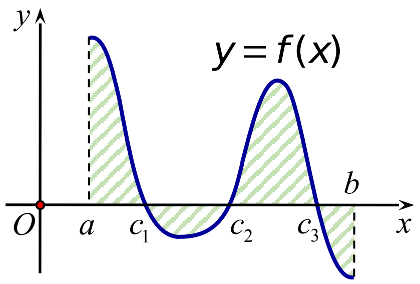
Vấn đề 3. ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

Dạng 1. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

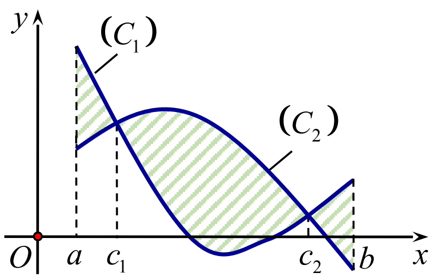
a) **Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$:**



$$(H):\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \\ x=a \\ x=b \end{cases}$$

$$\boxed{S=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}$$

b) **Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C_1): y=f_1(x)$, $(C_2): y=f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$:**



$$(H):\begin{cases} (C_1): y=f_1(x) \\ (C_2): y=f_2(x) \\ x=a \\ x=b \end{cases}$$

$$\boxed{S=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x}$$

Chú ý:

- ✓ Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.
- ✓ Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối.
- ✓ Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=g(y)$, $x=h(y)$ và hai đường thẳng $y=c$, $y=d$ được tính theo công thức: $S=\int_c^d |g(y)-h(y)|\,\mathrm{d}y$.

Dạng 1.1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $(C_1): y=f(x)$ và $(C_2): y=g(x)$

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Giải phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2). Phương trình này cho hai nghiệm $x=a$, $x=b$. (Giả sử $a<b$).
- Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$ (đvdt)

✍ **Chú ý**: Khi $(C_2): y = 0$ thì $S = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$.

B. TOÁN MẪU

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ và đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y = \dfrac{\ln^2 x - \ln x}{x}$ và trục hoành.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $(P_1): y = x^2 - 2x$ và $(P_2): y = -x^2 + 4x$.

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường: $(P): y = x^2 + 2$ và $d: 4 - x$.

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường: $(P): y = x^2 + 2x$ và $d: x - y + 2 = 0$.

Bài 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y = x(x-1)^2$ và trục hoành.

Bài 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x}$ và trục hoành.

Bài 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y=(x-2)\ln x$ và trục Ox.

Bài 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y=x\sqrt{x+1}$ và trục hoành.

Dạng 1.2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $(C_1): x=f(y)$ và $(C_2): x=g(y)$

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Giải phương trình tung độ giao điểm của (C_1) và (C_2). Phương trình này cho hai nghiệm $y=a$, $y=b$. (Giả sử $a<b$).
- Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int_a^b |f(y)-g(y)|\,\mathrm{d}y=\left|\int_a^b [f(y)-g(y)]\,\mathrm{d}y\right|$ (đvdt)

B. TOÁN MẪU

Ví dụ 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y^2-x-y=0$ và đường thẳng $d: x-2y+2=0$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường: $(P): y^2+x-5=0$ và $d: x+y-3=0$.

Bài 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường: $(P): y^2-2y+x=0$ và $d: x+y=0$.

Bài 10. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường: $(P): y^2 = 2x + 1 = 0$ và $d: y = x - 1$.

Bài 11. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường: $(C): y = x^3$ và $(P): y^2 = x$.

Dạng 1.3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $(C_1): y = f(x)$, $(C_2): y = g(x)$ và đường thẳng $x = a$

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Giải phương trình tung độ giao điểm của (C_1) và (C_2). Phương trình này cho một nghiệm $x = b$. (Giả sử $a < b$).
- Diện tích hình phẳng cần tính là: $S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx = \left| \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx \right|$ (đvdt)

B. TOÁN MẪU

Ví dụ 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y = \dfrac{x-1}{x+1}$ và hai trục tọa độ.

....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y = \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$.

....
....
....
....
....
....
....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y = \dfrac{x-2}{x+1}$ và hai trục tọa độ.

Bài 13. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y = e^x$ và hai đường thẳng $y = 1$, $x = 1$.

Bài 14. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $(C_1): y = e^x$, $(C_2): y = e^{-x}$ và đường thẳng $x = 1$.

Bài 15. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y = (x-1)e^x$ và hai trục tọa độ.

Dạng 1.4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $(C_1): x = f(y)$, $(C_2): x = g(y)$ và đường thẳng $y = b$

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Giải phương trình tung độ giao điểm của (C_1) và (C_2). Phương trình này cho hai nghiệm $y = b$. (Giả sử $a < b$).
- Diện tích hình phẳng cần tính là: $S = \int_a^b \left| f(y) - g(y) \right| dy = \left| \int_a^b \left[f(y) - g(y) \right] dy \right|$ (đvdt)

B. TOÁN MẪU

Ví dụ 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(P): x = y^2 + 1$ và hai đường thẳng $x - 2y = 0$, $y = 0$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 16. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y^2 = 2x$ và hai đường thẳng $2x + 2y + 1 = 0,\ y = 0$.

Bài 17. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y = \sqrt{x}$ và hai đường thẳng $x + y - 2 = 0,\ y = 0$.

Dạng 1.5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $(C_1): y = f(x)$, $(C_2): y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $y = b$ (a < b)

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

❖ Diện tích cần tính là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$ (đvdt)

- Nếu phương trình $f(x) = g(x)$ vô nghiệm trên $[a;b]$ thì

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$$

- Nếu phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm $x = c$ trên $[a;b]$ thì

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_a^c [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_c^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$$

B. TOÁN MẪU

Ví dụ 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $(P): y = x^2 - x + 1,\ d: y = x - 3$ và hai đường thẳng $x = 1,\ x = 2$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0,\ x = 2$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 18. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $(P_1): y = 2x^2 - 2x$, $(P_2): y = x^2 + 3x - 6$ và hai đường thẳng $x = 0,\ x = 4$.

Bài 19. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $(C): y = e^x$, $d: y = -2$ và hai đường thẳng $x = 0,\ x = 1$.

Bài 20. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $(C): y = \sin^2 x$, $d: y = 2$ và hai đường thẳng $x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}$.

Bài 21. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $(C): y = x^3$, $d: y = 0$ và hai đường thẳng $x = 0,\ x = 1$.

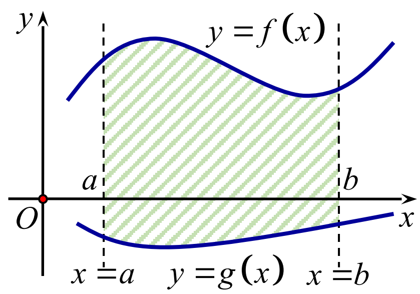
Bài 22. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $(C): y = \ln x$, $d: y = 0$ và hai đường thẳng $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}},\ x = \mathrm{e}$.

Dạng 1.6: Dùng đồ thị để tính diện tích

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

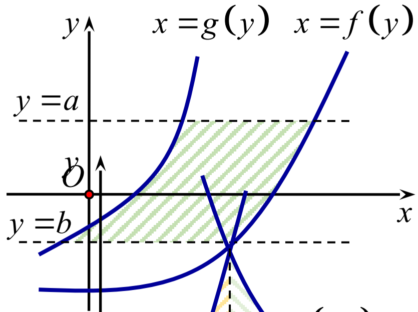
Bài toán 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C_1): y = f(x)$, $(C_2): y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ được xác định công thức $\boxed{S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x}$.

(***Lấy trên trừ dưới***)

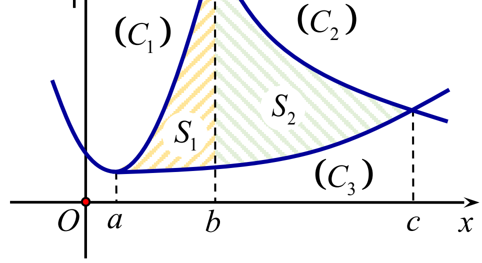


Bài toán 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C_1): x = f(y)$, $(C_2): x = g(y)$ và hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ $(a < b)$ được xác định công thức $\boxed{S = \int_a^b [f(y) - g(y)]\,\mathrm{d}y}$.

(***Lấy phải trừ trái***)



Bài toán 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C_1): y = f(x)$, $(C_2): y = g(x)$ và $(C_3): y = h(x)$.



Phương pháp:

- **Bước 1:** Lần lượt vẽ tìm giao điểm của

(C_1), (C_2) và (C_3).

- **Bước 2:** Phân chia hình ban đầu thành các hình nhỏ như ở bài toán 1 hoặc bài toán 2.

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^b [f(x) - h(x)]\,dx + \int_b^c [g(x) - h(x)]\,dx$$

B. TOÁN MẪU

Ví dụ 9. Cho hàm số: $y = \dfrac{x+1}{x-2}$:

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), đường tiệm cận ngang và hai đường thẳng $x = 3$, $x = 4$.

c) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), Ox, Oy và đường thẳng $x = -3$.

d) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), đường tiệm cận ngang, Ox, Oy và đường thẳng $x = -3$.

e) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), đường tiệm cận đứng và hai đường thẳng $y = 2$, $y = 4$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 10. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = x^2 - 4x + 5$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm $A(1;2)$ và $B(4;5)$ nằm trên parabol.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 23. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và đường thẳng $y = 3$.

Bài 24. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

Bài 25. Cho hàm số $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), Ox, Oy và đường thẳng $x=2$.

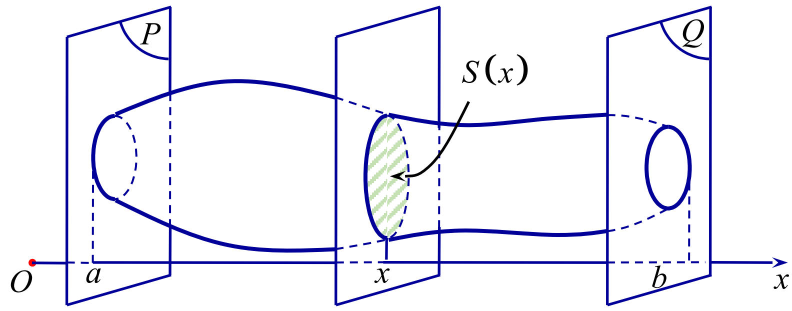
c) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung và hai đường thẳng $y=-5$, $y=-3$.

Dạng 2. THỂ TÍCH

Dạng 2.1: Thể tích vật thể

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a\le x\le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.

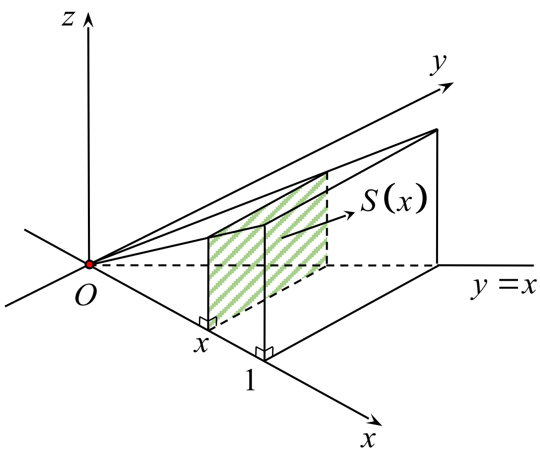


$$V_B=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

B. TOÁN MẪU

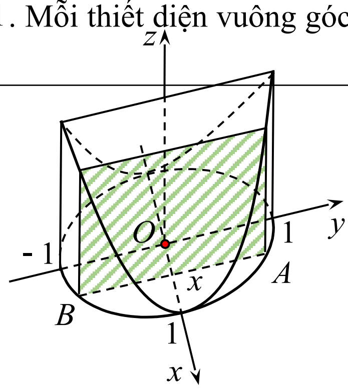
Ví dụ 11. Tính thể tích vật thể có đáy là một tam giác cho bởi $y=x$, $y=0$ và $x=1$. Mỗi thiết diện vuông góc với trục Ox là một hình vuông.

....
....
....
....
....
....
....
....

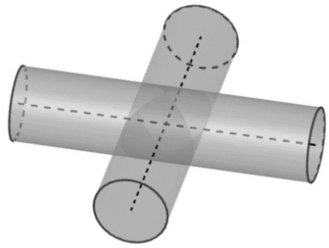


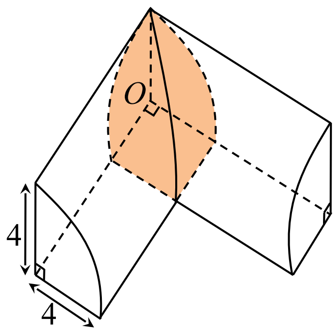
Ví dụ 12. Tính thể tích vật thể có đáy là một hình tròn giới hạn bởi $x^2+y^2=1$. Mỗi thiết diện vuông góc với trục Ox là một hình vuông.

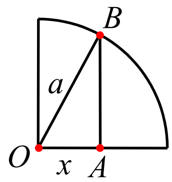
....
....
....
....

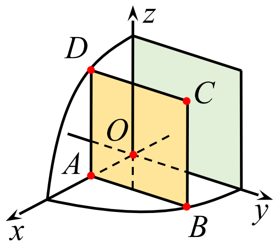


Ví dụ 13. Cho hai mặt trụ có cùng bán kính bằng 4 được đặt lồng vào nhau như hình vẽ. Tính thể tích phần chung của chúng biết hai trục của hai mặt trụ vuông góc và cắt nhau.



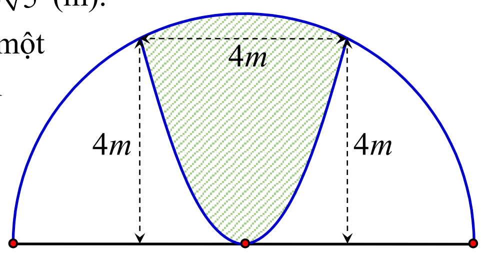






C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 26. Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4 (m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)



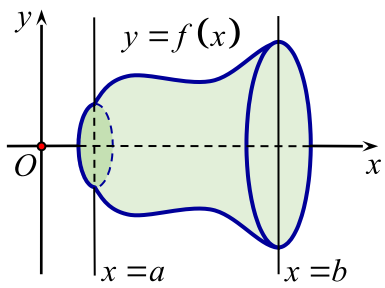
Bài 27. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\ (0\le x\le 3)$ là một hình chữ nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{9-x^2}$.

Bài 28. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=-1$ và $x=1$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\ (-1\le x\le 1)$ là một hình vuông cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$.

Dạng 2.2: Thể tích khối tròn xoay

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

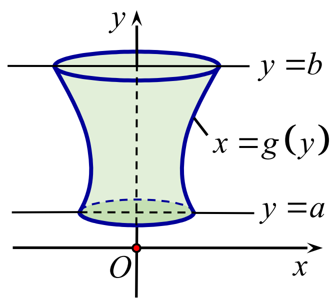
Bài toán 1: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$ $x=a$, $x=b$ ($a<b$) quanh trục Ox:



$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \\ x=a \\ x=b \end{cases}$$

$$\boxed{V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$$

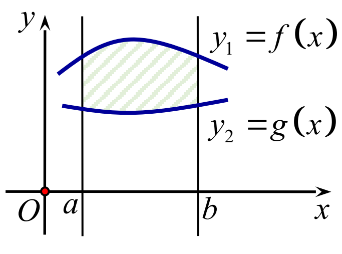
Bài toán 2: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=g(y)$, $x=0$ $y=a$, $y=b$ ($a<b$) quanh trục Oy:



$$\begin{cases} x=g(y) \\ x=0 \\ y=a \\ y=b \end{cases}$$

$$\boxed{V=\pi\int_a^b [g(y)]^2\,dy}$$

Bài toán 3: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y_1=f(x)$, $y_2=g(x)$, $x=a$, $x=b$ (với $a<b$ và $0\le y_2\le y_1$, $\forall x\in[a;b]$) quanh trục Ox:

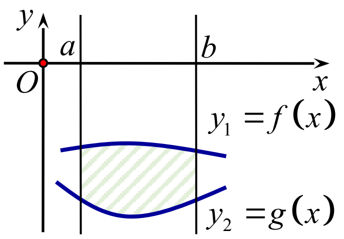


$$\begin{cases} y_1=f(x) \\ y_2=g(x) \\ x=a \\ x=b \end{cases}$$

$$\boxed{V=\pi\int_a^b \left|[f(x)]^2-[g(x)]^2\right|dx}$$

Bài toán 4: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y_1=f(x)$,

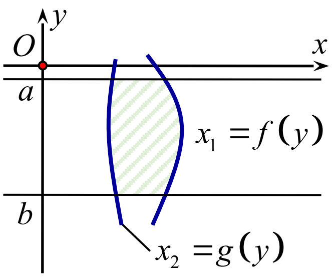
$y_2 = g(x)$, $x = a$, $x = b$ (với $a < b$ và $y_2 \le y_1 \le 0$, $\forall x \in [a;b]$) quanh trục Ox:



$$\begin{cases} y_1 = f(x) \\ y_2 = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{V = \pi\int_a^b \left|[g(x)]^2 - [f(x)]^2\right| dx}$$

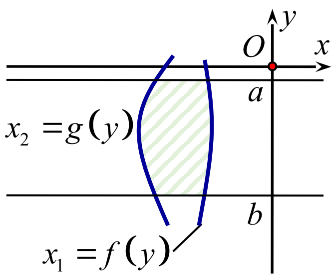
Bài toán 5: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x_1 = f(y)$, $x_2 = g(y)$, $y = a$, $y = b$ (với $a < b$ và $0 \le x_2 \le x_1$, $\forall y \in [a;b]$) quanh trục Oy:



$$\begin{cases} x_1 = f(y) \\ x_2 = g(y) \\ y = a \\ y = b \end{cases}$$

$$\boxed{V = \pi\int_a^b \left|[f(y)]^2 - [g(y)]^2\right| dy}$$

Bài toán 6: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x_1 = f(y)$, $x_2 = g(y)$, $y = a$, $y = b$ (với $a < b$ và $x_2 \le x_1 \le 0$, $\forall y \in [a;b]$) quanh trục Oy:



$$\begin{cases} x_1 = f(y) \\ x_2 = g(y) \\ y = a \\ y = b \end{cases}$$

$$\boxed{V = \pi\int_a^b \left|[g(y)]^2 - [f(y)]^2\right| dy}$$

B. TOÁN MẪU

Ví dụ 14. Cho miền D được giới hạn bởi hai đường: $x^2 + y - 5 = 0$, $x + y - 3 = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox.

Ví dụ 15. Cho miền D được giới hạn bởi các đường: $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$, $y = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Oy.

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 29. Cho miền D được giới hạn bởi hai đường $y=(x-2)^2$ và $y=4$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh: a) Trục Ox b) Trục Oy.

Bài 30. Cho miền D được giới hạn bởi hai đường $y=4-x^2$, $y=x^2+2$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox.

Bài 31. Cho miền D được giới hạn bởi các đường $y=2x^2$ và $y=2x+4$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox.

Bài 32. Cho miền D được giới hạn bởi các đường $y=x^{\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}}$, $x=1$, $x=2$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox.

Bài 33. Cho miền D được giới hạn bởi các đường $y=x\ln x$, $y=0$, $x=1$, $x=e$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox.

Dạng 3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÌM KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ TỪ ĐÓ PHÁC HỌA ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Xem dạng 3 vấn đề 2: TÍCH PHÂN.

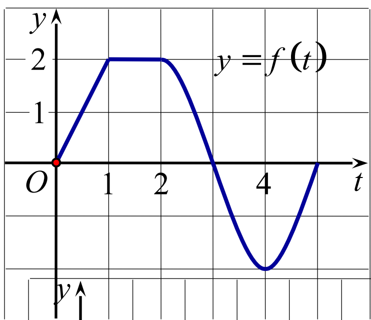
B. TOÁN MẪU

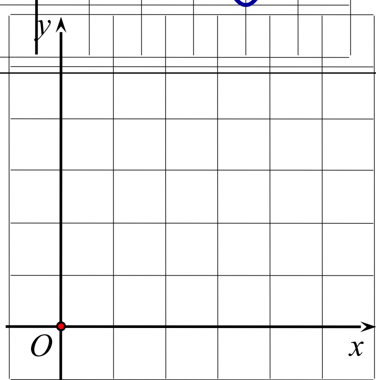
Ví dụ 16. Nếu f là hàm số có đồ thị được biểu diễn trong hình bên dưới và $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

a) Tìm các giá trị $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ và $g(5)$.

b) Dự đoán sự biến thiên của hàm số g.

c) Phác họa đồ thị g.





....

....

....

....

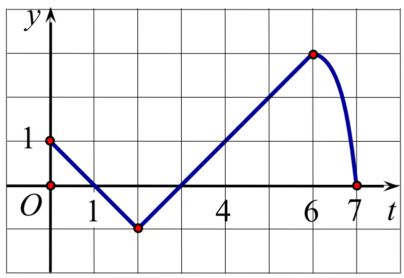
Ví dụ 17. Cho $g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, trong đó f là hàm số mà đồ thị của nó được biểu diễn như hình bên.

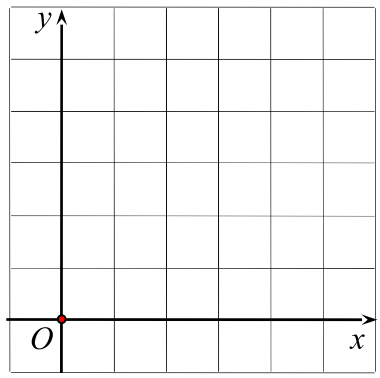
a) Tìm $g(x)$ với $x=0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

b) Ước tính $g(7)$.

c) g có giá trị lớn nhất ở đâu? Giá trị nhỏ nhất ở đâu?

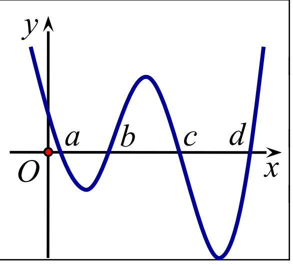
d) Phác họa đồ thị của g.





Ví dụ 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm a, b, c, d (hình bên).

So sánh $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$.



....

....

....

....

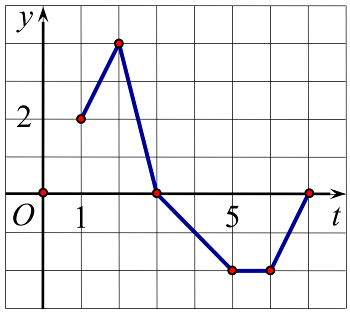
....

....

....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 34. Cho $g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, trong đó f là hàm số mà đồ thị của nó được biểu diễn như hình bên.

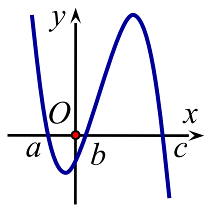


a) Tính $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ và $g(6)$.

b) g có giá trị lớn nhất ở đâu? Giá trị nhỏ nhất ở đâu?

c) Phác họa đồ thị của g.

Bài 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ bên.



So sánh $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$.

Dạng 4. SỬ DỤNG TÍCH PHÂN TRONG CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC CỦA C_n^k

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

❖ Công thức khai triển nhị thức Newton:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$$

$$(a-b)^n=(-1)^k\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=C_n^0a^n-C_n^1a^{n-1}b^1+\ldots+(-1)^kC_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+(-1)^nC_n^nb^n$$

❖ Tính chất: $\boxed{C_n^k=C_n^{n-k}}$ $(0\le k\le n)$; $\boxed{C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k}$ $(0\le k\le n)$; $\boxed{C_n^0=C_n^n=1}$

<u>Phương pháp</u>:

- Viết khai triển Newton của $(ax+b)^n$.
- Lấy nguyên hàm / tích phân 2 vế theo cận thích hợp.
- Chọn giá trị x sao cho thay vào ta được đẳng thức phải chứng minh.

B. TOÁN MẪU

Ví dụ 19. Cho $n\in\mathbb{N}$ và $n\ge 2$.

a) Tính $I=\int_0^1 x^2\left(1+x^3\right)^n \mathrm{d}x$. b) Chứng minh: $\frac{1}{3}C_n^0+\frac{1}{6}C_n^1+\frac{1}{9}C_n^2+...+\frac{1}{3(n+1)}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

Ví dụ 20. Cho $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 2$.

a) Tính $I=\int_0^1 x^2\left(1+x^3\right)^n \mathrm{d}x$. b) Chứng minh: $\frac{1}{3}C_n^0+\frac{1}{6}C_n^1+\frac{1}{9}C_n^2+...+\frac{1}{3(n+1)}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 36. Cho $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh $\frac{1}{2}C_n^1-\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n=\frac{n}{n+1}$.

Bài 37. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh $2C_n^0 - \frac{1}{2}.2^2C_n^1 + \frac{1}{3}.2^3C_n^2 - ... + \frac{(-1)^n}{n+1}.2^{n+1}C_n^n = \frac{1+(-1)^n}{n+1}$

Bài 38. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh $\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - ... + \frac{(-1)^n}{n+1}.2^{n+1}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$

Bài 39. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh $1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Dạng 5. SỬ DỤNG TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

❖ **Mối liên hệ giữa quãng đường, vận tốc và gia tốc:**

Cho một chất điểm chuyển động với quãng đường là một hàm số theo biến số thời gian t là $s(t)$. Khi đó:

✓ Vận tốc của chất điểm là $v(t) = s'(t) \Rightarrow s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t$.

✓ Gia tốc của chất điểm là $a(t) = v'(t) \Rightarrow v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t$.

❖ **Nhắc lại một số kiến thức Vật lí:**

✓ *Chuyển động thẳng đều:*

- Phương trình chuyển động: $x = x_0 + vt$
- Trong đó: x_0 là tọa độ ba đầu lúc $t = 0$, x là tọa độ ở thời điểm t, v là vận tốc, t là thời gian.

✓ *Chuyển động thẳng biến đổi đều:*

- Chuyển động thẳng biến đổi đều bào gồm: chuyển động thẳng nhanh dần đều và chuyển động thẳng chậm dần đều.
- Vận tốc $v = v_0 + at$
- Quãng đường đi được $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$.
- Phương trình chuyển động $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$
- Công thức độc lập với thời gian $v^2 - v_0^2 = 2as$

✓ *Chuyển động rơi tự do:*

- Chuyển động thẳng biến đổi đều bào gồm: chuyển động thẳng nhanh dần đều và chuyển động thẳng chậm dần đều.
- Vận tốc $v = gt$
- Quãng đường vật rơi được $s = \frac{1}{2}gt^2$.
- Công thức độc lập với thời gian $v^2 = 2gs$

❖ **Phương pháp**:

✓ Xác định kỹ bản chất chuyển động là chuyển động thẳng đều, biến đổi đều, …

✓ Xác định mốc thời gian của chuyển động.

✓ Sử dụng công thức thích hợp.

✓ Đối với bài toán liên quan đến vận tốc, gia tốc lớn nhất thì chúng ta có thể dùng: parabol, bất đẳng thức Cô-si, khảo sát hàm số.

B. TOÁN MẪU

Ví dụ 21. Một ôtô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đo, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10\ (\text{m/s})$, trong đó t tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ôtô đó còn di chuyển bao nhiêu mét?

....

....

....

....

Ví dụ 22. Một vậy chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t) = 3t + t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng 10 s kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 23. Một viên đạn được bắn lên trời với vận tốc là 72 m/s bắt đầu từ độ cao 2 m. Hãy xác định chiều cao của viên đạn sau thời gian 5s kể từ lúc bắn.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 40. Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t\ (\text{m/s})$. Hỏi rằng trong 3 s trước khi dừng hẳn vật di chuyển được bao nhiêu mét?

Bài 41. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = \dfrac{3}{t+1}(\text{m/s}^2)$. Vận tốc ban đầu của vật là 6 m/s. Hỏi vận tốc của vật tại giây thứ 10 bằng bao nhiêu?

Bài 42. Một xe ô tô chuyển động với vận tốc tại giây thứ t là $v(t)=4t^3+2t+3(\text{m/s})$. Hỏi xe đã đi được quãng đường là bao nhiêu kể từ lúc bắt đầu $(t=0)$ cho đến lúc $t=5\text{s}$.

Bài 43. Vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t)=3t^2+5(\text{m/s})$. Tính quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10.

Bài 44. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)=1,2+\dfrac{t^2+4}{t+3}(\text{m/s})$. Quãng đường đi được của vật đó trong 4 s đầu tiên bằng bao nhiêu?

Dạng 6. SỬ DỤNG TÍCH PHÂN TRONG TÍNH CÔNG CỦA LỰC TÁC DỤNG

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Nếu một lực không đổi F tác dụng lên vật M dọc theo một khoảng cách (độ dời) d, thì công W sinh ra trong quá trình dịch chuyển bằng tích của lực F và độ dài khoảng cách d mà nó đã tác dụng, ta có công thức

$$W=F.d$$

trong đó, lực F được hiểu là tác dụng dọc theo hướng (phương) chuyển động.

- Định nghĩa trên luôn đúng khi lực F không đổi. Tuy nhiên, nhiều trường hợp lực F biến thiên trong suốt quá trình thực hiện công. Trong các tình huống như vậy, người ta thường chia quá trình này thành nhiều phần nhỏ và tính công toàn phần nhờ lấy tổng các công tương ứng với các phần được chia (được tính nhờ phép tính tích phân).
- Giả sử $f(x)$ là lực tác dụng lên vật tại vị trí x, đường đi của lực tác dụng (quỹ đạo của vật được tác dụng lực) tương ứng với trục tọa độ Ox. Khi đó, công toàn phần sinh ra trong cả quá trình chuyển động của vật từ vị trí $x=a$ đến vị trí $x=b$ là:

$$W=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

B. TOÁN MẪU

Ví dụ 24. Một lực 40 N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên từ 10 cm đến 15 cm. Hãy tính công sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ 15 cm đến 18 cm.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 45. Người thợ hồ nâng một xô nước bị rỉ lên cao 20 m với tốc độ cố định. Cho trọng lượng của xô là 3 N, trọng lượng ban đầu của nước là 2 N. Biết rằng xô nước bị rỉ nên lượng nước trong xô sẽ chảy ra với tốc độ không đổi trong thời gian nâng xô nước lên. Người ta ước tính rằng lượng nước trong xô sẽ thay đổi theo đồ thị hàm số $f(x) = -\frac{1}{10}x + 2$. Hỏi người thợ hồ đã dùng một công là bao nhiêu để nâng xô nước lên cao 20 m, với giả sử rằng bỏ qua trọng lượng sợi dây?

Dạng 7. SỬ DỤNG TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN TĂNG TRƯỞNG VÀ PHÁT TRIỂN

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Cho hàm số $f(x)$ biểu diễn cho sự tăng (hay giảm) số lượng của một đối tượng nào đó (số người, vi khuẩn, vi trùng, lượng nước chảy, ...).
- Giá trị $f(x)$ là số lượng của đối tượng đó tại thời điểm x.
- Đạo hàm $f'(x)$ chính là tốc độ tăng (hay giảm) của đối tượng đó tại thời điểm x.
- Số lượng tăng thêm (hoặc giảm đi) của đối tượng trong khoảng $x \in [a;b]$ là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. TOÁN MẪU

Ví dụ 25. Một nghiên cứu chỉ ra rằng sau x tháng kể từ bây giờ, dân số của thành phố A sẽ tăng với tốc độ $v(x) = 10 + 2\sqrt{2x+1}$ (người/tháng). Dân số của thành phố sẽ tăng thêm bao nhiêu trong 4 tháng tới.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 26. Tốc độ thay đổi của số lượng người V (tính bằng ngàn người) tham gia công tác tình nguyện ở nước Mỹ từ năm 2000 đến năm 2006 có thể được mô hình bởi hàm số $V(t) = 119,85t^2 - 30e^t + 37,26e^{-t}$ với t là năm ($t = 0$ ứng với năm 2000). Hỏi số lượng người tham gia tình nguyện trong giai đoạn trên tăng lên hay giảm đi với số lượng bao nhiêu. *(Nguồn: Cục thống kê lao động nước Mỹ).*

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 27. Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t)=\dfrac{1000}{(1+0,3t)^2}$, $t\geq 0$, trong đó $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ t.

Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì người ta phải xử lí và thay nước mới cho hồ bơi.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 46. Tốc độ tăng các cặp đôi kết hôn (đơn vị tính: triệu người) của nước Mỹ từ năm 1970 đến năm 2005 có thể được mô hình bởi hàm số $f(t)=1,218t^2-44,72t+709,1$ với t là năm ($t=0$ ứng với năm 1970) . Số lượng cặp đôi kết hôn vào năm 2005 là 59513 ngàn người.

a) Tìm một mô hình biểu thị cho số lượng các cặp đôi kết hôn của nước Mỹ.

b) Sử dụng mô hình đó để dự đoán số lượng các cặp đôi kết hôn của nước Mỹ vào năm 2012. Kết quả của bạn liệu có hợp lí? Giải thích vì sao?

Bài 47. Một hồ nước bị ô nhiễm được xử lý bằng một chất diệt khuẩn. Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn sống sót được mô hình bởi $B'(t)=\dfrac{3000}{(1+0,2t)^2}$, $t\geq 0$ với $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước là t là số ngày tính từ khi hồ nước được xử lý. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu là 10000 con/ml nước. Sử dụng mô hình này xác định số lượng vi khuẩn sau 5 ngày. Liệu số lượng vi khuẩn có thể vượt 2000 con/ml nước.

BÀI TẬP TỔNG HỢP VẤN ĐỀ 3

Bài 48. Tính thể tích các khối tròn xoay khi quay hình phẳng xác định bởi:

a) $y=2-x^2$, $y=1$, quay quanh trục Ox

b) $y=2x-x^2$, $y=x$, quay quanh trục Ox

c) $y=x^2+1$, $x=0$ và tiếp tuyến với $y=x^2+1$ tại $(1;2)$, quanh trục Ox

d) $y=\ln x$, $y=0$, $x=\mathrm{e}$, quanh trục Oy.

e) $y=x^2+x-5$, $x+y-3=0$, quay quanh trục Ox.

f) $y=\sqrt{x}$, $y=-x$, $x=5$, quay quanh trục Ox.

g) $y=(x-2)^2$, $y=4$, quay quanh trục Ox.

h) $y=4-x^2$, $y=x^2+2$, quay quanh trục Ox.

i) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$, $y=\dfrac{x^2}{2}$, quay quanh trục Ox.

j) $y=2x^2$, $y=2x+4$, quay quanh trục Ox.

k) $y=y^2=4x$, $y=x$, quay quanh trục Ox.

l) $y=x^{\frac{1}{2}}.\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$; $y=0$; $x=1$; $x=2$, quay quanh trục Ox.

m) $y=x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$, quay quanh trục Ox.

n) $y=x\ln x$; $y=0$; $x=1$; $x=\mathrm{e}$, quay quanh trục Ox.

o) $y=\ln x$; $y=0$; $x=1$; $x=2$, quay quanh trục Ox.

p) $y=x\sqrt{\ln(1+x^3)}$; $y=0$; $x=1$, quay quanh trục Ox.

q) $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$, quay quanh trục Ox.

r) $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$, quay quanh trục Ox.

s) $y=\sin^2 x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$, quay quanh trục Ox.

t) $y=0$, $y=\sqrt{\cos^6 x+\sin^6 x}$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, quay quanh trục Ox.

u) $y=0$, $y=\sqrt{1+\cos^4 x+\sin^4 x}$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, quay quanh trục Ox.

v) $y=0$, $y=\sqrt{\cos^2 x+x\sin x}$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, quay quanh trục Ox.

Bài 49. Tính thể tích các khối tròn xoay khi quay hình phẳng xác định bởi:

a) $y=\sqrt[3]{2x+1}$, $x=0$, $y=3$, quay quanh trục Oy.

b) $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$, quanh trục Oy.

c) $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$, $y=0$, quay quanh trục Oy.

d) $y=(x-2)^2$, $y=4$, quay quanh trục Oy.

e) $y=\frac{x^2}{2}$, $y=2$, $y=4$, $x=0$, quay quanh trục Oy.

f) $y=\frac{1}{2}x$, $y=x$, $y=2$, quay quanh trục Oy.

Bài 50. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\ (0\le x\le\pi)$ là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

Bài 51. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=f(x)$ cho bởi $y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{2-x^2} & \text{khi } -\sqrt{2}\le x\le 1\\ \frac{x^2}{2}-\frac{5x}{2}+3 & \text{khi } 1\le x\end{cases}$

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox

Bài 52. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $[0;3]$, cho bởi qui tắc $y=f(x)=\begin{cases}x & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 1 & \text{khi } 1\le x\le 2\\ 3-x & \text{khi } 2\le x\le 3\end{cases}$

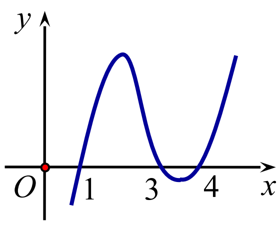
a) Vẽ đồ thị của hàm số $y=f(x)$.

b) Tính diện tích hình (H) chắn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và tục Ox.

c) Tính thể tích khối tròn xoay khi quay (H) quanh trục Ox.

Bài 53. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ trên $[1;4]$.

So sánh $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$.



Bài 54. Cho $I=\int_0^1 x(1-x)^{19}\,dx$.

a) Tính I. b) Rút gọn: $S=\frac{1}{2}C_{19}^0-\frac{1}{3}C_{19}^1+\frac{1}{4}C_{19}^2-\ldots+\frac{1}{20}C_{18}^{18}-\frac{1}{21}C_{19}^{19}$.

Bài 55. Cho n là số nguyên dương. Tính tổng: $C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+\frac{2^3-1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$.

Bài 56. Một học sinh tự chế tên lửa và phóng tên lửa từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $20\ \text{m/s}$. Giả sử bỏ qua sức cản của gió, tên lửa chỉ chịu tác động của trọng lực.

a) Hỏi sau $2\ \text{s}$ thì tên lửa đạt đến độ cao là bao nhiêu?

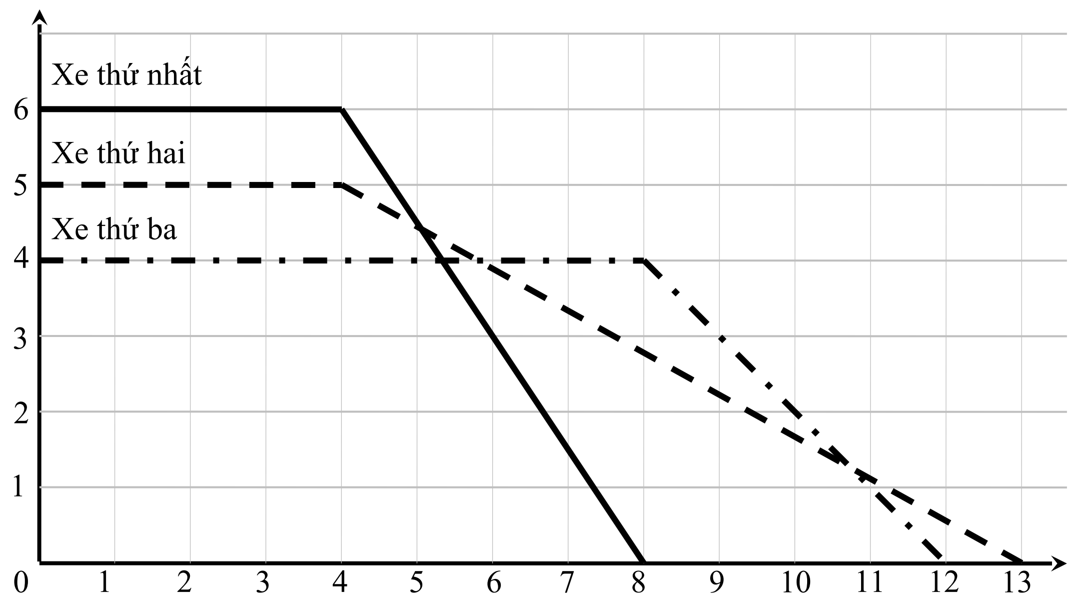
b) Tính độ cao lớn nhất mà tên lửa có thể đạt được.

Bài 57. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trong thành phố thì các xe khi dừng lại phải cách nhau một khoảng tối thiểu là 1m. Một xe máy di chuyển trên đường thì gặp đèn đỏ từ xa, người điều khiển xe máy đạp phanh và xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=10-5t\ (\text{m/s})$. Hỏi để giữ khoảng cách an toàn, người điều khiển xe máy phải bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng bao xa, biết rằng ngay lúc đạp phanh thì xe phía trước đang đứng yên?

Bài 58. Người ta thay nước mới cho 1 bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là $h_1=280\ \text{cm}$. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t)=\dfrac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì nước bơm được $\dfrac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi?

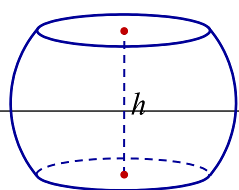
Bài 59. Một vận động viên điền kinh xuất phát chạy với gia tốc $a(t)=-\dfrac{1}{24}t^3+\dfrac{5}{16}t^2\ (\text{m/s}^2)$. Hỏi vào thời điểm $5\ \text{s}$ sau khi xuất phát thì vận tốc của vận động viên là bao nhiêu ?

Bài 60. Tại một thời điểm t trước lúc đỗ xe ở trạm dừng nghỉ, ba xe đang chuyển động đều với vận tốc lần lượt là $60\ \text{km/h}$. $50\ \text{km/h}$ và $40\ \text{km/h}$ Xe thứ nhất đi thêm 4 phút thì bắt đầu chuyển động chậm dần đều và dừng hẳn ở trạm tại phút thứ 8; xe thứ hai đi thêm 4 phút, bắt đầu chuyển động chậm dần đều và dừng hẳn ở trạm tại phút thứ 13, xe thứ hai đi thêm 8 phút, bắt đầu chuyển động chậm dần đều và dừng hẳn ở trạm tại phút thứ 12. Đồ thị biểu diễn vận tốc ba xe theo thời gian như sau: (đơn vị trục tung $x\ 10\ \text{km/h}$. đơn vị trục hoành là phút).



Giả sử tại thời điểm t trên, ba xe đang cách trạm lần lượt là d_1, d_2, d_3. So sánh các khoảng cách này.

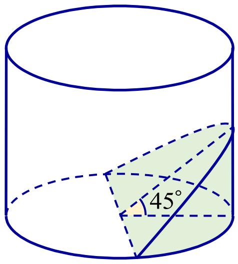
Bài 61. Coi cái trống trường là vật thể giới hạn bởi một mặt cầu bán kính $R=0,5\ \text{m}$ và hai mặt phẳng song song cách



đều tâm (như hình vẽ). Biết chiều cao của trống là $h = 0,8\text{ m}$.

Tính thể tích của cái trống.

Bài 62. Một vật thể bằng gỗ có dạng khối trụ với bán kính đáy bằng $10\left(\text{cm}\right)$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng có giao tuyến với đáy là một đường kính của đáy và tạo với đáy góc 45°. Tính thể tích của khối gỗ bé.



Bài 63. Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30 cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là 40 cm, chiều cao thùng rượu là 1 m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu (đơn vị lít) là bao nhiêu?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 3