

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ 1 – TOÁN 12 – ĐỀ SỐ 8

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án chọn.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án đúng nhất.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$			
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$+\infty$

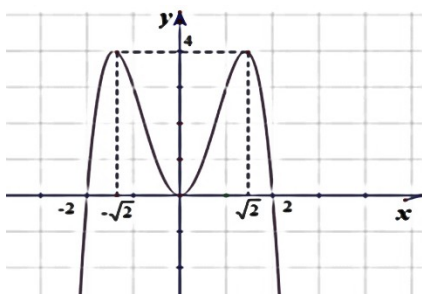
Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

- A. $(-1;1)$. B. $(0;1)$. C. $(4;+\infty)$. D. $(-\infty;2)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 1

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ là:



- A. $\max_{[0;2]} f(x) = 2$. B. $\max_{[0;2]} f(x) = \sqrt{2}$.
C. $\max_{[0;2]} f(x) = 4$. D. $\max_{[0;2]} f(x) = 0$.

Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

- A. 201 B. 2 C. 9 D. 54

Câu 5. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ là

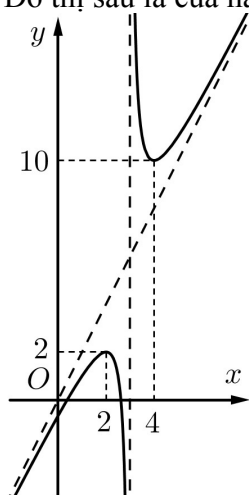
- A. $x = -2$. B. $x = 1$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{-4x^2 - 2x - 5}{-x + 2}$. Đường tiệm cận xiên của hàm số là

- A. $y = 4x + 10$.
B. $y = 4x + 10$.
C. $y = 4x + 10$.

D. $y = 4x + 10$

Câu 7. Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{2x^2 - 6x + 2}{x - 3}$

B. $y = \frac{2x^2 - 6x + 2}{x + 3}$

C. $y = \frac{x^2 - 6}{x - 3}$

D. $y = \frac{x^2 - 6}{x + 3}$

Câu 8. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 0

B. 1

C. 2

D. -2

Câu 9. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, vector bằng vector $\overrightarrow{AB}$ là vector nào dưới đây?

A. $\overrightarrow{D'C'}$

B. $\overrightarrow{BA}$

C. $\overrightarrow{CD}$

D. $\overrightarrow{B'A'}$

Câu 10. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$

B. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$

C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$

D. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy .

A. $A'(2; 3; 5)$

B. $A'(2; -3; -5)$

C. $A'(-2; -3; 5)$

D. $A'(-2; -3; -5)$

Câu 12. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1; 3)$, $B(-2; -2)$, $C(3; 1)$. Tính cosin góc A của tam giác.

A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$

B. $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$

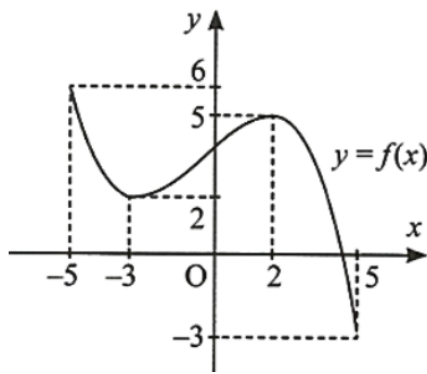
C. $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

D. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai.

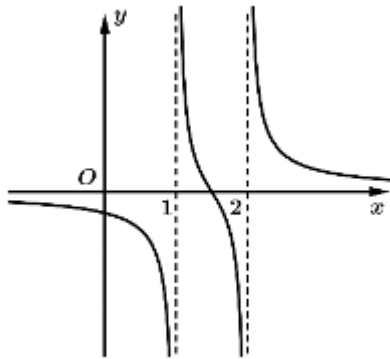
Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như sau:



- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$,
- b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-5; -3)$ và $(2; 5)$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ có $x = -3$ là điểm cực tiểu
- d) Hàm số $y = f(x)$ có $x = 2$ là điểm cực đại

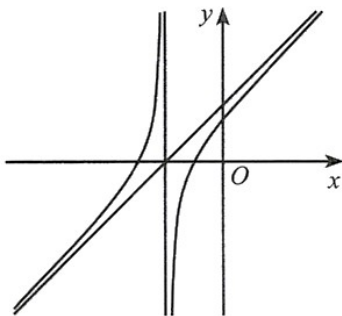
Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x - 3}{5x^2 - 15x + 10}$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Đồ thị hàm số $f(x)$ có ba đường tiệm cận.
- b) Đường thẳng $x = 1, x = 2$ là hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- c) Đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- d) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + n}$ có đồ thị là đường cong ở Hình.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) $n < 0$.
- b) $a > 0$.
- c) $c > 0$.
- d) $b < 0$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $A(4; 6; -5), B(5; 7; -4), C(5; 6; -4), D(2; 0; 2)$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$.
- b) Tọa độ của điểm D là $(4; 5; -5)$.
- c) $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.
- d) Tọa độ của điểm C' là $(1; 3; 1)$.

Phần 3. Câu trả lời ngắn.

Thí sinh trả lời đáp án từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho bất phương trình $x^2 - (m+1)x - m + 2 \geq 0$, với m là tham số thực. Tìm giá trị lớn nhất của m sao cho bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 4]$.

Câu 2. Người ta muốn làm một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có đáy hình vuông và thể tích là $10l$. Diện tích toàn phần nhỏ nhất của hộp là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Câu 3. Quan sát một đàn ong trong 20 tuần, người ta ước lượng được số lượng ong trong đàn bởi công thức $P(t) = \frac{20000}{1+1000e^{-t}}$, trong đó t là thời gian tính theo tuần kể từ khi bắt đầu quan sát, $0 \leq t \leq 20$. Tại thời điểm nào thì số lượng ong của đàn tăng nhanh nhất (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của tuần)?

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có tất cả các mặt bên là hình thoi cạnh $2\sqrt{6}$, các góc $\angle BAA' = \angle BAD = \angle DAA' = 60^\circ$. Tính độ dài đường chéo AC' .

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $a = (1; x+1; 1), b = (2; 1; -1), c = (1; 3; -3)$, với x là số thực thay đổi. Đặt $P = |a+b| + |a-c|$, tính giá trị nhỏ nhất của P (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Câu 6. Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=4$ và $xy+yz+zx=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $(x^3+y^3+z^3)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ bằng?

PHIẾU TRẢ LỜI

PHẦN I

	A	B	C	D
1	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐

	A	B	C	D
11	☐	☐	☐	☐
12	☐	☐	☐	☐

Điểm

Điểm phần I: đ

Điểm phần II: đ

Điểm phần III: đ

Tổng: đ

PHẦN II

Câu 1	Câu 2
Đúng Sai	Đúng Sai
a) ☐ ☐	☐ ☐
b) ☐ ☐	☐ ☐
c) ☐ ☐	☐ ☐
d) ☐ ☐	☐ ☐

Câu 3	Câu 4
Đúng Sai	Đúng Sai
a) ☐ ☐	☐ ☐
b) ☐ ☐	☐ ☐
c) ☐ ☐	☐ ☐
d) ☐ ☐	☐ ☐

PHẦN III

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
- ☐	- ☐	- ☐	- ☐	- ☐	- ☐
, ☐	, ☐	, ☐	, ☐	, ☐	, ☐
0 ☐	0 ☐	0 ☐	0 ☐	0 ☐	0 ☐
1 ☐	1 ☐	1 ☐	1 ☐	1 ☐	1 ☐
2 ☐	2 ☐	2 ☐	2 ☐	2 ☐	2 ☐
3 ☐	3 ☐	3 ☐	3 ☐	3 ☐	3 ☐
4 ☐	4 ☐	4 ☐	4 ☐	4 ☐	4 ☐
5 ☐	5 ☐	5 ☐	5 ☐	5 ☐	5 ☐
6 ☐	6 ☐	6 ☐	6 ☐	6 ☐	6 ☐
7 ☐	7 ☐	7 ☐	7 ☐	7 ☐	7 ☐
8 ☐	8 ☐	8 ☐	8 ☐	8 ☐	8 ☐
9 ☐	9 ☐	9 ☐	9 ☐	9 ☐	9 ☐

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án chọn.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án đúng nhất.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	4	$+\infty$	

Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

- A. $(-1; 1)$ B. $(0; 1)$ C. $(4; +\infty)$ D. $(-\infty; 2)$

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 1

Lời giải

Chọn A

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+4)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

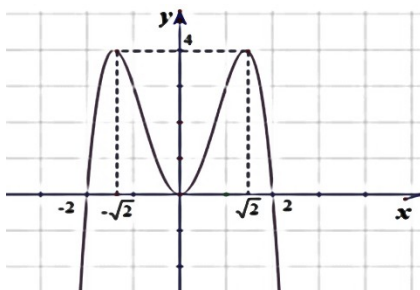
Ta có:

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-4	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$						$+\infty$
							

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực tiểu.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ là:



- A. $\max_{[0;2]} f(x) = 2$. B. $\max_{[0;2]} f(x) = \sqrt{2}$.
C. $\max_{[0;2]} f(x) = 4$. D. $\max_{[0;2]} f(x) = 0$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $[0; 2]$ hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 4 khi $x = \sqrt{2}$

Suy ra $\max_{[0;2]} f(x) = 4$

- Câu 4.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng
A. 201 B. 2 C. 9 D. 54

Lời giải

Chọn D

$$y' = 4x^3 - 8x; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Ta có $y(-2) = 9$; $y(3) = 54$; $y(0) = 9$; $y(\pm\sqrt{2}) = 5$

Vậy $\max_{[-2;3]} y = 54$

- Câu 5.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ là
A. $x = -2$. B. $x = 1$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-2}{x+1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-2}{x+1} = +\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Câu 6.** Cho hàm số $y = \frac{-4x^2 - 2x - 5}{-x + 2}$. Đường tiệm cận xiên của hàm số là
A. $y = 4x + 10$.
B. $y = 4x + 10$.

C. $y = 4x + 10$.

D. $y = 4x + 10$.

Lời giải

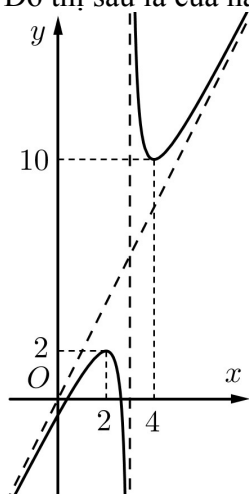
Giả sử đường tiệm cận xiên có dạng $y = ax + b$. Ta tìm hệ số a và b như sau

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 - 2x - 5}{-x + 2} = 4; b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-4x^2 - 2x - 5}{-x + 2} - 4x \right) = 10 \Rightarrow y = 4x + 10$$

Do đó ta được tiệm cận xiên là $y = 4x + 10$.

Chọn đáp án **D.**

Câu 7. Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{2x^2 - 6x + 2}{x - 3}$

B. $y = \frac{2x^2 - 6x + 2}{x + 3}$

C. $y = \frac{x^2 - 6}{x - 3}$

D. $y = \frac{x^2 - 6}{x + 3}$

Câu 8. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. -2.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung. Ta có $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2$.

Câu 9. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, vector bằng vector $\overrightarrow{AB}$ là vector nào dưới đây?

A. $\overrightarrow{D'C'}$.

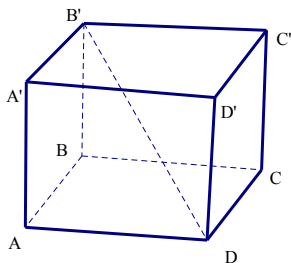
B. $\overrightarrow{BA}$.

C. $\overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{B'A'}$.

Lời giải

Chọn A



Dễ dàng thấy $\overline{AB} = \overline{D'C'}$.

Câu 10. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

A. $\overline{AO} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1})$.

B. $\overline{AO} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1})$.

C. $\overline{AO} = \frac{1}{4}(\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1})$.

D. $\overline{AO} = \frac{2}{3}(\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1})$.

Lời giải

Chọn B

$$\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$$

Theo quy tắc hình hộp:

Mà $\overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC_1}$ nên $\overline{AO} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1})$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy .

A. $A'(2; 3; 5)$

B. $A'(2; -3; -5)$

C. $A'(-2; -3; 5)$

D. $A'(-2; -3; -5)$

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(2; -3; 5)$ lên Oy . Suy ra $H(0; -3; 0)$

Khi đó H là trung điểm đoạn AA' .

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -2 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = -3 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -5 \end{cases} \Rightarrow A'(-2; -3; -5)$$

Câu 12. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1; 3)$, $B(-2; -2)$, $C(3; 1)$. Tính cosin góc A của tam giác.

A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$

B. $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$

C. $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

D. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; -5)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -2)$.

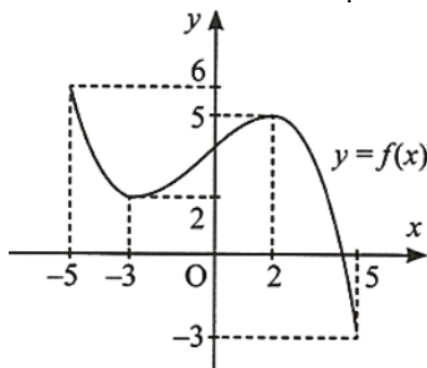
Khi đó:

$$\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-3 \cdot 2 + 5 \cdot 2}{\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như sau:



- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$,
- b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-5; -3)$ và $(2; 5)$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ có $x = -3$ là điểm cực tiểu
- d) Hàm số $y = f(x)$ có $x = 2$ là điểm cực đại

Lời giải

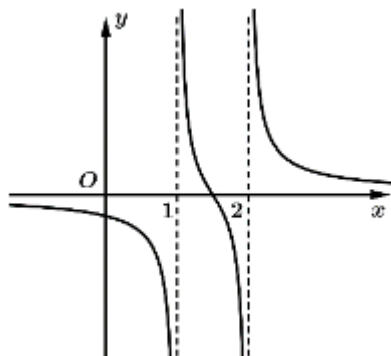
a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$, nghịch biến trên các khoảng $(-5; -3)$ và $(2; 5)$.			

Hàm số $y = f(x)$ có:

$x = -3$ là điểm cực tiểu vì $f(x) > f(-3)$ với mọi $x \in (-5; 0) \setminus \{-3\}$, $y_{CT} = f(-3) = 2$.

$x = 2$ là điểm cực đại vì $f(x) < f(2)$ với mọi $x \in (0; 5) \setminus \{2\}$, $y_{CD} = f(2) = 5$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x - 3}{5x^2 - 15x + 10}$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Đồ thị hàm số $f(x)$ có ba đường tiệm cận.
 b) Đường thẳng $x=1, x=2$ là hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
 c) Đường thẳng $x=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
 d) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng. Đồ thị hàm số $f(x)$ có 3 đường tiệm cận.

$x=1; x=2$ là 2 đường tiệm cận đứng.

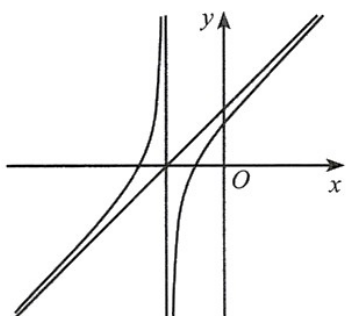
$y=0$ là đường tiệm cận ngang.

b) Đúng. Đường thẳng $x=1; x=2$ là 2 đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

c) Sai. Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

d) Sai. Hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + n}$ có đồ thị là đường cong ở Hình.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) $n < 0$.
 b) $a > 0$.
 c) $c > 0$.
 d) $b < 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

- Tiệm cận đứng của đồ thị là đường thẳng $x = -n$ nằm bên trái trục tung nên

- $n < 0$ hay $n > 0$.

- Tiệm cận xiên có hệ số góc là a có hướng đi lên từ trái sang phải nên $a > 0$.

- Đồ thị cắt trục tung tại điểm $\left(0; \frac{c}{n}\right)$ nằm phía trên trục hoành nên $c > 0$.
- Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ âm nên phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt. Do đó, $-\frac{b}{a} < 0$ hay $b > 0$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $A(4; 6; -5), B(5; 7; -4), C(5; 6; -4), D(2; 0; 2)$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$.
- b) Tọa độ của điểm D là $(4; 5; -5)$.
- c) $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.
- d) Tọa độ của điểm C' là $(1; 3; 1)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$.

b) Gọi tọa độ của điểm D là $(x_D; y_D; z_D)$, ta có: $\overrightarrow{DC} = (5 - x_D; 6 - y_D; -4 - z_D)$. Trong hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 5 - x_D = 1 \\ 6 - y_D = 1 \\ -4 - z_D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 5 \\ z_D = -5. \end{cases}$$

Vậy tọa độ của điểm D là $(4; 5; -5)$.

c) d) Tương tự, từ các đẳng thức vector $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$, ta suy ra được tọa độ của các điểm còn lại $A'(2; 1; 2), B'(3; 2; 3)$ và $C'(3; 1; 3)$.

Phần 3. Câu trả lời ngắn.

Thí sinh trả lời đáp án từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho bất phương trình $x^2 - (m+1)x - m + 2 \geq 0$, với m là tham số thực. Tìm giá trị lớn nhất của m sao cho bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 4]$.

Lời giải

Trả lời: 1

Với $x \in [0; 4]$, ta có:

$$\begin{aligned} x^2 - (m+1)x - m + 2 \geq 0 &\Leftrightarrow x^2 - x + 2 \geq m(x+1) \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 2}{x+1} \geq m \text{ (do } x+1 > 0, \forall x \in [0; 4]). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}, x \neq -1$. Hàm số này liên tục trên $[0; 4]$;
 $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -3$ (loại vì $-3 \notin [0; 4]$).
 $f(0) = 2; f(1) = 1; f(4) = \frac{14}{5}$.

Suy ra $\min_{[0; 4]} f(x) = f(1) = 1$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 4] \Leftrightarrow m \leq \min_{[0; 4]} f(x) \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 2. Người ta muốn làm một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có đáy hình vuông và thể tích là $10l$. Diện tích toàn phần nhỏ nhất của hộp là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 27,8

Đặt $x(dm)$ là độ dài cạnh đáy của chiếc hộp hình hộp chữ nhật ($x > 0$).

Khi đó chiều cao của chiếc hộp là $\frac{10}{x^2}(dm)$.

Diện tích toàn phần của chiếc hộp là $S = 2x^2 + 4x \cdot \frac{10}{x^2} = 2x^2 + \frac{40}{x}(dm^2)$.

Diện tích toàn phần nhỏ nhất của chiếc hộp là $6\sqrt[3]{100}dm^2$ khi $x = \sqrt[3]{10}dm$.

Câu 3. Quan sát một đàn ong trong 20 tuần, người ta ước lượng được số lượng ong trong đàn bởi công

thức $P(t) = \frac{20000}{1 + 1000e^{-t}}$, trong đó t là thời gian tính theo tuần kể từ khi bắt đầu quan sát, $0 \leq t \leq 20$. Tại thời điểm nào thì số lượng ong của đàn tăng nhanh nhất (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của tuần)?

Lời giải

Trả lời: 7

Tốc độ thay đổi số lượng ong của đàn theo thời gian t là

$$T(t) = P'(t) = 2 \cdot 10^7 \cdot \frac{e^{-t}}{(1 + 1000e^{-t})^2}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} T'(t) &= 2 \cdot 10^7 \cdot \frac{-e^{-t} \cdot (1 + 1000e^{-t})^2 - e^{-t} \cdot 2 \cdot (1 + 1000e^{-t}) \cdot (-1000e^{-t})}{(1 + 1000e^{-t})^4} \\ &= 2 \cdot 10^7 \cdot \frac{e^{-t}(1000e^{-t} - 1)}{(1 + 1000e^{-t})^3} = 2 \cdot 10^7 \cdot \frac{e^{-t}(1000 - e^t)}{(1 + 1000e^{-t})^3}. \end{aligned}$$

$$T'(t) = 0 \Leftrightarrow 1000 - e^t = 0 \Leftrightarrow t = \ln 1000.$$

Bảng xét dấu của đạo hàm:

t	0	$\ln 1000$	20
$T'(t)$		+	-

Từ đó, $T(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = \ln 1000 \approx 7$.

Vậy đàn ong tăng nhanh nhất tại thời điểm khoảng $t = 7$ tuần.

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có tất cả các mặt bên là hình thoi cạnh $2\sqrt{6}$, các góc $\angle BAA' = \angle BAD = \angle DAA' = 60^\circ$. Tính độ dài đường chéo AC' .

Lời giải

Trả lời: 12

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ thì $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2\sqrt{6}$ và $(\vec{a}; \vec{b}) = (\vec{b}; \vec{c}) = (\vec{c}; \vec{a}) = 60^\circ$. Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC'} &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow AC^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= 3 \cdot (2\sqrt{6})^2 + 3 \cdot (2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} \cdot \cos 60^\circ) = 144 \Rightarrow AC' = 12. \end{aligned}$$

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (1; x+1; 1), \vec{b} = (2; 1; -1), \vec{c} = (1; 3; -3)$, với x là số thực thay đổi. Đặt $P = |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{c}|$, tính giá trị nhỏ nhất của P (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 8

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (3; x+2; 0) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(x+2)^2 + 3^2}$

Lại có $\vec{a} - \vec{c} = (0; x-2; 4) \Rightarrow |\vec{a} - \vec{c}| = \sqrt{(x-2)^2 + 4^2}$

$$\Rightarrow P = \sqrt{(x+2)^2 + 3^2} + \sqrt{(x-2)^2 + 4^2} \geq \sqrt{[(x+2) + (x-2)]^2 + (3+4)^2} = \sqrt{65} \approx 8$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x+2}{3} = \frac{x-2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{4}{7}$.

Câu 6. Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=4$ và $xy+yz+zx=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $(x^3+y^3+z^3)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ bằng:

Lời giải

Trả lời: 25

Ta có:
$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ xy+yz+zx=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4-z \\ xy=5-z(x+y)=5-4z+z^2 \end{cases}$$

Lại có: $(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow (4-z)^2 \geq 4(5-4z+z^2) \Rightarrow \frac{2}{3} \leq z \leq 2$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y$.

Và $(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(x+y)z+3xy(x+y)$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 4^3 - 12(x+y)z - 3xy(x+y) = 64 - 3(4-z)(5+z^2)$$

Ta có:
$$P = (x^3 + y^3 + z^3) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = (3z^3 - 12z^2 + 15z + 4) \left(\frac{5}{z^3 - 4z^2 + 5z} \right)$$

Đặt $t = z^3 - 4z^2 + 5z$, với $\frac{2}{3} \leq z \leq 2 \Rightarrow \frac{50}{27} \leq t \leq 2$

Do đó xét hàm số $f(t) = 5 \left(\frac{4}{t} + 3 \right)$, với $\frac{50}{27} \leq t \leq 2$

Ta có $f'(t) = \frac{-20}{t^2} < 0, \forall t \in \left[\frac{50}{27}; 2 \right]$ nên hàm số $f(t)$ liên tục và nghịch biến.

Do đó $P_{\min} = f(2) = 25$ đạt tại $x = y = 1, z = 2$.