giảng dạy tại trường THPT Triệu Sơn 6 từ năm học 2016 - 2017, bản thân tôi nhận thấy bước đầu có những kết quả khả quan thể hiện ở hiệu quả giúp học sinh giải quyết được đa số các bài toán về tính khoảng cách. Tạo sự tự tin cho các em trong khi học và giải toán.

Đề tài được tổ chuyên môn đánh giá cao và định hướng áp dụng giảng dạy cho học sinh khối 11 và ôn tập lại cho các em học sinh chuẩn bị tham dự kỳ thi THPT Quốc Gia 2017 và các năm tiếp theo.

Trong phạm vi một SKKN nên tôi mới chỉ quan tâm đến lớp các bài toán tính khoảng cách và hướng xây dựng các ví dụ mang tính chất gợi mở, phân hóa theo trình tự từ dễ đến khó, từ đơn lẻ đến tổng quát, từ đơn giản đến phức tạp tạo điều kiện phát triển năng lực tư duy, khả năng sáng tạo và phù hợp với nhiều đối

tượng học sinh. Tôi thiết nghĩ với cách xây dựng và thực hiện như trên ta có thể mở rộng sang các bài toán khác như bài toán tính góc, bài toán tính thể tích... Đó là các hướng tiếp theo mà tôi sẽ nghiên cứu trong thời gian tới.

Trên đây là kinh nghiệm thực tế qua quá trình giảng dạy nhiều năm tôi rút ra cho bản thân và bước đầu được áp dụng có kết quả khả quan. Do kinh nghiệm chưa nhiều nên đề tài không tránh được những hạn chế, tôi tiếp tục bổ sung và hoàn thiện dần trong những năm học tới, rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của quý vị và các bạn đồng nghiệp để đề tài đi vào thực tiễn được áp dụng nhiều hơn và đạt hiệu quả cao hơn trong giảng dạy.

2. Kiến nghị

a) Đối với sở GD&ĐT Thanh Hóa

Cần hỗ trợ và tạo điều kiện hơn nữa về cơ sở vật chất, tài liệu nghiên cứu và thời gian làm việc... để các thầy giáo, cô giáo yên tâm công tác có điều kiện trau dồi chuyên môn nghiệp vụ, nâng cao trình độ từ đó góp phần đổi mới phương pháp nâng cao chất lượng giáo dục.

Tổ chức các lớp chuyên đề tập huấn cho giáo viên để tìm tòi và so sánh các phương pháp mới trong giảng dạy, cách tiếp cận các vấn đề từ đó giáo viên có thể vận dụng cho phù hợp với đối tượng học sinh.

Cần tổng hợp các sáng kiến có chất lượng, tổ chức triển khai các kinh nghiệm hay để các thầy cô học tập và rút kinh nghiệm.

b) Đối với các trường phổ thông

Tạo điều kiện để các thầy giáo, cô giáo có điều kiện tự học, tự bồi dưỡng để nâng cao năng lực chuyên môn, kiên trì tích cực đổi mới phương pháp trong giảng dạy nhằm phát huy tốt năng lực tự học của trò và dạy của thầy.

XÁC NHẬN CỦA HIỆU TRƯỞNG

Thanh Hóa, ngày 30 tháng 4 năm 2017

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của
mình viết không sao chép nội dung
của người khác

Nguyễn Thị An

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sách giáo khoa Hình học lớp 11 chuẩn và nâng cao của Bộ giáo dục và đào tạo.
2. Đề thi đại học, cao đẳng môn Toán của Bộ giáo dục và đào tạo.
3. Đề thi thử đại học của một số trường THPT trên toàn quốc năm trong hai năm 2014 - 2015 và 2015 - 2016.
4. Đề thi HSG của tỉnh Bắc Giang năm 2014 - 2015.
5. Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi của một số trường trong tỉnh, ngoài tỉnh năm 2015 – 2016 và năm 2016 - 2017.
6. Tạp chí toán học và tuổi trẻ.
7. Bài tập chuyên đề trên trang web: www.vnmath.vn
8. Bài tập chuyên đề trên trang web: www.violet.vn