SỞ GD & ĐT NGHỆ AN **ĐỀ KSCL ĐỘI TUYỂN THI HSG TỈNH LỚP 12**

TRƯỜNG THPT NGUYỄN XUÂN ÔN **Năm học 2022- 2023**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

ĐỀ 62

Câu I (6,0 *điểm*).

1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}(2m+1)x^2+\left(m^2+m\right)x+1$ nghịch biến trên khoảng $(2022;2023)$.

2. Giải phương trình $x^3+10=x^2+7x+(x-1)\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(x+5\sqrt{x-1}\right)$

Câu 2.(4,0 điểm).

a. Cho hàm số $f(x)=\left(1-m^3\right)x^3+6mx^2+\left(12m^2-3m+3\right)x+8m^3+6m$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2022;2023]$ sao cho $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in[2022;2023]$?.

b. Một thùng đựng 25 viên bi được đánh số từ 1 đến 25, mỗi bi mang một số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi, tính xác suất để các số ghi trên bi lập thành một cấp số cộng.

Câu 3.(2,0 điểm).

Doanh nghiệp Alibaba cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là x^3+2x (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y-27y^3$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp Alibaba cần sử dụng máy A trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày).

Câu 4.(6,0 điểm).

a. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, biết cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

b. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AB=a; AD=3a; AA'=2a$. Trên tia đối của tia $C'C$ lấy điểm E sao cho $CE=3C'E$. Một đường thẳng d đi qua E và cắt các đường thẳng AD, BD' lần lượt tại M, N. Tính độ dài đoạn thẳng ME.

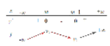
c. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AB=1; AD=2; SA=3$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBD. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua G và thuộc mặt phẳng (SBD), d cắt các cạnh $SB; SD$ lần lượt tại $M; N$. Gọi K là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN). Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMKN$.

Câu 5. (*2,0 điểm*)

Cho các số thực x, y, z thuộc đoạn $[1;3]$ và thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2+y^2+z^2+xyz+15}{x+y+z}-2\sqrt{x^2+2xy+2xz+4yz}$.

----------HẾT----------

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Câu	Nội Dung	Điểm
Câu I.1 **2,5 *điểm***	**Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-(2m+1)\dfrac{x^2}{2}+\left(m^2+m\right)x+1$ nghịch biến trên khoảng $(2021;2022)$.**	
	Ta có: $y'=x^2-(2m+1)x+m^2+m\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m+1\\x=m\end{array}\right.$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.	0,5
	+ Bảng biến thiên: 	0,5
	Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(m;m+1)$.	0,5
	Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2021;2022)\Leftrightarrow(2021;2022)\subset(m;m+1)$	0,5
	$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 2021\\m+1\ge 2022\end{cases}\Leftrightarrow m=2021$ Vậy để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2021;2022)$ thì $m=2021$	0,5
I.2	***Giải phương trình*** $x^3+10=x^2+7x+(x-1)\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(x+5\sqrt{x-1}\right)$	***2.5***
	ĐK: $x\ge 1$. *Phương trình đã cho* $\Leftrightarrow x^3-x^2-7x+10=(x-1)\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(x+5\sqrt{x-1}\right)$ $\Leftrightarrow(x-2)(x^2+x-5)=(x-1)\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(x+5\sqrt{x-1}\right)$ $\Leftrightarrow(x-2)(x^2+x-5)\left(\sqrt{x-1}+1\right)=(x-1)(x-2)\left(x+5\sqrt{x-1}\right)$ $\Leftrightarrow(x-2)\left[(x^2+x-5)\left(\sqrt{x-1}+1\right)-(x-1)\left(x+5\sqrt{x-1}\right)\right]=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2(thoa)\\(x^2+x-5)\left(\sqrt{x-1}+1\right)-(x-1)\left(x+5\sqrt{x-1}\right)=0\end{array}\right.$	*1*
	Xét $(x^2+x-5)\left(\sqrt{x-1}+1\right)=(x-1)\left(x+5\sqrt{x-1}\right);x>1$ $\Leftrightarrow\dfrac{x^2+x-5}{x-1}=\dfrac{x+5\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}\Leftrightarrow\dfrac{(x-2)^2+5(x-2)+1}{(x-2)+1}=\dfrac{(x-1)+5\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1}$ *(2)*	*0,5*
	Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+5t+1}{t+1},t>-1\Rightarrow f'(t)=1+\dfrac{3}{(t+1)^2}>0$ *nên hàm số* $f(t)$ *đồng biến trên khoảng* $(-1;+\infty)$. *Do đó, (2)* $\Leftrightarrow f(x-2)=f\left(\sqrt{x-1}\right)\Leftrightarrow x-2=\sqrt{x-1}$	*0.5*
	$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\ge 0\\(x-2)^2=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\x^2-5x+5=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$	*0,5*

	Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $x=2; x=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$	

2a)	*Cho hàm số* $f(x)=\left(1-m^3\right)x^3+6mx^2+\left(12m^2-3m+3\right)x+8m^3+6m$ *với* m *là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của* $m\in\left[-2021;2022\right]$ *sao cho* $f(x)\ge 0$ *với mọi* $x\in[2021;2022]$ *?*
	$f(x)\ge 0,\forall x\in\left[2021;2022\right]$ $\Leftrightarrow \left(1-m^3\right)x^3+6mx^2+\left(12m^2-3m+3\right)x+8m^3+6m\ge 0,\forall x\in\left[2021;2022\right]$ $\Leftrightarrow \left(x+2m\right)^3+3(x+2m)\ge\left(mx\right)^3+3mx,\forall x\in\left[2021;2022\right]\quad(1)$
	Xét hàm số $h\left(t\right)=t^3+3t,t\in R$. Ta có: $h'(t)=3t^2+3>0,\forall t\in R$ Suy ra hàm số $h(t)$ đồng biến trên R.
	$\left(1\right)\Leftrightarrow h\left(x+2m\right)\ge h(mx),\forall x\in[2021;2022]\Leftrightarrow x+2m\ge mx,\ \forall x\in[2021;2022]$ $\Leftrightarrow m\le\dfrac{x}{x-2},\forall x\in[2021;2022]\Leftrightarrow m\le\min\limits_{[2021;2022]}g\left(x\right)\left(g\left(x\right)=\dfrac{x}{x-2}\right)$
	$g'\left(x\right)=\dfrac{-2}{\left(x-2\right)^2}<0,\forall x\in\left[2021;2022\right]\Rightarrow$ Hàm số $g\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left[2021;2022\right]\Rightarrow\min\limits_{[2021;2022]}g\left(x\right)=g\left(2022\right)=\dfrac{1011}{1010}\Rightarrow m\le\dfrac{1011}{1010}$ Vậy trên đoạn $[-2021;2022]$ có 2023 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

2b	***Một thùng đựng*** 25 ***viên bi được đánh số từ*** 1 ***đến*** 25***, mỗi bi mang một số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên*** 4 ***viên bi, tính xác suất để các số ghi trên bi lập thành một cấp số cộng.***
	Số cách lấy ngẫu nhiên 4 *viên bi là* $C_{25}^4\ \Rightarrow n(\Omega)=C_{25}^4$
	Gọi 4 *số hạng của cấp số cộng tăng là* $x;x+d;x+2d;x+3d$ *;* $d>0$ *Ta có* $1\le x;x+3d\le 25\Rightarrow d\le 8$ *Các số trong cấp số cộng nguyên dương nên* $d\in\mathbb{N}^*\Rightarrow d\in\left\{1;2;3;...;8\right\}$
	Trong mỗi trường hợp thỏa mãn đề bài, để đếm số cấp số cộng thỏa mãn ta chỉ cần đếm x. *Ta có* $u_4=u_1+3d$ *;* $u_4\le 25\Leftrightarrow x+3d\le 25\Leftrightarrow x\le 25-3d$ *Lại có* $x\ge 1$ *nên* $d=1\Rightarrow 1\le x\le 22\Rightarrow$ *có* 22 *cấp số cộng* $d=2\Rightarrow 1\le x\le 19\Rightarrow$ *có* 19 *cấp số cộng* ... *Gọi biến cố* A: *"các số ghi trên bi lập thành một cấp số cộng"* $n(A)=22+19+16+...+4+1=92$
	Xác suất của biến cố A *là* $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{2}{275}$

Câu 3. Theo đề ta có $x+y=10\Leftrightarrow y=10-x\qquad\left(1\right)$.

Và $0<y\le 6\Rightarrow 4\le x<10$.

Số tiền lãi $f\left(x\right)=x^3+2x+326\left(10-x\right)-27\left(10-x\right)^3$ (thay $\left(1\right)$ vào).

$\Leftrightarrow f\left(x\right)=28x^3-810x^2+7776x-23740$ với $x\in\left[4;10\right)$.

Ta có $f'\left(x\right)=84x^2-1620x+7776$.

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 84x^2-1620x+7776=0\Leftrightarrow x=9\vee x=\dfrac{72}{7}\left(l\right)$.

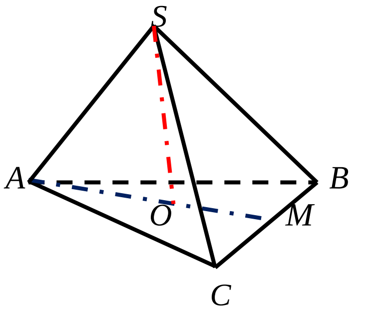
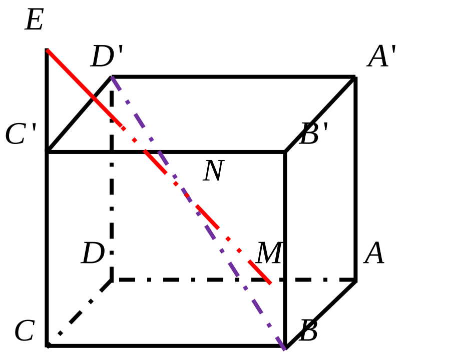
Bảng biến thiên.

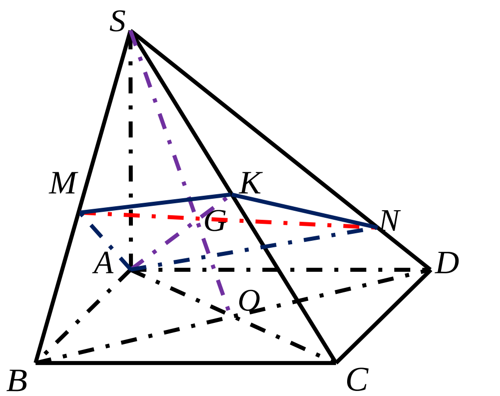
.

x	4		9		10
y'		+	0	-	
y			$f(9)$		
	$f(4)$	$\nearrow$		$\searrow$	$f(10)$

Từ BBT ta có $x=9$ là giá trị cần tìm.

Câu 4

<table>
<tr><td rowspan="9">4</td><td>a</td><td colspan="2">Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, biết cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.</td><td>2,00</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td></td><td>Chóp $S.ABC$ đều nên đáy ABC là tam giác đều.
Diện tích đáy
$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin BAC=a^2\sqrt{3}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gọi M là trung điểm cạnh BC, O là trọng tâm $\Delta ABC\Rightarrow O\in AM$, $AO=\dfrac{2}{3}AM$
Chóp $S.ABC$ đều nên $SO\perp(ABC)\Rightarrow(SA;(ABC))=(SA;AO)=SAO=60^0$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">$AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=a\sqrt{3}\Rightarrow AO=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$
Xét tam giác SAO vuông tại O ta có $SO=AO.\tan 60^0=2a$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{1}{3}S_{ABC}.SO=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>b</td><td colspan="2">Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AB=a;AD=3a;AA'=2a$. Trên tia đối của tia $C'C$ lấy điểm E sao cho $CE=3C'E$. Một đường thẳng d đi qua E và cắt các đường thẳng AD,BD' lần lượt tại M,N. Tính độ dài đoạn thẳng ME</td><td>2,00</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$M\in AD\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AD}$
$N\in BD'\Leftrightarrow\overrightarrow{BN}=y\overrightarrow{BD'}$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=y(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'})$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}=(1-y)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AA'})$
$E\in CC':\overrightarrow{CE}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CC'}\Leftrightarrow\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AA'}$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AA'}$</td><td>0,5</td></tr>
</table>

		Ta có $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AA'}$ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=(1-y)\overrightarrow{AB}+(y-x)\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AA'}$	0,5
		Các điểm $M;N;E$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=t\overrightarrow{ME}$ $\Leftrightarrow (1-y)\overrightarrow{AB}+(y-x)\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AA'}=t\overrightarrow{AB}+t(1-x)\overrightarrow{AD}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{AA'}$ $\Leftrightarrow (1-y-t)\overrightarrow{AB}+(y-x-t+tx)\overrightarrow{AD}+\left(y-\frac{3}{2}t\right)\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}1-y-t=0\\ y-x-t+tx=0\\ y-\frac{3}{2}t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{2}{5}\\ x=\frac{1}{3};y=\frac{3}{5}\end{cases}$ vì các vecto $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AA'}$ không đồng phẳng	0,5
		Ta có $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AA'}$, các vecto $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AA'}$ đôi một vuông góc $ME^2=\overrightarrow{ME}^2=\left[\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AA'}\right]^2=\overrightarrow{AB}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AD}^2+\frac{9}{4}\overrightarrow{AA'}^2=AB^2+\frac{4}{9}AD^2+\frac{9}{4}AA'^2$ $=14a^2\Rightarrow ME=a\sqrt{14}$	0,5
	c	**Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AB=1;AD=2;SA=3$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBD. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua G và thuộc mặt phẳng (SBD), d cắt các cạnh $SB;SD$ lần lượt tại $M;N$. Gọi K là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN). Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMKN$.**	**2,00**
		 Gọi $\{O\}=AC\cap BD$, đáy chóp là hình chữ nhật nên O là trung điểm của AC,BD. G là trọng tâm ΔSBD nên G thuộc đoạn SO và $\frac{SG}{SO}=\frac{2}{3}\Rightarrow G$ cũng là trọng tâm $\Delta SAC\Rightarrow K$ là trung điểm của SC	0,5
		$V=V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=2$, $V_{S.ABC}=V_{S.ACD}=\frac{V}{2}=1$ Ta có $\frac{V_{S.AMK}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SK}{SC}=\frac{1}{2}x;x=\frac{SM}{SB}$ điều kiện $0\le x<1$ Ta có $\frac{V_{S.ANK}}{V_{S.ADC}}=\frac{SN}{SD}.\frac{SK}{SC}=\frac{1}{2}y;y=\frac{SN}{SD}$ điều kiện $0\le y<1$ $\Rightarrow V_{S.AMKN}=V_{S.AMK}+V_{S.ANK}=\frac{1}{2}x.V_{S.ABC}+\frac{1}{2}y.V_{S.ACD}=\frac{1}{2}(x+y)$	0,5
		Ta có $\frac{S_{SMN}}{S_{SBD}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}=xy$ (1) $\frac{S_{SMG}}{S_{SBO}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SG}{SO}=\frac{2}{3}x\Rightarrow S_{SMG}=\frac{2}{3}x.S_{SBO}=\frac{1}{3}x.S_{SBD}$	0,5

		$\frac{S_{SNG}}{S_{SDO}}=\frac{SN}{SD}.\frac{SG}{SO}=\frac{2}{3}y\Rightarrow S_{SNG}=\frac{2}{3}y.S_{SDO}=\frac{1}{3}y.S_{SBD}$ $\Rightarrow\frac{S_{SMN}}{S_{SBD}}=\frac{S_{SMG}+S_{SNG}}{S_{SBD}}=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y$ *(2)* *Từ (1) và (2) ta có* $\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y=xy\Leftrightarrow x+y=3xy$ *(*)*	
		Áp dụng các bất đẳng thức Cauchy: $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ *cùng với (*) ta có* $2\sqrt{xy}\le 3xy\Leftrightarrow 4xy\le 9(xy)^2\Leftrightarrow xy\ge\frac{4}{9}$ $\Rightarrow V_{S.AMKN}=\frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{2}.3xy\ge\frac{2}{3}$ *(đvtt)* *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x+y=3xy\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{2}{3}\Rightarrow d\parallel BD$. *Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp* $S.AMKN$ *bằng* $\frac{2}{3}$	*0,5*

Câu 5 (2,0đ)	***Cho các số thực*** x,y,z ***thuộc đoạn*** $[1;3]$ ***và thỏa mãn điều kiện*** $xy+yz+zx=7$***. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*** $$P=\frac{x^2+y^2+z^2+xyz+15}{x+y+z}-2\sqrt{x^2+2xy+2xz+4yz}.$$
	Đặt $t=x+y+z$ Ta có $(x-1)(y-1)(z-1)\ge 0\Leftrightarrow xyz\ge xy+yz+zx-(x+y+z)+1\ge 8-t$
	$(x-3)(y-3)(z-3)\le 0\Leftrightarrow xyz\le 3(xy+yz+zx)-9(x+y+z)+27=48-9t$ Suy ra : $8-t\le 48-9t\Rightarrow t\le 5$. Ta có: $t^2=(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)=21\Rightarrow t\ge\sqrt{21}$. Suy ra $\sqrt{21}\le t\le 5$.
	$P=\frac{(x+y+z)^2+1+xyz}{x+y+z}-2\sqrt{(x+2y)(x+2z)}$ $P\ge\frac{(x+y+z)^2+1+xyz}{x+y+z}-2(x+y+z)$ $P\ge\frac{t^2+1+8-t}{t}-2t=\frac{-t^2-t+9}{t}$.
	Xét hàm số $f(t)=\frac{-t^2-t+9}{t}\Rightarrow f'(t)=-1-\frac{9}{t^2}<0,\forall t\in[\sqrt{21};5]$. Nên hàm số nghịch biến trên $[\sqrt{21};5]$. Vậy $f(t)\ge f(5)=-\frac{21}{5}$. Vậy $MinP=-\frac{21}{5}$, đạt tại $x=3$ và $y=z=1$.