**Bài 16.** 

Hướng dẫn: Sử dụng ẩn phụ hóa hai căn thức hoặc thêm bớt liên hợp tách nhân tử 

 Đáp số: 

**Bài 17.** 

Hướng dẫn: Để ý:  Đặt ẩn phụ hóa. Đáp số: 

**Bài 18.** 

Hướng dẫn: Đặt ẩn phụ hóa căn thức. Đáp số: 

**Bài 19.** 

Hướng dẫn: Bình phương hai vế và ẩn phụ hóa. Đáp số: 

**Bài 20.** 

Hướng dẫn: Sử dụng tách nhân tử và ẩn phụ hóa. Đáp số: 

**Bài 21.** 

Hướng dẫn: Biến đổi phương trình và đặt  Đáp số: 

**Bài 22.** 

Hướng dẫn: Biến đổi phương trình đặt   hoặc đặt  Đáp số: 

**Bài 23.** 

Hướng dẫn: Đặt ẩn phụ hóa các căn thức hoặc chỉ một căn thức. Đáp số: .

**Bài 24.** 

Hướng dẫn: Sử dụng ẩn phụ hóa hai căn thức hoặc biến đổi phương trình rồi đặt ẩn phụ.

Đáp số: 

**Bài 25.** 

Hướng dẫn: Sử dụng ẩn phụ hóa căn thức đưa phương trình về phương trình tham số biến thiên có biệt thức  là số chính phương. Đáp số: 

**Bài 26.** 

Hướng dẫn: Sử dụng phép nâng lũy thừa hoặc ẩn phụ hóa căn thức đưa về phương trình tham số biến thiên có biệt thức chính phương. Đáp số: 

**Bài 27.** 

Hướng dẫn: Đặt  Đáp số: 

**Bài 28.** 

Hướng dẫn: Sử dụng ẩn phụ hóa. Đáp số: 

**Bài 29.** 

Hướng dẫn: Sử dụng phép nâng lũy thừa hoặc đặt ẩn phụ hóa đưa về hệ phương trình đối xứng.

 Đáp số: 

**Bài 30.** 

Hướng dẫn: Sử dụng ẩn phụ hóa đưa phương trình về hệ phương trình đối xứng. Đáp số: 

**Bài 31.** 

Hướng dẫn: Ẩn phụ hóa đưa phương trình về tổng hai số không âm. Đáp số: 

**Bài 32.** 

Hướng dẫn: Sử dụng hằng đẳng thức đưa phương trình về tổng hai số không âm. Đáp số: 

**Bài 33.** 

Hướng dẫn: Sử dụng hằng đẳng thức biến đổi phương trình về tổng hai số không âm. Đáp số: 

**Bài 34.** 

Hướng dẫn. Sử dụng hằng đẳng thức biến đổi phương trình về tổng hai số không âm hoặc ẩn phụ hóa.

 Đáp số: 

**Bài 35.** 

Hướng dẫn: Sử dụng hằng đẳng thức và liên hợp. Đáp số: 

**Bài 36.** 

Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp. Đáp số: 

**Bài 37.** 

Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp. Đáp số: 

**Bài 38.** 

Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp. Đáp số: 

**Bài 39.** 

Hướng dẫn: Đặt ẩn phụ đưa về liên hợp hoặc đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchuy. Đáp số: 

**Bài 40.** 

Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp. Đáp số: 

**Bài 41.** 

Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp. Đáp số: 

**Bài 42.** 

Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp và kết hợp với phương trình đã cho.

 Đáp số: 

**Bài 43.** 

Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp. Đáp số: 

**Bài 44.** 

Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp. Đáp số: 

**Bài 45.** 

Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp hoặc ẩn phụ. Đáp số: 

**Bài 46.**

Hướng dẫn: Sử dụng hàm số đặc trưng. Đáp số: 

**Bài 47.** 

Hướng dẫn: Sử dụng hàm số đặc trưng. Đáp số: 

**Bài 48.** 

Hướng dẫn: Sử dụng hàm đặc trưng. Đáp số:

**Bài 49.** 

Hướng dẫn: Sử dụng hàm số đặc trưng. Đáp số: 

**Bài 50.** 

Hướng dẫn: Đặt  kết hợp với xét hàm số đặc trưng. Đáp số: 

**Bài 51.** 

Hướng dẫn: Sử dụng xét hàm số đặc trưng. Đáp số: 

**Bài 52.** 

Hướng dẫn: Đặt ẩn phụ căn thức kết hợp với sử dùng tính đơn điệu của hàm số. Đáp số: 

**Bài 53.** 

Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thức hình học đánh giá. Đáp số: 

**Bài 54.** 

Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thức hình học đánh giá. Đáp số: 

**Bài 55.** 

Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thức Cauchuy đánh giá. Đáp số: 

**Bài 56.** 

Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thức B.C.S đánh giá. Đáp số: 

**Bài 57.** 

Hướng dẫn: Sử dụng hàm số hoặc bất đẳng thức B.C.S đánh giá. Đáp số: 

**Bài 58.** 

Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thức để đánh giá. Đáp số: 

**CHƯƠNG 3: SỰ KẾT HỢP GIỮA CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ.**

**- Chương này giới thiệu cùng bạn đọc:**

Chương đầu tiên của cuốn sách đã cung cấp cho chúng ta đầy đủ các phương pháp điển hình được sử dụng để giải một phương trình vô tỷ.

Chương thứ hai đã giúp cho chúng ta có được những hướng đi đúng đắn và sự lựa chọn phương pháp giải tối ưu khi đứng trước một phương trình vô tỷ.

Trong chương thứ ba này, các bạn đọc giải sẽ được trải nghiệm một lớp các phương trình vô tỷ. Mà, nếu chỉ sử dụng một phương pháp nào đó ta rất khó có thể giải quyết được hoàn toàn phương trình. Nhưng khi ta biết kết hợp nhiều phương pháp lại với nhau, các phương trình vô tỷ sẽ được giải quyết một cách triệt để. Và sự kết hợp đó chúng tôi gọi là “nghệ thuật giải phương trình vô tỷ”. Sở dĩ chúng tôi gọi như vậy bởi vì sự kết hợp nhiều phương pháp giải một phương trình vô tỷ sẽ cho ta một lời giải không chỉ hoàn thiện mà còn rất tự nhiên. Ngay sau đây sẽ là một hệ thống các bài tập điển hình nhằm rèn luyện các bạn những kỷ năng thiết yếu nhất của “nghệ thuật kết hợp” này.

**I/ SỰ KẾT HỢP GIỮA PHƯƠNG PHÁP NÂNG LŨY THỪA VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC.**

**Ví dụ 1.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Phương trình có dạng  nên bước đầu chúng ta có thể nghĩ ngay đến phương pháp nâng lũy thừa để phá bỏ lớp căn thức ngoài cùng. Sau phép nâng lũy thừa hai vế phương trình ta thu được phương trình sau đây: 

Nếu tiếp tục thực hiện phép nâng lũy thừa cho phương trình này, ta sẽ thu được phương trình bậc cao lại không có nghiệm hữu tỉ. Với đặc điểm các biểu thức trong phương trình , chúng ta có thể nghĩ đến một hướng giải khác đó là sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ. Từ đó, ta có lời giải cho bài toán như sau:

**Lời giải**

Điều kiện:  Khi đó, phương trình đã cho tương đương với



 . Đặt  

Phương trình trở thành:   

Ta có     (vì ). Giá trị  thỏa mãn phương trình ban đầu nên đây là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

**- Bình luận.** Đôi khi ta gặp một số phương trình mà việc tìm điều kiện của ẩn khó khăn thì ta không nhất thiết phải tìm ra các giá trị cụ thể của ẩn để phương trình xác định. Chú ý khi tìm được nghiệm thì phải thử lại các điều kiện của bài toán. Rõ ràng, trong bài toán trên nếu chỉ sử dụng mỗi phương pháp nâng lũy thừa không thôi thì phương trình chưa thể giải quyết được hoàn toàn. Nhưng khi có sự kết hợp với phương pháp đặt ẩn phụ, bài toán được giải quyết hoàn toàn và lời giải cho bài toán trên rất tự nhiên và ngắn gọn.

Bài tập tương tự:

1. Giải phương trình 

2. Giải phương trình 

**Ví dụ 2.** Giải phương trình 

(Đề thi HSG các trường chuyên KV Duyên hải và Đồng Bằng Bắc Bộ năm 2010).

**- Phân tích**. Đối với phương trình này, ý tưởng đầu tiên xuất hiện trong đầu ta đó là thực hiện phương pháp nâng lũy thừa. Tuy nhiên, để đảm bảo hai vế không âm, sau khi chuyển vế và thực hiện bình phương hai vế ta được:



Nếu tiếp tục thực hiện phép nâng lũy thừa cho phương trình  ta sẽ thu được phương trình bậc cao sẽ gây khó khăn cho ta. Điều này có nghĩa là phương pháp nâng lũy thừa không thể một mình giải quyết hoàn toàn được phương trình trên. Do đó, ta cần một hướng đi khác để giải quyết phương trình . Bằng kỉ năng biến đổi khéo léo phương trình  ta có:



Đến đây, phương trình  đã lộ rõ nguyên hình. Đây rõ ràng là một phương trình đẳng cấp bậc 2, và để giải quyết nó một cách đơn giản nhất ta sẽ chọn phương pháp đặt ẩn phụ.

**Lời giải**

Điều kiện:   Khi đó, chuyển vế rồi bình phương hai vế ta được: 



Đặt   Phương trình trở thành

   

Giải ra ta được 2 nghiệm thỏa mãn:  

**- Bình luận.** Bước khởi đầu trong lời giải ta chọn phương pháp nâng lũy thừa là hết sức tự nhiên. Và đằng sau điều tự nhiên này, ta đã chuyển được phương trình về dạng:



Đối với phương trình dạng này thì ý tưởng phân tích thành dạng phương trình đẳng cấp cũng chỉ là một trong những hướng đi đã định sẵn mà thôi. Sự kết hợp giữa hai phương pháp nâng lũy thừa và phương pháp đặt ẩn phụ đối với phương trình trên giống như số phận đã an bài. Chính vì vậy mà phương trình đã được giải quyết hoàn toàn.

Bài tập tương tự:

1. Giải phương trình 

2. Giải phương trình 

**Ví dụ 3.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Phương trình có dạng tương tự bài 1. Sử dụng phép nâng lũy thừa hai vế phương trình ta có được: 

Dạng phương trình bậc 3 thường có ít nhất một nghiệm hữu tỷ và ta có thể sử dụng phép chia đa thức để phân tích đa thức bậc 3 thành tích một nhị thức bậc nhất và một tam thức bậc 2, từ đó tìm nghiệm của phương trình. Mà phương trình không có nghiệm hữu tỷ đã gây khó khăn cho việc tìm nghiệm của phương trình.Do đó, phương pháp nâng lũy thừa chưa thể giải quyết được hoàn toàn phương trình đã cho. Tuy vậy, bằng cách sử dụng máy tính bỏ túi ta có thể thấy được phương trình  có 3 nghiệm thuộc khoảng  Đâycó thể là một cơ sở để ta có thể nghĩ đến việc sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ (lượng giác hóa) để giải quyết phương trình .

**Lời giải**

Bằng cách lập phương hai vế và biến đổi, ta được: 

Đặt  ta có    

Suy ra 

Hơn nữa,  liên tục  Suy ra phương trình  có ba nghiệm phân biệt thuộc khoảng  Đặt  với 

Khi đó phương trình  trở thành: 

 

 (do )

  

Vì  nên  Do đó, tập nghiệm của phương trình đã cho là 

**- Bình luận.** Rõ ràng với phương trình này, nếu không có sự hậu thuẫn bằng phương pháp lượng giác hóa thì phương trình chưa được giải quyết một cách trọn vẹn.

Bài tập tương tự:

1. Giải phương trình 

2. Giải phương trình 

**Ví dụ 4.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Để ý rằng  Do đó, sau khi thực hiện phép bình phương hai vế phương trình ta thu được



Sau phép nâng lũy thừa ta lại thu được một phương trình mới. Tức là, muốn tìm được nghiệm của phương trình ban đầu ta cần phải giải quyết được phương trình . Với đặc điểm của phương trình  thì ý tưởng đặt ẩn phụ đã quá rõ ràng. Sau đây là lời giải cho bài toán:

**Lời giải**

Điều kiện:  hoặc  Dễ dàng nhận thấy nếu  thì phương trình trên vô nghiệm. Do đó ta chỉ cần xét  Lúc này, bình phương hai vế phương trình ta được: 

Đặt 

Phương trình  trở thành   (với )

Với  ta có    

Kiểm tra lại điều kiện ban đầu ta có 2 giá trị thỏa mãn đó là  

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm  

**- Bình luận.** Trong phương trình trên, sử dụng phương pháp nâng lũy thừa đầu tiên không phải nhằm mục đích phá bỏ căn thức mà cơ sở của nó là mối quan hệ giữa các biểu thức sau phép nâng lũy thừa. Ngoài ra, chúng t cũng có thể giả quyết phương trình ban đầu bằng một hướng khác. Chẳng hạn ta đặt   Dạng tổng quát của phương trình trên: 

Hãy cùng thực hiện với hai bài tập tương tự:

1. Giải phương trình 

2. Giải phương trình 