# Chuyên đề 2. Số chính phương

**TÓM TẮT LÍ THUYẾT**

**I**

1. **Định nghĩa**

Số chính phương là số bằng bình phương đúng của một số nguyên.

1. **Tính chất**
2. Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9; không thể có chữ tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Tận cùng của số | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Tận cùng của bình phương | 0 | 1 | 4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 |

1. Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.
2. Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng  hoặc  Không có số chính phương nào có dạng  hoặc 
3. Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng  hoặc  Không có số chính phương nào có dạng 
4. Số chính phương tận cùng bằng 1, 4 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn. Số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2. Số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.
5. Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4. Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9 Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25. Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.
6. Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số đó là số 0.
7. Số các ước của một số chính phương là số lẻ. Ngược lại, một số có số các ước là số lẻ thì số đó là số chính phương.
8. Nếu hai số tự nhiên a và b nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số a, b cũng là các số chính phương.
9. Mọi số chính phương khi chia cho 5, cho 8 chỉ dư 1, 0, 4.
10. Số  thì  khi đó 

**CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP**

**II**

**Dạng 1. Chứng minh một số là số chính phương, hoặc là tổng nhiều số chính phương**

Phương pháp

**1**

Để chứng minh một số  là số là số chính phương ta thường dựa vào định nghĩa



Ví dụ minh họa

**2**

1. Cho . Chứng minh A là một số chính phương.
2. Cho **, **. Chứng minh  là số tự nhiên.
3. Cho số tự nhiên *a* gồm 60 chữ số 1, số tự nhiên *b* gồm 30 chữ số 2. Chứng minh *a - b* là một số chính phương.

Bài tập tương tự

**3**

1. Chứng minh rằng mọi số nguyên  thì biểu thức

A= *(x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + * có giá trị là số chính phương.

1. Chứng minh tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 là số chính phương.
2. Cho dãy số 49; 4489; 444889; 44448889; . . . Dãy số trên được xây dựng bằng cách thêm số 48 vào giữa các chữ số đứng trước và đứng sau nó. Chứng minh rằng tất cả các số của dãy trên đều là số chính phương.
3. Chứng minh nếu  là các số nguyên thỏa mãn hệ thức  thì  và  là những số chính phương.
4. Cho  là 3 số nguyên thỏa mãn điều kiện . Chứng minh rằng  là 1 số chính phương.

**Dạng 2. Chứng minh một số không là số chính phương.**

Phương pháp

**1**

***Cơ sở phương pháp:*** Để chứng minh  không là số chính phương, tùy vào từng bài toán ta có thể sử dụng các cách sau:

**⮚ Phương pháp 1.** Chứng minh  không thể viết được dưới dạng một bình phương một số nguyên.

**⮚** **Phương pháp 2.** Chứng minh  với  là số nguyên.

**⮚** **Phương pháp 3.** Chứng minh  có tận cùng là 2; 3; 7; 8.

**⮚** **Phương pháp 4.** Chứng minh  có dạng 

**⮚** **Phương pháp 5.** Chứng minh  có dạng 

**⮚** **Phương pháp 6.** Chứng minh  chia hết cho số nguyên tố  mà không chia hết cho .

Ví dụ minh họa

**2**

1. Chứng minh rằng số có dạng  trong đó  và không phải là số chính phương.

Bài tập tương tự

**3**

1. Cho . Hỏi A có là số chính phương không? Vì sao?
2. Chứng minh nếu tồn tại số nguyên dươngthỏa mãn  là 1 số chính phương thì  là hợp số.
3. Chứng minh số   không thể là số chính phương.
4. Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương.
5. Cho a, b, c là các chữ số khác 0. Gọi S là tổng của tất cả các số có ba chữ số tạo thành bởi các chữ số a ; b ; c. Chứng minh rằng S không phải là số chính phương.

Các bài toán thi

**4**

1. Chứng minh rằng  không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

(*Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh 2015 - 2016*)

**Dạng 3. Điều kiện để một số là số chính phương.**

Phương pháp

**1**

***Cơ sở phương pháp:*** Chúng ta thường sử dụng các phương pháp sau:

**⮚** **Phương pháp 1:** Sử dụng định nghĩa.

**⮚** **Phương pháp 2:** Sử dụng tính chẵn, lẻ.

**⮚** **Phương pháp 3:** Sử dụng tính chất chia hết và chia có dư.

**⮚** **Phương pháp 4:** Sử dụng các tính chất.

Ví dụ minh họa

**2**

1. Tìm số tự nhiên x để biểu thức  có giá trị là một số chính phương.
2. Tìm  để  là 1 số chính phương.

Bài tập tương tự

**3**

1. Tìm các số nguyên  sao cho  là một số chính phương.
2. Tìm  để ++ là số chính phương .
3. Tìm tất cả số tự nhiên x,y để 2x + 5y là số chính phương.
4. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho số  là số chính phương.
5. Tồn tại hay không số nguyên  thỏa mãn  là một số chính phương .
6. Có hay không số tự nhiên n để 2010 + n2 là số chính phương.
7. Người ta viết liên tiếp các số 1 ; 2 ; 3 ; 4 ;... ;1994 thành một hàng ngang theo một thứ tự tùy ý. Hỏi số tạo thành theo cách viết trên có thể là số chính phương không ?

Các bài toán thi

**4**

1. Tìm tất cả các số nguyên tố  và  sao cho  là một số chính phương.

*(Đề thi TS10 Chuyên Toán – Bình Định 2020)*

1. Tìm số tự nhiên n  1 sao cho tổng 1! + 2! + 3! + … + n! là một số chính phương.

*(Đề thi HSG lớp 6 - Phòng giáo dục đào tạo Phúc Yên - Vĩnh Phúc)*

1. Tìm số nguyên dương n sao cho  là số một chính phương.

*(Đề thi chọn HSG Toán 9 tỉnh Thái Bình)*

1. Tìm các số nguyên tố  sao cho 2 số  và  là 2 số chính phương.

*(Đề thi chọn HSG Toán 9 trường Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế).*

1. Tìm số nguyên dương n sao cho  là số chính phương .

*(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT Chuyên Lam Sơn- Thanh Hóa. Năm học 2012-2013)*

1. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho  có giá trị là số chính phương.

*(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An. Năm học 2010-2011)*

1. Tìm các số tự nhiên n sao cho có giá trị là số chính phương.

*(Đề thi chọn HSG Toán 9, tỉnh Quảng Ngãi).*

1. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho  là số chính phương.

*(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT Chuyên KHTN Hà Nội )*

1. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho số  là số chính phương.

*(Đề thi chọn HSG Toán 9, huyện Vĩnh Tường. Năm học 2014 - 2015)*

1. Tìm số tự nhiên n để *n + 18* và *n - 41* là hai số chính phương.

*(Đề thi giao lưu HSG lớp 8- năm học 2013-2014- Phòng GD Vĩnh Tường)*

1. Cho A = 200.(92013 + 92012 + ..... + 92 + 9 + 1)

Chứng minh rằng A+25 là số chính phương.

*(Đề thi giao lưu HSG lớp 7- năm học 2012-2013- Phòng GD Vĩnh Tường)*

1. Chứng minh rằng số  không là số chính phương.

*(Đề thi giao lưu HSG lớp 8- năm học 2012-2013- Phòng GD Yên Lạc)*

1. Cho n là tổng của hai số chính phương. CMR n2 cũng là tổng của hai số chính phương.

*(Đề thi giao lưu HSG lớp 8- năm học 2012-2013- Phòng GD Yên Lạc)*

**Dạng 4. Tìm số chính phương.**

Phương pháp

**1**

***Cơ sở phương pháp:*** Dựa vào định nghĩa về số chính phương  với  là số nguyên và các yêu cầu của bài toán để tìm ra số chính phương thỏa bài toán.

Ví dụ minh họa

**2**

1. Tìm số chính phương  biết .

Bài tập tương tự

**3**

1. Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.
2. Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng hiệu các bình phương của số đó và số viết bởi hai chữ số của số đó nhưng theo thứ tự ngược lại là một số chính phương.
3. Tìm số có 2 chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.
4. Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.
5. Tìm 3 số lẻ liên tiếp mà tổng bình phương là một số có 4 chữ số giống nhau.

Các bài toán thi

**4**

1. Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B. Hãy tìm các số A và B.

*(Đề thi TS vào lớp 10 chuyên trường THPT Lê Hồng Phong - TP Hồ Chí Minh. Năm học 2005- 2006)*