

PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Lời giải

$$y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$$

$$y'' = 2x - 2m$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ nên ta có

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 2 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \vee m = 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Thử lại với $m = 2$ ta có $y'' = 2x - 4 \Rightarrow y''(1) = -2 < 0$

Do đó Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

Câu 2. (THPT Đoàn Thượng – Hải Dương) Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

Lời giải

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4$, $y'' = 2x - 2m$.

Để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ thì

$$\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = 1 \Leftrightarrow m = 5. \\ 3 < m \end{cases}$$

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $y = \frac{m-1}{5}x^5 + \frac{m+2}{4}x^4 + m + 5$ đạt cực đại tại $x = 0$?

Lời giải

Ta xét: $m = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x^4 + 6 \Rightarrow y' = 3x^3 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 0$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = 3x^3$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x = 0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $m = 1$ (loại).

$$m \neq 1 \Rightarrow y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{m+2}{m-1} \end{cases}$$

Ta xét:

Trường hợp 1: xét $m > 1$, suy ra $x_2 < x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$

x	$-\infty$	$-\frac{m+2}{m-1}$	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $m > 1$ (loại).

Trường hợp 2: $-2 < m < 1$, suy ra $x_2 > x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$

x	$-\infty$	0	$-\frac{m+2}{m-1}$	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $-2 < m < 1$ (loại).

Trường hợp 3: $m < -2$, suy ra $x_2 < x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$

x	$-\infty$	$-\frac{m+2}{m-1}$	0	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực đại. Suy ra $m < -2$ (nhận).

Vậy, tập hợp tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn đề bài là $m < -2$ mà m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$

Suy ra, số giá trị nguyên của m là 2016.

Câu 4.

(Mã 104 - 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

Lời giải

Ta có $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1 \Rightarrow y' = 8x^7 + 5(m-3)x^4 - 4(m^2-9)x^3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^3(8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9) = 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = 8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9)$ có $g'(x) = 32x^3 + 5(m-3)$

Ta thấy $g'(x) = 0$ có một nghiệm nên $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm

+) TH1: Nếu $g(x) = 0$ có nghiệm $x=0 \Rightarrow m=3$ hoặc $m=-3$

Với $m=3$ thì $x=0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x=0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy

$m=3$ thỏa ycbt.

$$g(x) = 8x^4 - 30x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x = \sqrt[3]{\frac{15}{4}} \end{cases}$$

Với $m=-3$ thì

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$	$+\infty$	
y'	-	0	-	0	+
y	$+\infty$				$+\infty$

Dựa vào BBT $x=0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=-3$ không thỏa ycbt.

+) TH2: $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0 \Leftrightarrow g'(0) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 6 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 5. (Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1 - 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = m^2 x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một cực trị?

Lời giải

Trường hợp 1: $m=0 \Rightarrow y = -1$ nên hàm số không có cực trị.

$\Rightarrow m=0$ (loại).

Trường hợp 2: $m \neq 0 \Rightarrow m^2 > 0$.

Hàm số $y = m^2 x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một cực trị $\Leftrightarrow -m^2(m^2 - 2019m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2019m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2019$

Vì $m \neq 0 \Rightarrow 0 < m \leq 2019$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2019 giá trị nguyên của tham số m thỏa đề.

Câu 6. (THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019) Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Tìm số phần tử của S ?

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(7m-3)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 7m - 3 = 0$$

Để hàm số không có cực trị thì

$$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (7m-3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy S có 4 phần tử.

Câu 7. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị.

Lời giải

Ta có: $y' = -x^2 + 2mx - 2m$

Hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$$

Câu 8. (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019) Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m^2 - m - 6)x^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 + 4(m^2 - m - 6)x = 4x \left[x^2 + (m^2 - m - 6) \right]$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + (m^2 - m - 6) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3$$

Ta có: $m \in \mathbb{Z}, -2 < m < 3 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\}$

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 9. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 6)x^2 + 4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 6)x$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại khi và

$$\text{chỉ khi } \begin{cases} 4m > 0 \\ m(m^2 - 6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \sqrt{6}$$

Do đó có hai giá trị nguyên của tham số m .

Câu 10. (Chuyên Sơn La - 2020) Gọi S là tập hợp những giá trị của tham số m để hàm số sau không có cực trị trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{4}m^2 \cdot e^{4x} + \frac{1}{3}me^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x} - (m^2 + m - 1)e^x$$

. Tính tổng tất cả các phần tử của tập S ?

Lời giải

$$f'(x) = m^2 \cdot e^{4x} + me^{3x} - e^{2x} - (m^2 + m - 1)e^x = e^x(m^2 \cdot e^{3x} + me^{2x} - e^x - m^2 - m + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 \cdot e^{3x} + me^{2x} - e^x - m^2 - m + 1 = 0$$

Đặt $t = e^x > 0$ ta có

$$\text{Ta có: } m^2 t^3 + mt^2 - t - m^2 - m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2(t^3 - 1) + m(t^2 - 1) + 1 - t = 0 \Leftrightarrow (t - 1)[m^2(t^2 + t + 1) + m(t + 1) - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)[m^2 t^2 + (m^2 + m)t + m^2 + m - 1] = 0$$

Điều kiện cần để hàm số không có cực trị thì phương trình $m^2 t^2 + (m^2 + m)t + m^2 + m - 1$ có

$$t = 1 \Leftrightarrow 3m^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1, m = \frac{1}{3}$$

nghiệm

Thử lại ta thấy với hai giá trị m trên ta đều có nghiệm đơn $t = 1$.

Vậy hai giá trị $m = -1, m = \frac{1}{3}$ thỏa mãn.

Câu 11. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = (2m - 1)x + m + 3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$

Lời giải

$$\text{Hàm số } y = x^3 - 3x^2 + 1 \text{ có TXĐ: } \mathbf{R}; y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là } A(0; 1), B(2; -3) \Rightarrow \overline{AB} = (2; -4)$$

$$\text{Đường thẳng } d \text{ đi qua hai điểm } A, B \text{ có phương trình: } \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{-4} \Leftrightarrow y = -2x + 1$$

$$\text{Đường thẳng } y = (2m - 1)x + m + 3 \text{ song song với đường thẳng } d \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = -2 \\ m + 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Câu 12. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 + (m - 3)x + m$ có hai điểm cực trị và điểm $M(9; -5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 4x + m - 3$, để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{3} (*)$

Ta có $y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{2m}{3} - \frac{26}{9}\right)x + \frac{7m}{9} + \frac{2}{3}$ nên phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

cực trị là $y = \left(\frac{2m}{3} - \frac{26}{9}\right)x + \frac{7m}{9} + \frac{2}{3}$. Theo giả thiết, đường thẳng này đi qua $M(9; -5)$ nên $m = 3$ (thỏa mãn điều kiện $(*)$).

Câu 13. (Nguyễn Khuyến 2019) Đường thẳng nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + m$ đi qua điểm $M(-3; 7)$ khi m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 2$$

$$y = x^3 - 2x + m = \frac{1}{3}x \cdot y' + \left(-\frac{4}{3}x + m\right)$$

Suy ra đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là $y = -\frac{4}{3}x + m$

đường thẳng này đi qua điểm $M(-3; 7)$ khi và chỉ khi $7 = -\frac{4}{3}(-3) + m \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 14. (TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018) Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = abc + ab + c$.

Lời giải

TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow a^2 - 3b > 0$.

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$.

$$f(x) = f'(x) \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a\right) + \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}\right)x + c - \frac{1}{9}ab$$

Ta có

$$y = \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}\right)x + c - \frac{1}{9}ab \quad (d)$$

Suy ra đường thẳng đi qua A, B là:

Theo đầu bài (d) đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c - \frac{1}{9}ab = 0 \Leftrightarrow ab = 9c$.

$$\text{Khi đó } P = abc + ab + c \Leftrightarrow P = 9c^2 + 10c \Leftrightarrow P = \left(3c + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}$$

$$\min P = -\frac{25}{9}$$

Suy ra

Câu 15. (Chuyên KHTN - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - (2m - 1)x^2 + 2mx - m - 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

Lời giải

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $mx^3 - (2m - 1)x^2 + 2mx - m - 1 = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow (x - 1)[mx^2 - (m - 1)x + m + 1] = 0$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi pt $mx^2 - (m - 1)x + m + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m - (m - 1) + m + 1 \neq 0 \\ (m - 1)^2 - 4m(m + 1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m+2 \neq 0 \\ -3m^2 - 6m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \\ \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3} < m < \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -1$.

- Câu 16. (THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2018$ với m là tham số. Tính tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$

Lời giải

$$y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$$

Ta có

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt.

$$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases}$$

Theo định lý Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3m-4}{m} \\ x_2 = 1 - \frac{2(m-1)}{m} = \frac{2-m}{m} \end{cases}$$

Theo bài ta có hệ phương trình

$$\Rightarrow \frac{3m-4}{m} \cdot \frac{2-m}{m} = \frac{3(m-2)}{m} \Rightarrow 3(2-m)m + (3m-4)(2-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(t/m) \\ m = \frac{2}{3}(t/m) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m_1^2 + m_2^2 = \frac{40}{9}.$$

- Câu 17. (THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1; 4)$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

Lời giải

$$y' = 3x^2 - 6mx = 0 \quad \hat{U} \quad \begin{cases} \hat{x} = 0 \\ \hat{y} = 2m \end{cases}$$

Ta có

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị $\hat{U} \quad 2m^1 \quad 0 \quad \hat{U} \quad m^1 \quad 0$.

$$\text{Khi đó } A(0; 4m^2 - 2), B(2m; -4m^3 + 4m^2 - 2) \quad \text{p} \quad AB = \sqrt{4m^2 + 16m^6} = 2|m|\sqrt{4m^4 + 1}$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB \text{ là: } \frac{x - 0}{2m - 0} = \frac{y - (4m^2 - 2)}{-4m^3} \quad \hat{U} \quad 2m^2x + y - 4m^2 + 2 = 0$$

$$d(C, AB) = \frac{|2m^2 + 4 - 4m^2 + 2|}{\sqrt{4m^4 + 1}} = \frac{2|m^2 - 3|}{\sqrt{4m^4 + 1}}$$

Diện tích tam giác ABC là

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(C, AB) = 4 \quad \hat{U} \quad \frac{1}{2} \cdot 2|m| \cdot \sqrt{4m^4 + 1} \cdot \frac{2|m^2 - 3|}{\sqrt{4m^4 + 1}} = 4$$

$$\hat{U} \quad |m(m^2 - 3)| = 2 \quad \hat{U} \quad m^6 - 6m^4 + 9m^2 - 4 = 0 \quad \hat{U} \quad (m^2 - 1)^2 (m^2 - 4) = 0 \quad \hat{U} \quad \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm 2 \end{cases}$$

Do m nguyên dương nên ta được $m = 1, m = 2$, tổng thu được là 3.

Câu 18. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$ (m là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2; -2)$. Tính tổng tất cả các giá trị của m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$$

Vì $\Delta' = 1 > 0 \quad \forall m$ nên phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x = m \pm 1$.

$$\text{Gọi } A(m+1; -4m-2) \quad B(m-1; -4m+2)$$

$$\text{Suy ra } \overline{AB} = (-2; 4) = -2(1; -2) \quad \overline{IA} = (m-1; -4m) \quad \overline{IB} = (m-3; -4m+4)$$

Phương trình đường thẳng AB qua $A(m+1; -4m-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1)$ là $AB: 2x + y + 2m = 0$

$$\text{Suy ra } d(I, AB) = \frac{|2 + 2m|}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Khi đó } S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} AB \cdot d(I, AB) = \frac{1}{2} 2\sqrt{5} \frac{|2 + 2m|}{\sqrt{5}} = |2 + 2m|$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } S_{\Delta IAB} &= \frac{AB \cdot IA \cdot IB}{4R} \Leftrightarrow AB \cdot IA \cdot IB = 4\sqrt{5}|2 + 2m| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{20} \sqrt{17m^2 - 2m + 1} \sqrt{17m^2 - 38m + 25} = 4\sqrt{5}|2 + 2m| \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (17m^2 - 2m + 1)(17m^2 - 38m + 25) = 4(4m^2 + 8m + 4)$$

$$\Leftrightarrow 289m^4 - 680m^3 + 502m^2 - 120m + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{3}{17} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m_1 + m_2 = \frac{20}{17}.$$

Câu 19. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 4x - 10$, với m là tham số; gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số đã cho. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = x^2 - mx - 4$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0$.

Ta có $\Delta = m^2 + 16 > 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m \in \mathbb{R}$ hay hàm số luôn có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \forall m \in \mathbb{R}$.

Do x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của $y' = 0$ nên theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$.

$$P = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) = (x_1 x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) + 1 = (x_1 x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1 x_2 + 1$$

$$= 16 - m^2 - 8 + 1 = -m^2 + 9 \leq 9, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $9 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 20. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ nằm bên phải trục tung. Tìm số phần tử của tập hợp $(-5; 6) \cap S$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}; y' = 3x^2 + 2x + m$.

Hàm bậc ba có cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$ (1).

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{1 - 3m} \\ x = -1 + \sqrt{1 - 3m} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{1-3m}$	$-1+\sqrt{1-3m}$	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	y_{CD}	y_{CT}	$+\infty$	

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nằm về phía bên phải trục tung khi

$$-1 + \sqrt{1-3m} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-3m} > 1 \Leftrightarrow m < 0.$$

Kết hợp với ⁽¹⁾ ta có $m < 0$ thì điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho nằm bên phải trục tung.

Khi đó S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên âm.

Vậy $(-5; 6) \cap S = \{-4; -3; -2; -1\} \Rightarrow (-5; 6) \cap S$ có 4 phần tử.

Vậy giá trị m cần tìm là $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.

Câu 21. (Cụm Trường Vĩnh Phúc 2023) Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} -x^2 + mx + 6, & x \leq 2 \\ \frac{n}{2}x - 4, & x > 2 \end{cases}, (m, n \in \mathbb{R})$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x)$ có đúng hai điểm cực trị?

Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$.

$$\Rightarrow 2m + 2 = n - 4 \Rightarrow n = 2m + 6.$$

Ta có
$$f'(x) = \begin{cases} -2x + m, & x \leq 2 \\ n, & x > 2 \end{cases}.$$

Rõ ràng, trên khoảng $(-\infty; 2)$, phương trình $f'(x) = 0$ chỉ có tối đa 1 nghiệm (bội lẻ) và trên khoảng $(2; +\infty)$, phương trình $f'(x) = 0$ vô nghiệm.

$\Rightarrow$ hàm số $y = f(x)$ có đúng hai điểm cực trị khi và chỉ khi:

Phương trình $-2x + m = 0$ có một nghiệm $x < 2$ và đạo hàm của hàm số đổi dấu khi đi qua điểm $x = 2$ (*)

Phương trình $-2x + m = 0$ có nghiệm $x = \frac{m}{2}$. Mà $x < 2 \Rightarrow \frac{m}{2} < 2 \Rightarrow m < 4$.

Khi đó bảng xét dấu của $f'(x)$ trên $(-\infty; 2)$ là:

x	$-\infty$	$\frac{m}{2}$	2
$f'(x)$	+	0	-

Như vậy, để thỏa mãn điều kiện (*), suy ra $n > 0$.

$$\Rightarrow 2m+6 > 0 \Rightarrow m > -3.$$

Kết hợp điều kiện, suy ra $-3 < m < 4 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Như vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 22. (Chuyên Bắc Ninh - 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

Lời giải

Cách 1: Điều kiện để đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị là $ab < 0 \Leftrightarrow m > -1 \Rightarrow$ loại B

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi $b^3 + 8a = 0 \Leftrightarrow -8(m+1)^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Cách 2: Ta có $y' = 4x(x^2 - m - 1)$

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m+1 \end{cases}$. Để đồ thị số có ba điểm cực trị thì $m > -1$ (*)

Tọa độ ba điểm cực trị là $A(0; m^2), B(\sqrt{m+1}; -2m-1), C(-\sqrt{m+1}; -2m-1)$

Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC thì $H(0; -2m-1)$

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi $AH = BH \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^4} = \sqrt{m+1} \Leftrightarrow m = 0: T / m(*)$

Câu 23. (Liên trường Nghệ An 2023) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = 3x^4 - 4(4+m)x^3 + 12(3-m)x + 2$ có ba điểm cực trị?

Lời giải

Ta có $y' = 12x^3 - 12(4+m)x^2 + 12(3-m)$ nên

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3 = (x^2 + 1)m \Leftrightarrow m = x - 4 + \frac{-x+7}{x^2+1}.$$

$$f(x) = x - 4 + \frac{-x+7}{x^2+1}, f'(x) = 1 + \frac{x^2 - 14x - 1}{(x^2+1)^2}$$

Đặt

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 3x^2 - 14x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Hàm số $y = 3x^4 - 4(4+m)x^3 + 12(3-m)x + 2$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $m = x - 4 + \frac{-x+7}{x^2+1}$ có ba nghiệm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $-1 < m < 3$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy có 3 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 24. (Chuyên KHTN - Hà Nội - Lần 3) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 2m}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB vuông tại O . Tính tổng tất cả các phần tử của S

Lời giải

$$y' = \frac{x^2 + 2x - m}{(x+1)^2}, \forall x \neq -1. \text{ Đặt } f(x) = x^2 + 2x - m, h(x) = x^2 + mx + 2m, g(x) = x + 1.$$

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị A, B khi $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{khác } -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m+1 > 0 \\ f(-1) = -m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m > -1 \end{cases} \quad (1) \quad \text{Khi đó } \begin{cases} y(x_1) = \frac{h'(x_1)}{g'(x_1)} = 2x_1 + m \\ y(x_2) = \frac{h'(x_2)}{g'(x_2)} = 2x_2 + m \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } A(x_1; 2x_1 + m), B(x_2; 2x_2 + m). \text{ Suy ra } \overline{OA} = (x_1; 2x_1 + m), \overline{OB} = (x_2; 2x_2 + m)$$

$$\Delta OAB \text{ vuông tại } O \text{ khi } \begin{cases} \overline{OA}, \overline{OB} \neq 0 \quad (2) \\ \overline{OA} \cdot \overline{OB} = x_1 x_2 + (2x_1 + m)(2x_2 + m) = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow m^2 + 5x_1 x_2 + 2m(x_1 + x_2) = 0. \text{ Kết hợp với định lý Vi-et cho phương trình } f(x) = 0 \text{ ta}$$

$$\text{được } m^2 - 5m - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (không thỏa mãn (2))} \\ m = 9 \text{ (thỏa mãn (1), (2))} \end{cases} \Rightarrow S = \{9\}$$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng 9.

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$$y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m} \Rightarrow y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -m \\ x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -m \\ x = -m + 1 \\ x = -m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m + 1 \\ x = -m - 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-m-1$	$-m$	$-m+1$	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	y_{CD} 		y_{CT} 		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -m - 1$.

Vậy $y(-m - 1) = 7 \Leftrightarrow -m - 2 = 7 \Leftrightarrow m = -9$

Câu 26. (Chuyên Bắc Ninh 2019) Tìm tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1$,

Có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1			0			2			$+\infty$				
$f'(x)$		$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$						
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$			$m-6$		$\nearrow$		$m-1$		$\searrow$	$m-33$	$\nearrow$		$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m - 6 < 0 < m - 1 \Leftrightarrow 1 < m < 6$.

Câu 27. (THPT Kinh Môn - 2018) Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(2m - 1)x + 2 - m$

Hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $f(x)$ có hai cực trị dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m - 1)^2 - 3(2 - m) > 0 \\ \frac{2(2m - 1)}{3} > 0 \\ \frac{2 - m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2$$

Câu 28. (THPT Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

Hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị và nằm về hai phía của trục hoành $\Leftrightarrow$ phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ (1) có ba nghiệm phân biệt.

Xét bbt của hàm số $y = x^3 - 3x^2$

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y			0		-4		$+\infty$

Từ đó ta được (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 29. (Liên trường Hà Tĩnh - 2022) Cho hàm số $f(x) = x^4 - 14x^3 + 36x^2 + (16 - m)x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 7 điểm cực trị?

Lời giải

Xét hàm số: $f(x) = x^4 - 14x^3 + 36x^2 + (16 - m)x$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 4x^8 - 42x^2 + 72x + 16 - m$$

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị dương.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Xét phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 42x^2 + 72x + 16 = m$ (1)

$$h(x) = 4x^3 - 42x^2 + 72x + 16 \Rightarrow h'(x) = 12x^2 - 84x + 72 \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

Đặt

Ta có bảng biến thiên

x	0	1		6		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	0	+
$h(x)$						

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

Dựa vào BBT ta có $16 < m < 50$.

Vì m là số nguyên nên $m \in \{17; 18 \dots 49\}$ nên có 33 số nguyên.

Câu 30. (THPT Nguyễn Huệ - Huế - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

Lời giải

Ta có đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$ đối xứng qua trục Oy nên ta chỉ xét số điểm cực trị dương của hàm số $g(x) = f(|x|)$.

$f'(x)$ đổi dấu qua hai điểm $x=m, x=-3$.

Xét $x > 0 \Rightarrow g(x) = f(x) \Rightarrow$ Số điểm cực trị dương của hàm $g(x) = f(x)$ bằng số nghiệm dương và đổi dấu của phương trình $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3 = 0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f'(x)=0$ có 1 nghiệm dương và $f'(x)$ đổi dấu qua nghiệm đó $\Leftrightarrow m > 0$.

Với $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-5; 5] \end{cases} \Rightarrow m = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Vậy có 5 số.

Câu 31. (Sở Bắc Ninh 2023) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = |x^4 + x^3 - 5x^2 - x + m|$ có bốn điểm cực tiểu x_1, x_2, x_3, x_4 thoả mãn $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1) \geq 68$. Tập S có bao nhiêu tập con?

Lời giải

Xét hàm số $h(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - x + m$, ta có: $h'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 10x - 1$.

x	$-\infty$	-1.96	-0.1	1.31	$+\infty$		
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$		$-10 + m$	$0.05 + m$	$-4.7 + m$		$+\infty$

Hàm số đã cho có 4 điểm cực tiểu $x_1, x_2, x_3, x_4 \Leftrightarrow$ phương trình $x^4 + x^3 - 5x^2 - x + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3, x_4 \Rightarrow 1 \leq m \leq 4$. (1)

Khi đó: $x^4 + x^3 - 5x^2 - x + m = (x_1 - x)(x_2 - x)(x_3 - x)(x_4 - x) \forall x$ (2)

Với $x = i$, đẳng thức (2) trở thành: $(x_1 - i)(x_2 - i)(x_3 - i)(x_4 - i) = 6 - 2i + m$ (3)

Với $x = -i$, đẳng thức (2) trở thành: $(x_1 + i)(x_2 + i)(x_3 + i)(x_4 + i) = 6 + 2i + m$ (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra: $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1) = (6 - 2i + m)(6 + 2i + m)$

Hay $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1) = m^2 + 12m + 40$.

Do đó: $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1) \geq 68 \Leftrightarrow m^2 + 12m + 40 \geq 68 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -14 \\ m \geq 2 \end{cases}$ (5).

Từ (1) và (5) ta suy ra $S = \{2; 3; 4\}$ là tập các giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32. (Sở Ninh Bình 2023) Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2023; 2023)$ để hàm số $y = x^2 - 2m|x - m + 6| + 1$ có ba điểm cực trị?

Lời giải

Nếu $m = 0$: $y = x^2 + 1$, hàm số có một điểm cực trị.

Nếu $m \neq 0$, ta có

$$y = \begin{cases} x^2 - 2m(x - m + 6) & (x - m + 6 \geq 0) \\ x^2 + 2m(x - m + 6) & (x - m + 6 < 0) \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 2x - 2m & (x - m + 6 > 0) \\ 2x + 2m & (x - m + 6 < 0) \end{cases}$$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = m - 6$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2m = 0 \\ x - m + 6 > 0 \\ 2x + 2m = 0 \\ x - m + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -m \\ -2m + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -m (m > 3) \end{cases}.$$

Để hàm số có ba điểm cực trị, ta phải có $m > 3$ và lúc này bảng xét dấu của y' như sau

x	$-\infty$	$-m$	$m - 6$	m	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
			$ $		
		$-$	0	$+$	

Điều này chứng tỏ với $m > 3$ thì hàm số đã cho có 3 điểm cực trị, mà m nguyên nên $m \in \{4, 5, \dots, 2022\}$.

Vậy có tất cả 2019 số nguyên thỏa mãn.

Câu 33. (Mã 104 - 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 + 4x)$

Lời giải

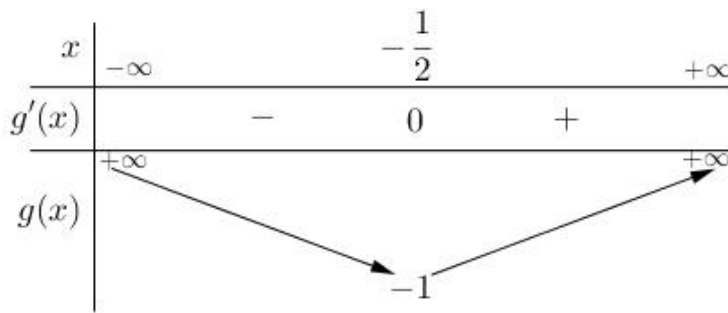
Có $(f(4x^2 + 4x))' = (8x + 4)f'(4x^2 + 4x)$, $(f(4x^2 + 4x))' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ f'(4x^2 + 4x) = 0 \end{cases}$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	a_1	a_2	a_3	a_4
		-3	2	-1	

$$f'(4x^2 + 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4x = a_1 \in (-\infty; -1) \\ 4x^2 + 4x = a_2 \in (-1; 0) \\ 4x^2 + 4x = a_3 \in (0; 1) \\ 4x^2 + 4x = a_4 \in (1; +\infty) \end{cases} \quad (1)$$

Từ bảng biến thiên trên ta có

Xét $g(x) = 4x^2 + 4x$, $g'(x) = 8x + 4$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ta có bảng biến thiên



Kết hợp bảng biến thiên của $g(x)$ và hệ (1) ta thấy:

Phương trình $4x^2 + 4x = a_1 \in (-\infty; -1)$ vô nghiệm.

Phương trình $4x^2 + 4x = a_2 \in (-1; 0)$ tìm được hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{1}{2}$.

Phương trình $4x^2 + 4x = a_2 \in (0; 1)$ tìm được thêm hai nghiệm mới phân biệt khác $-\frac{1}{2}$.

Phương trình $4x^2 + 4x = a_2 \in (1; +\infty)$ tìm được thêm hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{1}{2}$.

Vậy hàm số $y = f(4x^2 + 4x)$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 34. (Sở Bắc Giang - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

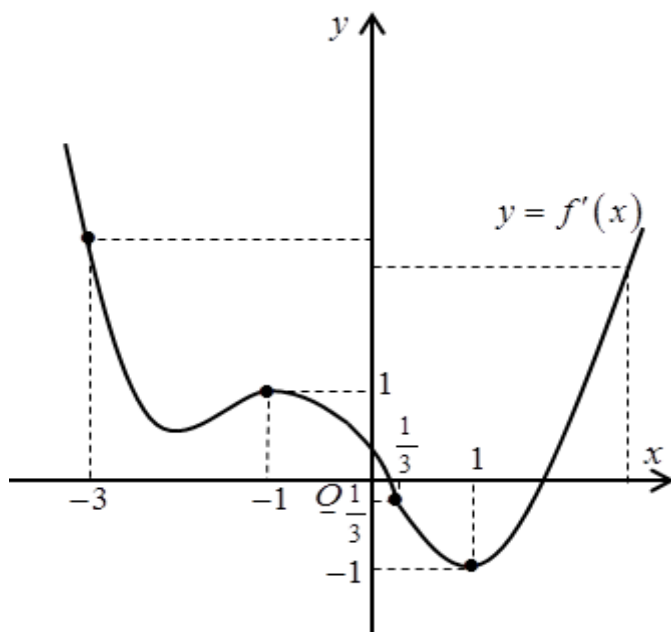
Vì hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x) = 0$ có ba nghiệm là $-2; -1; 0$ (ba nghiệm bội lẻ).

Xét hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có $y' = (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x)$; $y' = 0 \Leftrightarrow (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x) = 0$

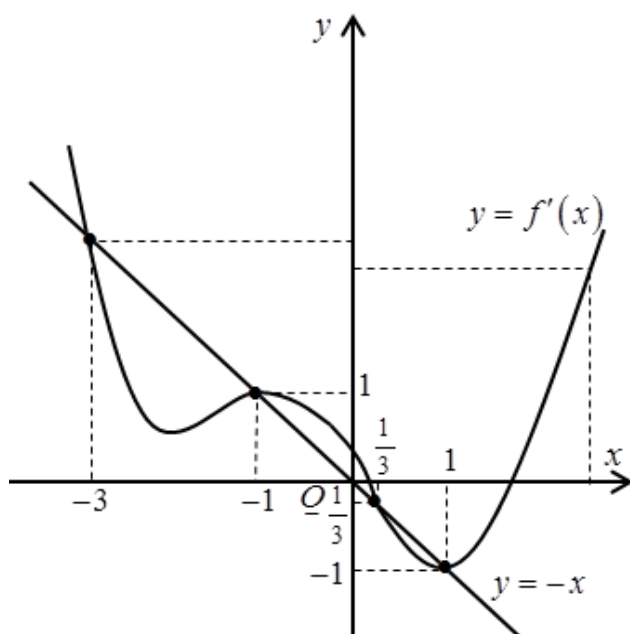
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Do $y' = 0$ có một nghiệm bội lẻ ($x = 1$) và hai nghiệm đơn ($x = 0; x = 2$) nên hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ chỉ có ba điểm cực trị.

Câu 35. (THPT Thăng Long - Hà Nội - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \frac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$.



Lời giải



$$g'(x) = 5 \cos x f' \left(\frac{5 \sin x - 1}{2} \right) + \frac{5}{2} \cos x (5 \sin x - 1)$$

Ta có:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 5 \cos x f' \left(\frac{5 \sin x - 1}{2} \right) + \frac{5}{2} \cos x (5 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ f' \left(\frac{5 \sin x - 1}{2} \right) = - \frac{5 \sin x - 1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \frac{5 \sin x - 1}{2} = -3 \\ \frac{5 \sin x - 1}{2} = -1 \\ \frac{5 \sin x - 1}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{5 \sin x - 1}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 5 \sin x - 1 = -6 \\ 5 \sin x - 1 = -2 \\ 5 \sin x - 1 = \frac{2}{3} \\ 5 \sin x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = -\frac{1}{5} \\ \sin x = \frac{1}{3} \\ \sin x = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = -\frac{1}{5} \\ \sin x = \frac{1}{3} \\ \sin x = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right) \vee x = 2\pi + \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right) \\ x = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \vee x = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \\ x = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \vee x = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \end{cases}, (\forall 0 < x < 2\pi).$$

Suy phương trình $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm, trong đó có nghiệm $x = \frac{3\pi}{2}$ là nghiệm kép.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 36. (Mã 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	3	-2	$+\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x+1)]^2$

Lời giải

Ta chọn hàm $f(x) = 5x^4 - 10x^2 + 3$.

Đạo hàm

$$g'(x) = 4x^3 [f(x+1)]^2 + 2x^4 f(x+1) f'(x+1) = 2x^3 f(x+1) [2f(x+1) + x f'(x+1)]$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 f(x+1)=0 \\ 2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f(x+1)=0 \\ 2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \end{cases}$$

Ta có

$$+) f(x+1)=0 (*) \Leftrightarrow 5(x+1)^4 - 10(x+1) + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \approx 1,278 \\ x+1 \approx 0,606 \\ x+1 \approx -0,606 \\ x+1 \approx -1,278 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0.

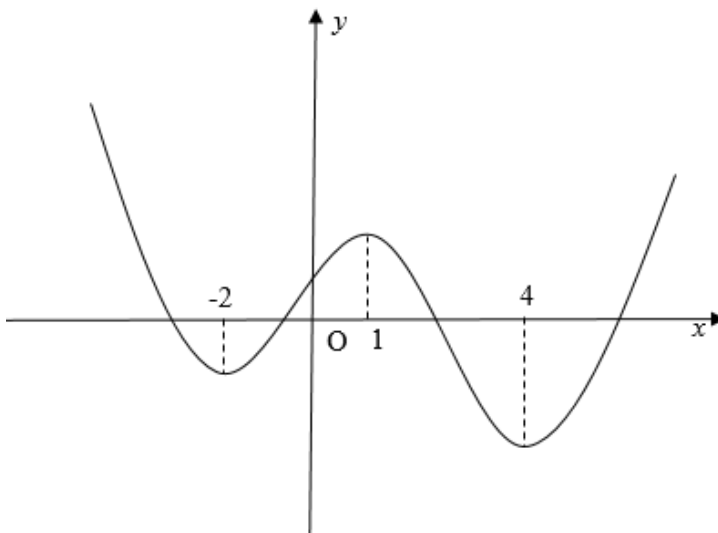
$$+) 2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \Rightarrow 2(5t^4 - 10t^2 + 3) + (t-1)(20t^3 - 20t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 30t^4 - 20t^3 - 40t^2 + 20t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 1,199 \\ t \approx 0,731 \\ t \approx -0,218 \\ t \approx -1,045 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0 và khác các nghiệm của phương trình (*).

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 9.

Câu 37. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Lời giải

$$g'(x) = (e^x - x - 1)f'\left(e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}\right)$$

Ta có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x - x - 1)f'\left(e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - x - 1 = 0 \\ f'\left(e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Xét

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x - x - 1 = 0 & (1) \\ e^x - \frac{x^2 + 2x}{2} = -2 & (2) \\ e^x - \frac{x^2 + 2x}{2} = 1 & (3) \\ e^x - \frac{x^2 + 2x}{2} = 4 & (4) \end{cases}$$

Ta xét $u(x) = e^x - x - 1; v(x) = e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}$

Ta có $u'(x) = e^x - 1; u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $u'(x) = e^x - 1; v'(x) = e^x - x - 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	-	0	+
$u(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Vậy $u(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $v(x) = e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}$

Ta có $v'(x) = e^x - x - 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$v'(x)$	+	0	+
$v(x)$	$-\infty$		$+\infty$

Khi đó các phương trình (2), (3), (4) có nghiệm duy nhất và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đó. Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 38. (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$		

$$g(x) = \frac{(x-2)^4}{[f(x+1)]^3}$$

Tìm số điểm cực trị của hàm số

Lời giải

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm là $x=-1$; $x=0$; $x=1$

$\Rightarrow f'(x)$ có dạng $f'(x)=kx(x-1)(x+1)=k(x^3-x)$, với $k \in \mathbb{R}$ và $k \neq 0$

$\Rightarrow f(x)=k\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+C\right)$, C là một hằng số

Mà đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua $(1;3)$ và $(0;-1) \Rightarrow \begin{cases} k\left(-\frac{1}{4}+C\right)=3 \\ kC=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-16 \\ C=\frac{1}{16} \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x)=-16\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{16}\right)=-4x^4+8x^2-1$$

$$\Rightarrow f(x+1)=-4(x+1)^4+8(x+1)^2-1$$

$$\Rightarrow f(x+1)=-4(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)+8(x^2+2x+1)-1$$

$$\Rightarrow f(x+1)=-4x^4-16x^3-16x^2+3 \Rightarrow f'(x+1)=-16x^3-48x^2-32x$$

$$g'(x)=\frac{4(x-2)^3[f(x+1)]^3-(x-2)^4 \cdot 3[f(x+1)]^2 \cdot f'(x+1)}{[f(x+1)]^6}$$

Ta có:

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{4(x-2)^3 f(x+1)-3(x-2)^4 f'(x+1)}{[f(x+1)]^4}=\frac{(x-2)^3 [4f(x+1)-3(x-2)f'(x+1)]}{[f(x+1)]^4}$$

$$\text{Do đó: } g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ 4f(x+1)-3(x-2)f'(x+1)=0 \end{cases}$$

Phương trình: $4f(x+1) - 3(x-2)f'(x+1) = 0$

$$\Leftrightarrow 4(-4x^4 - 16x^3 - 16x^2 + 3) - 3(x-2)(-16x^3 - 48x^2 - 32x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -16x^4 - 64x^3 - 64x^2 + 12 - 3(-16x^4 - 16x^3 + 64x^2 + 64x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -16x^4 - 64x^3 - 64x^2 + 12 + 48x^4 + 48x^3 - 192x^2 - 192x = 0$$

$$\Leftrightarrow 32x^4 - 16x^3 - 256x^2 - 192x + 12 = 0 \Leftrightarrow 8x^4 - 4x^3 - 64x^2 - 48x + 3 = 0$$

Xét hàm số $h(x) = 8x^4 - 4x^3 - 64x^2 - 48x + 3$

Ta có: $h'(x) = 32x^3 - 48x^2 - 128x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{cases}$ với $x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < 2 < x_3$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	-1	0	x_2	1	x_3	$+\infty$							
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$								
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h(x_1)$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$h(x_2)$	$\searrow$	-105	$\searrow$	$h(x_3)$	$\nearrow$	$+\infty$

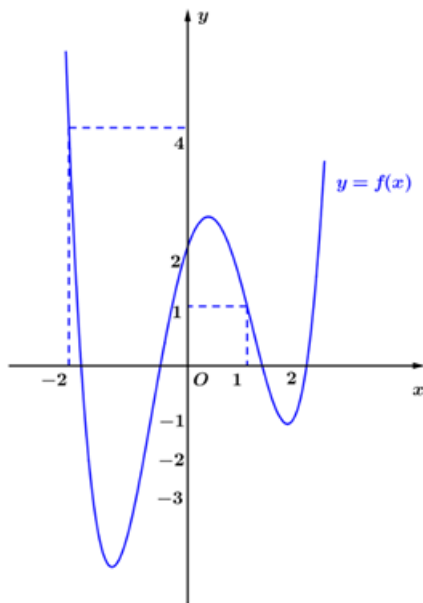
Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $h(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

Mà $h(2) = -233 \Rightarrow x = 2$ không là nghiệm của phương trình $h(x) = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt

Vậy hàm số $g(x) = \frac{(x-2)^4}{[f(x+1)]^3}$ có 5 điểm cực trị.

Câu 39. (THPT Quảng Xương 1-Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 4x + 3) - 3(x - 2)^2 + \frac{1}{2}(x - 2)^4$

Lời giải

Ta có: $g(x) = f(x^2 - 4x + 3) - 3(x - 2)^2 + \frac{1}{2}(x - 2)^4$

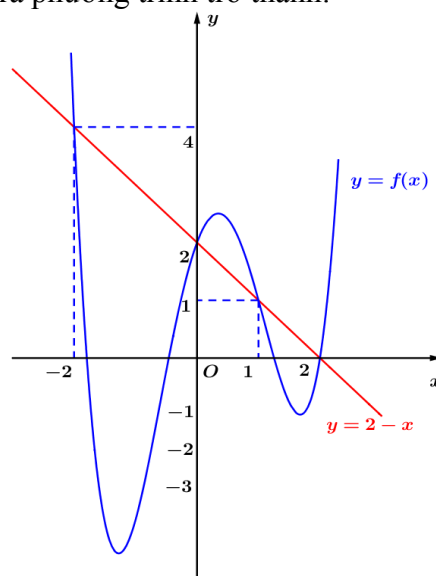
$$g'(x) = f'(x^2 - 4x + 3) \cdot 2(x - 2) - 6(x - 2) + 2(x - 2)^3$$

$$= (x - 2)(2f'(x^2 - 4x + 3) - 6 + 2(x - 2)^2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(1n_0) \\ f'(x^2 - 4x + 3) = 3 - (x - 2)^2 (*) \end{cases}$$

$$(*) f'(x^2 - 4x + 3) = 3 - (x - 2)^2 \Leftrightarrow f'(x^2 - 4x + 3) = 3 - x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 4x + 3) + 2$$

Đặt: $t = x^2 - 4x + 3$ suy ra phương trình trở thành: $f'(t) = -t + 2$



x	$-\infty$	$2-\sqrt{3}$	$2-\sqrt{2}$	1	2	3	$2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Phương trình trên tương ứng với tương giao giữa đồ thị $y = f'(t)$ và đường thẳng $y = -t + 2$

Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy phương trình có 3 nghiệm là $t = 0, t = 1, t = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 1 \\ x^2 - 4x + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, x=3 \\ x=2-\sqrt{2}; x=2+\sqrt{2} \\ x=2-\sqrt{3}; x=2+\sqrt{3} \end{cases}$$

Từ đó, ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$ như sau:

Dựa vào BBT trên, ta kết luận hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực đại

Câu 40. (Sở Thái Nguyên 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(2x^2 - 3x - 9)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x) + x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Vì hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x) = f(x) + x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } g'(x) &= f'(x) + 3x^2 - 6x - 9 = (x+1)(2x^2 - 3x - 9) + 3(x+1)(x-3) \\ &= (x+1)(x-3)(2x-6) \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-1	3	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$								

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 41. (Sở Thái Nguyên 2022) Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				3				$+\infty$

</

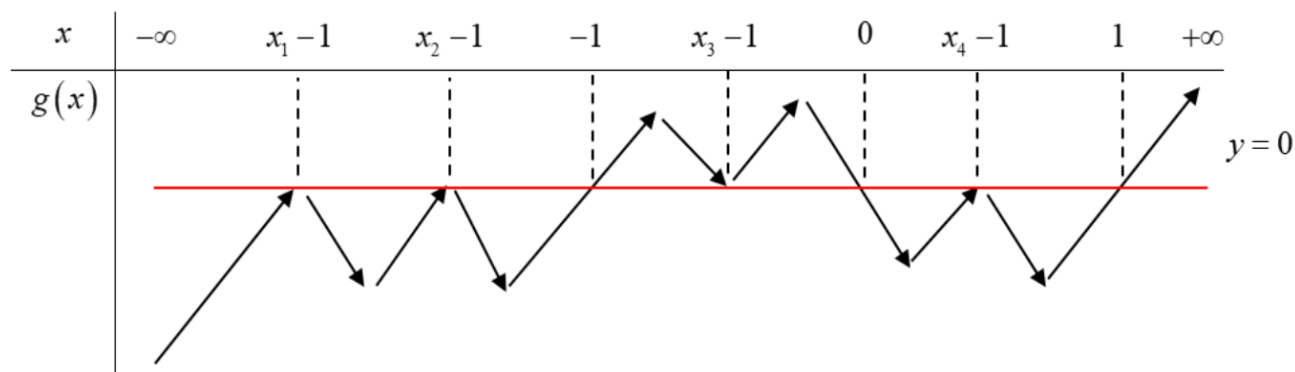
Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = (x^3 - x)[f(x+1)]^2$

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy rằng $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt, gọi 4 nghiệm đó lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4 với $x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4$. Khi đó:

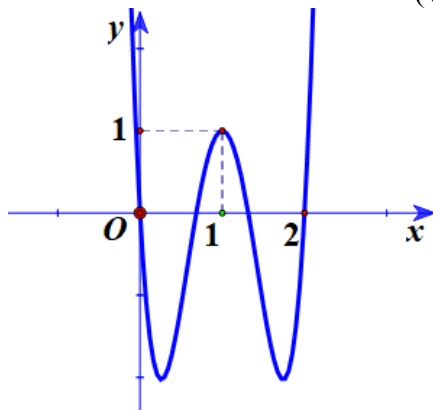
$$g(x) = (x^3 - x)[a(x+1-x_1)(x+1-x_2)(x+1-x_3)(x+1-x_4)]^2 \quad (\text{với } a > 0).$$

Ta có $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in [0; \pm 1; x_1 - 1; x_2 - 1; x_3 - 1; x_4 - 1]$, trong đó $x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1, x_4 - 1$ là các nghiệm kép. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:



Vậy $g(x)$ có 10 điểm cực trị.

Câu 42. (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ (với $a \neq 0; \{b, c, d, e\} \subset \mathbb{R}$) và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết đồ thị hàm số $y = f'(x) + x^2 - 2x$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 1$. Tìm

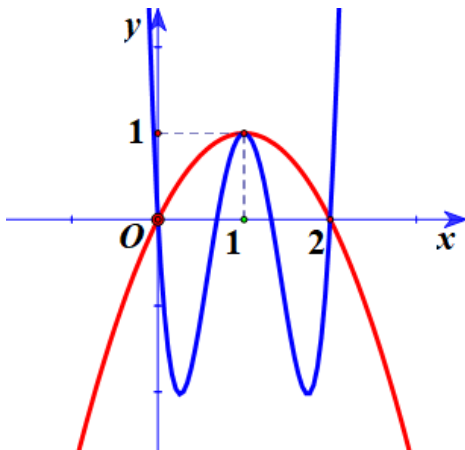
tích các điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2) + \frac{x^6}{3} - 3x^4 + 8x^2$

Lời giải

♦ Xét $g(x) = f(x^2 - 2) + \frac{x^6}{3} - 3x^4 + 8x^2$ có $g'(x) = 2xf'(x^2 - 2) + 2x^5 - 12x^3 + 16x$

$$♦ \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x[f'(x^2 - 2) + x^4 - 6x^2 + 8] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = -x^4 + 6x^2 - 8 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $t = x^2 - 2$. Khi đó, $(*) \Leftrightarrow f'(t) = -t^2 + 2t$. Các nghiệm của phương trình này là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -t^2 + 2t$. Vẽ hai đồ thị hàm số trên cùng hệ trục ta được:



♦ Từ đồ thị ta suy ra

$$\begin{cases} t=0(t/m) \\ t=1(KTM) \\ t=2(t/m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = 0 \\ x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

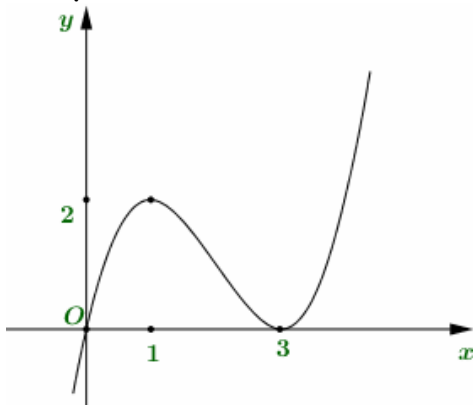
(Với $t=1$ loại vì là nghiệm bội chẵn)

♦ Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	+

♦ Vậy các điểm cực đại của hàm số $g(x)$ là $x = \pm\sqrt{2}$.

Câu 43. (Sở Vĩnh Phúc 2022) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$. Hàm số $f'(1-x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) - x^2$

Lời giải

Ta có:

$$g(x) = f\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) - x^2 = f\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - x^2$$

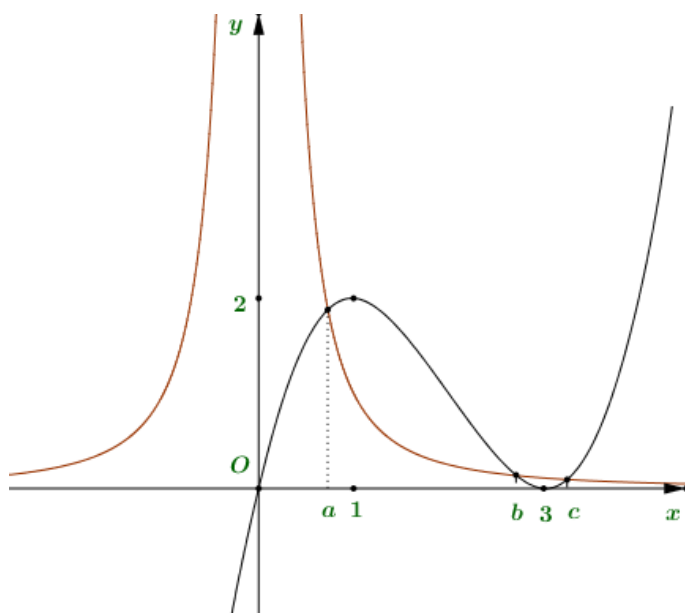
$$g'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)' f' \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - 2x = \frac{2}{x^3} f' \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - 2x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} f' \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 2x \Leftrightarrow f' \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} \quad (*)$$

Nhận xét: Số cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) - x^2$ là số giao điểm (không tính điểm tiếp xúc)

của đồ thị hàm số $y = f'\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ và đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}$.

Vẽ đồ thị hàm số $h(x) = \frac{1}{x^2}$ trên cùng một hệ trục với đồ thị hàm số $y = f'(1 - x)$, ta được:



$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2} = a \in (0;1) \\ \frac{1}{x^2} = b \in (1;3) \\ \frac{1}{x^2} = c \in (3;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{a} \\ x^2 = \frac{1}{b} \\ x^2 = \frac{1}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{1}{a}} \\ x = \pm\sqrt{\frac{1}{b}} \\ x = \pm\sqrt{\frac{1}{c}} \end{cases}$$

Vậy hàm số có 6 điểm cực trị.

Câu 44. (Sở Cà Mau 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 4x^3 - 16x$ và $f(0) = 3$. Gọi k là số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = [f(x^2)]^2 + 1$. Tính giá trị biểu thức $T = -2k^2 + k - 5$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int (4x^3 - 16x) dx = x^4 - 8x^2 + C$

Mà $f(0)=3 \Rightarrow C=3$

Vậy $f(x)=x^4-8x^2+3$

$g'(x)=2.2x.f(x^2).f'(x^2)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f(x^2)=0 \\ f'(x^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x^2)^4-8(x^2)^2+3=0 \\ 4(x^2)^3-16(x^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{\sqrt{4\pm\sqrt{13}}} \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

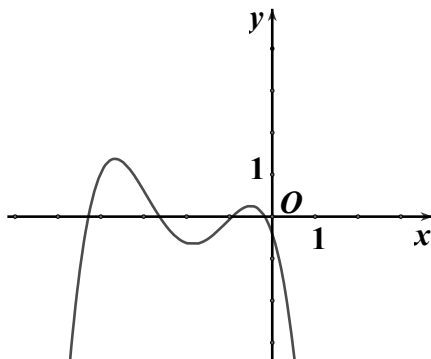
Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\sqrt{\sqrt{4+\sqrt{13}}}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{\sqrt{4-\sqrt{13}}}$	0	$\sqrt{\sqrt{4-\sqrt{13}}}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{\sqrt{4+\sqrt{13}}}$	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu, ta thấy số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ là $4 \Rightarrow k=4$.

Vậy $T=-33$.

Câu 45. (Mã 104 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=|f(x^4)+x^2|$



Lời giải

Xét $h(x)=f(x^4)+x^2$

Có $h'(x)=4x^3f'(x^4)+2x=2x(2x^2f'(x^4)+1)$

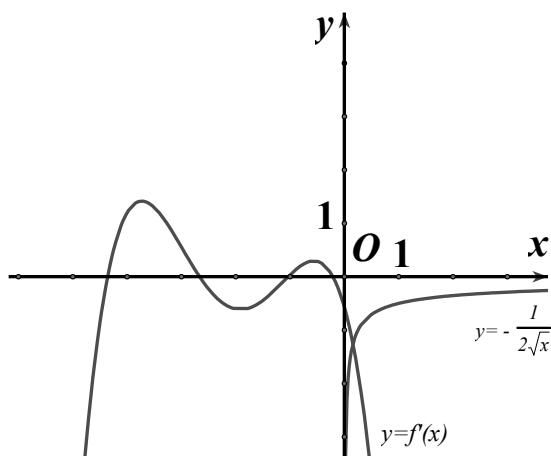
$$h'(x)=0 \Leftrightarrow 2x(2x^2f'(x^4)+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x^2f'(x^4)+1=0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1): 2x^2f'(x^4)+1=0 \Leftrightarrow f'(x^4)=-\frac{1}{2x^2} \quad (x \neq 0) \quad (2)$$

Đặt $x^4=t \Rightarrow x^2=\sqrt{t} \quad (t > 0)$ phương trình (2) trở thành:

$$f'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}} \quad (t > 0) \quad (3)$$

Vẽ đồ thị hàm $y = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm $y = f'(x)$.



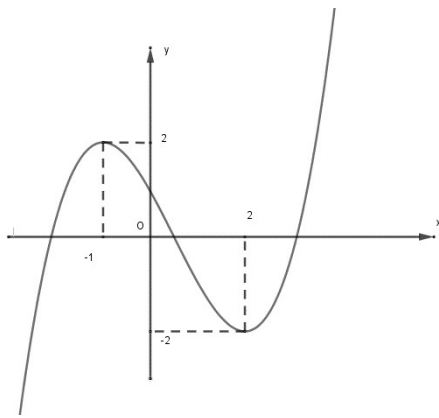
Dựa vào đồ thị ta có: phương trình (3) có nghiệm duy nhất $t = a > 0 \Rightarrow x^4 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[4]{a} \\ x = -\sqrt[4]{a} \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{a}$	0	$\sqrt[4]{a}$	$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	+
$h(x)$		$f(a)+\sqrt{a}$	0	$f(a)+\sqrt{a}$	
$g(x)= h(x) = f(x^4)+x^2 $		$f(a)+\sqrt{a}$	0	$f(a)+\sqrt{a}$	

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $g(x) = |f(x^4) + x^2|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 46. (HSG 12 - Sở Quảng Nam - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong ở hình vẽ. Hỏi hàm số $h(x) = [f(x)]^2 - 4f(x) + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Lời giải

Đặt $g(x) = [f(x)]^2 - 4f(x) + 1$.

$$g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 4f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \ (a > 2) \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Khi đó,

Do đó, ta có bảng biến thiên:

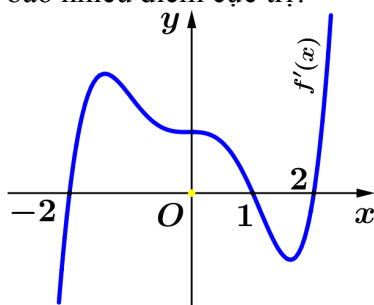
x	$-\infty$	-1	2	a	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$		-3		13		$+\infty$

$\text{pre}(2) < 0$

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ba điểm cực không nằm trên trục hoành và bốn giao điểm với Ox .

Vậy đồ thị hàm số $y = h(x) = |g(x)|$ có số cực trị là $3 + 4 = 7$.

Câu 47. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(-2) < f(2) = 0$, đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Hàm số $g(x) = \left| f(x) + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



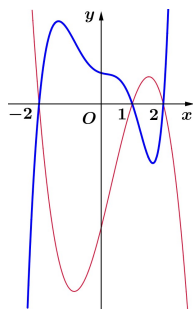
Lời giải

Xét hàm số $h(x) = f(x) + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$

Ta có $h'(x) = f'(x) + x^3 - x^2 - 4x + 4 = f'(x) - (1-x)(x^2 - 4)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (1-x)(x^2 - 4)$$

Vẽ đồ thị hàm số $y = (1-x)(x^2 - 4)$ lên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị $f'(x)$ thì hai đồ thị này cắt nhau tại 3 điểm $x = 1; x = \pm 2$



Mà $h(-2) = f(-2) - \frac{28}{3} < 0$, (do $f(-2) < 0$); $h(1) = f(1) + \frac{23}{12}$,

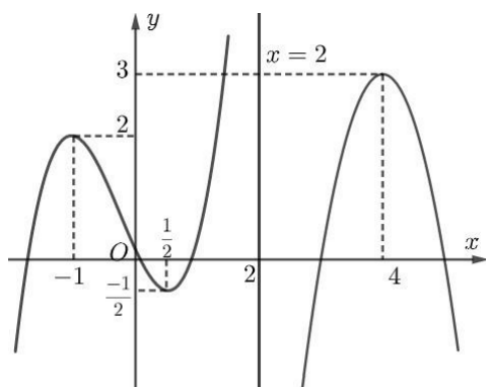
$h(2) = f(2) + \frac{2}{3} > 0$, do $f(2) = 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$				$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy đồ thị hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị và cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên đồ thị hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 cực trị.

Câu 48. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|2x - 1| + 2)$

Lời giải

$$g(x) = f(|2x - 1| + 2) \Rightarrow g'(x) = \frac{2(2x - 1)}{|2x - 1|} f'(|2x - 1| + 2)$$

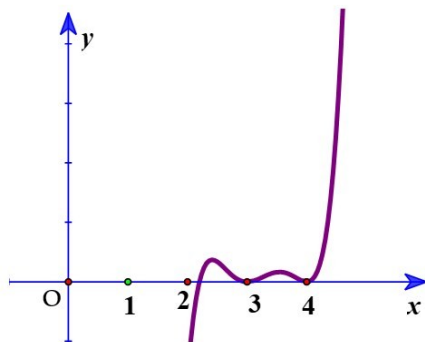
Ta có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|2x - 1| + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x - 1| + 2 = -1 (VN) \\ |2x - 1| + 2 = \frac{1}{2} (VN) \Leftrightarrow |2x - 1| + 2 = 4 \\ |2x - 1| + 2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |2x - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$g'(x)$ không xác định tại $x = \frac{1}{2}$ và $g'(x)$ đổi dấu tại $x = \frac{1}{2}$, nhưng tại $x = \frac{1}{2}$ thì $g(x)$ không xác định (vì $f(x)$ kxd tại $x=2$). Vậy hàm số có 2 điểm cực trị là $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}$.

Câu 49. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2022) Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 sao cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ và $f(2) < 0, f(1) > 0$.



Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $y = |f(x^2 + 4x + 5)|$

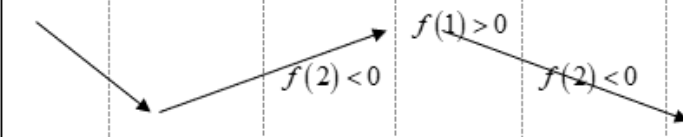
Lời giải

+ Đặt $g(x) = f(x^2 + 4x + 5) \Rightarrow g'(x) = (2x + 4) \cdot f'(x^2 + 4x + 5)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ f'(x^2+4x+5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x^2+4x+5=a \in (2;3) \\ x^2+4x+5=3 \\ x^2+4x+5=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x^2+4x+5-a=0 \\ x^2+4x+2=0 \\ x^2+4x+1=0 \end{cases}$$

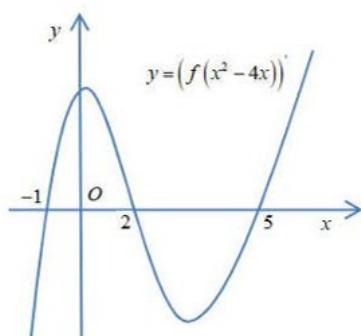
$$\Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-2 \pm \sqrt{a-1} \end{cases} \text{ (vì } x^2+4x+5=3; x^2+4x+5=4 \text{ có nghiệm bội chẵn)}$$

+ Bảng biến thiên của hàm số $y=|g(x)|$:

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{a-1}$	-3	-2	-1	$-2+\sqrt{a-1}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+\infty$ $-$	0 $+$	$ $ $+$	0 $-$	$ $ $-$	0 $+$	$+\infty$
$g(x)$							
$ g(x) $							

Vậy số điểm cực tiểu của hàm số $y=|f(x^2+4x+5)|$ là 4

Câu 50. (THPT Thị xã Quảng Trị 2023) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f(x^2-4x)$ có đồ thị của đạo hàm như hình vẽ dưới. Số điểm cực đại của hàm số $y=f(x^4-6|x|^3+5x^2+12|x|)$ bằng



Tìm số điểm cực đại của hàm số $y=f(x^4-4|x|^3+6x^2-4|x|)$

Lời giải

Ta có $g(x)=f(x^2-4x) \Rightarrow g'(x)=\left[f(x^2-4x)\right]'=2(x-2)f'(x^2-4x)$.

Từ hình vẽ ta suy ra $g'(x)=(x-2)(x+1)(x-5) \cdot h(x), (h(x) \geq 0 \forall x)$.

$$\Rightarrow f'(x^2 - 4x) = (x+1)(x-5) \cdot \frac{h(x)}{2} = (x^2 - 4x - 5) \frac{h(x)}{2}$$

Đặt $t = x^2 - 4x \Rightarrow f'(t) = (t-5) \cdot v(t)$, ($v(t) \geq 0 \forall t$). Khi đó $f(x)$ có điểm cực trị $x=5$.

Xét hàm số

$$P(x) = f(x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 12x) \Rightarrow P'(x) = (4x^3 - 18x^2 + 10x + 12) \cdot f'(x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 12x)$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 18x^2 + 10x + 12 = 0 \\ f'(x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 12x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 18x^2 + 10x + 12 = 0 \\ x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 12x = 5 \end{cases}$$

Giải phương trình

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} > 0; x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} > 0; x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} < 0; x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2} > 0; x = \frac{3 - \sqrt{29}}{2} < 0; x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 0; x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 0$$

Suy ra hàm số $y = P(x)$ có 5 điểm cực trị dương. Do đó hàm số $y = P(|x|)$ có 11 điểm cực trị.

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(|x|) = +\infty$ nên $y = P(|x|)$ có 5 điểm cực đại và 6 điểm cực tiểu.

Câu 51. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3[x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

Lời giải

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ (x+2)^4 = 0 \\ (x+4)^3 = 0 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = -4 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18 = 0 (*) \end{cases}$$

Ta có

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4 .

Trường hợp 1. Phương trình $(*)$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 + 24m + 36 - 24m - 72 = 4m^2 - 36 < 0$$

$$\Leftrightarrow -3 < m < 3 \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

Trường hợp 2. Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$

Trường hợp 3. Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Trong đó $x_1 = -4$.

$$x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 3 \end{cases}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -4 + x_2 = -2m - 6 \\ P = x_1 \cdot x_2 = -4 \cdot x_2 = 6m + 18 \end{cases}$$

Theo định lí Viète ta có

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2m - 2 \\ x_2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2m - 2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = 5$$

Vậy $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 52. (THPT PTNK Cơ sở 2 - TP.HCM - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^2(x^2-x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng các phần tử của S ?

Lời giải

$$f'(x) = (x-2)^2(x^2-x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ta có Với $x = 2$ là nghiệm kép, $x = 1, x = 0$ là nghiệm đơn. Do đó hàm số $f = f(x)$ đạt cực trị tại $x = 1, x = 0$.

Đặt $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right) \Rightarrow g'(x) = (x-6)f'\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$. Khi đó:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 0 \quad (1) \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình (1) thì $\frac{1}{2}x_0^2 - 6x_0 + m = 0$ do đó x_0 không thể là nghiệm của phương trình (2) hay nói cách khác phương trình (1), (2) không có nghiệm chung. Vì vậy, để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình (1), (2) có hai nghiệm phân biệt khác 6 hay

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + m \neq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - \frac{m}{2} > 0 \\ 9 - \left(\frac{m-1}{2}\right) > 0 \\ m < 18 - \frac{m \in \mathbb{Z}^+}{\rightarrow} m \in \{1, 2, \dots, 17\} \\ m \neq 18, m \neq 19 \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị của m là: $1 + 2 + \dots + 17 = 153$.

Câu 53. (THPT Hồ Nghinh – Quảng Nam – 2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2 - 4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

Lời giải

Ta có $g(x) = f(2x^2 - 12x + m) \Rightarrow g'(x) = (4x - 12) \cdot f'(2x^2 - 12x + m)$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow (4x - 12) \cdot f'(2x^2 - 12x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ f'(2x^2 - 12x + m) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = 0 \\ 2x^2 - 12x + m = 4 \\ 2x^2 - 12x + m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = 0 \quad (1) \\ 2x^2 - 12x + m - 4 = 0 \quad (2) \\ 2x^2 - 12x + m + 1 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Vì phương trình (3) có nghiệm kép nên ta chỉ xét 2 phương trình (1) và (2).

Nhận xét: phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung.

Yêu cầu bài toán suy ra phương trình (1) và (2) đều có 2 nghiệm phân biệt khác nhau và khác 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} > 0 \\ 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + m \neq 0 \\ \Delta_{(2)} > 0 \\ 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + m - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 - 2m > 0 \\ m \neq 18 \\ 36 - 2(m - 4) > 0 \\ m \neq 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 18 \\ m \neq 18 \\ m < 22 \\ m \neq 22 \end{cases} \Leftrightarrow m < 18$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 17\}$.

Câu 54. (THPT Bùi Thị Xuân – Huế – 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

Đặt $g(x) = f(x^2 - 8x + m) \Rightarrow g'(x) = (2x - 4) \cdot f'(x^2 - 8x + m)$

$$f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x) \Rightarrow g'(x) = (2x - 4)(x^2 - 8x + m - 1)^2(x^2 - 8x + m)(x^2 - 8x + m - 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m - 1 = 0 \\ x^2 - 8x + m = 0 \\ x^2 - 8x + m - 2 = 0 \end{cases}$$

Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và $(x^2 - 8x + m - 1)^2 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - m > 0 \\ 16 - m + 2 > 0 \\ 16 - 32 + m \neq 0 \\ 16 - 32 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m < 18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16.$$

m nguyên dương và $m < 16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 55. (Chuyên Quốc Học Huế 2022) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 2x + m + 1)$ có 3 điểm cực trị?

Lời giải

Ta có $y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x + m + 1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x + m + 1 = -1 \\ x^2 - 2x + m + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x + m + 2 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ phân biệt.

Cách 1:

Để ý rằng hai phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung.

Điều này xảy ra trong các trường hợp:

TH1. (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 và (2) không có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)} > 0 \\ 1^2 - 2 \cdot 1 + m + 2 \neq 0 \\ \Delta'_{(2)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - m > 0 \\ m \neq -1 \\ 3 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m \neq -1 \\ m \geq 3 \end{cases} \quad (\text{Vô nghiệm}).$$

TH2. (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1 và (1) không có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(2)} > 0 \\ 1^2 - 2 \cdot 1 + m - 2 \neq 0 \\ \Delta'_{(1)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m > 0 \\ m \neq 3 \\ -1 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq 3 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 3.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

TH3. (1) có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x=1$ và (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

(1) có nghiệm $x=1 \Rightarrow 1^2 - 2 \cdot 1 + m + 2 = 0 \Rightarrow m = -1$. Khi đó (1) trở thành

$x^2 - 2x + 1 = 0$ không có hai nghiệm phân biệt. Trường hợp này không thỏa mãn.

TH4. (2) có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x=1$ và (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

(2) có nghiệm $x=1 \Rightarrow 1^2 - 2 \cdot 1 + m - 2 = 0 \Rightarrow m = 3$. Khi đó (2) trở thành

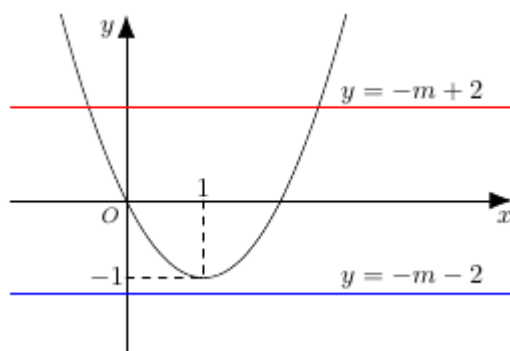
$x^2 - 2x + 1 = 0$ không có hai nghiệm phân biệt. Trường hợp này không thỏa mãn.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Cách 2.

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -m - 2 \\ x^2 - 2x = -m + 2 \end{cases}$$

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$



Từ đồ thị, suy ra $\begin{cases} -m + 2 > -1 \\ -m - 2 \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 3$.

Do m nguyên nên có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Câu 56. (THPT Trần Quốc Tuấn - Quảng Ngãi - 2022) Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = (x^2 - 7x + 10)(x^2 - 2(m+1)x + 2m+6)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên m không vượt quá số 2022 sao cho hàm số $g(x) = f(x^2 + 1)$ có 9 điểm cực trị?

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ h(x) = x^2 - 2(m+1)x + 2m+6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \\ h(x) = x^2 - 2(m+1)x + 2m+6 = 0 \end{cases}$$

$$+ g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 + 1)$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

Để hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $f'(x^2 + 1) = 0$ có 8 nghiệm đơn hoặc bội lẻ khác 0.

+TH1: $h(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép thì $f'(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 2 \\ x^2 + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$ (ko xét nghiệm kép nếu có của $h(x) = 0$ vì nó là nghiệm bội chẵn)

Suy ra $f'(x^2 + 1) = 0$ chỉ có 4 nghiệm đơn $\Rightarrow$ loại.

+TH2: $h(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x = a, x = b$ với $(a < b)$.

$$f'(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 2 \\ x^2 + 1 = 5 \\ x^2 + 1 = a \\ x^2 + 1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \\ x^2 + 1 = a \\ x^2 + 1 = b \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (2)$ và (3) có tổng số nghiệm là 4 nghiệm phân biệt khác $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < a < b \\ a, b \notin \{-2; -1; 0; 1; 2\} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ phương trình $h(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $a, b > 1$ và khác 2, 5.

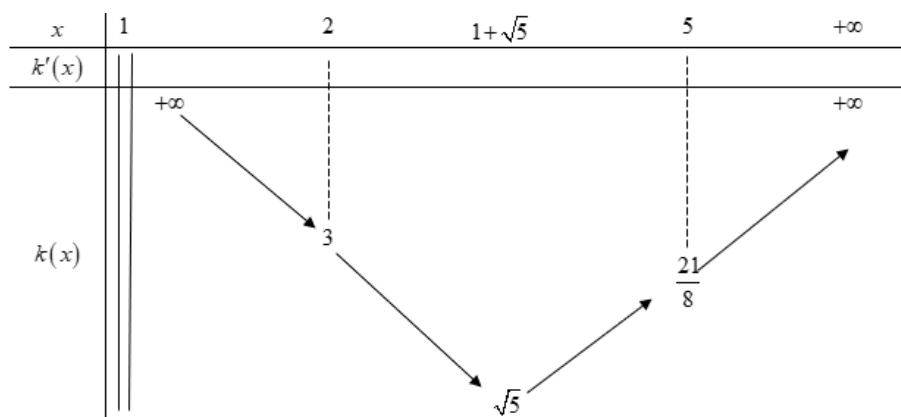
□ Xét phương trình $h(x) = x^2 - 2(m+1)x + 2m+6 = 0$ với $x > 1$.

$$\Leftrightarrow 2m(x-1) = x^2 - 2x + 6 \text{ với } x > 1.$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{x^2 - 2x + 6}{2(x-1)} = k(x), x > 1$$

$$\text{Khi đó } k'(x) = \frac{x^2 - 2x - 4}{2(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{5} \\ x = 1 + \sqrt{5} \end{cases}$$

Bảng biến thiên



$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{5} \\ m \neq 3 \\ m \neq \frac{21}{8} \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán . Với điều kiện $m \in \mathbb{Z}$ và $m \leq 2022$

Suy ra $m \in \{4; 5; \dots, 2022\}$.

Vậy có 2019 giá trị m thỏa mãn.

Câu 57. (Mã 101 - 2021 Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 7)(x^2 - 9)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

Lời giải

Ta có: $f'(x) = (x - 7)(x^2 - 9)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left[f(|x^3 + 5x| + m) \right]' = (|x^3 + 5x| + m)' \cdot f'(|x^3 + 5x| + m) \\ &= \frac{(3x^2 + 5)(x^3 + 5x)}{|x^3 + 5x|} f'(|x^3 + 5x| + m) \end{aligned}$$

Nhận thấy: $x = 0$ là 1 điểm cực trị của hàm số.

$$f'(|x^3 + 5x| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 5x| + m = 7 \\ |x^3 + 5x| + m = 3 \\ |x^3 + 5x| + m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 5x| = 7 - m \\ |x^3 + 5x| = 3 - m \\ |x^3 + 5x| = -3 - m \end{cases}$$

Cho

Đặt $h(x) = x^3 + 5x \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

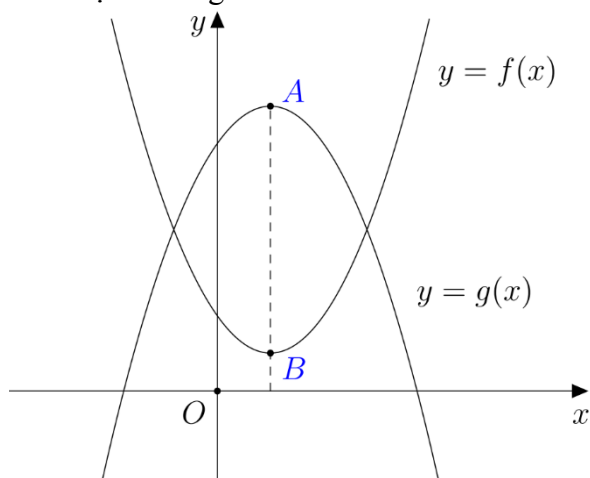
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+		+
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$
$ h(x) $	$+\infty$	0	$+\infty$

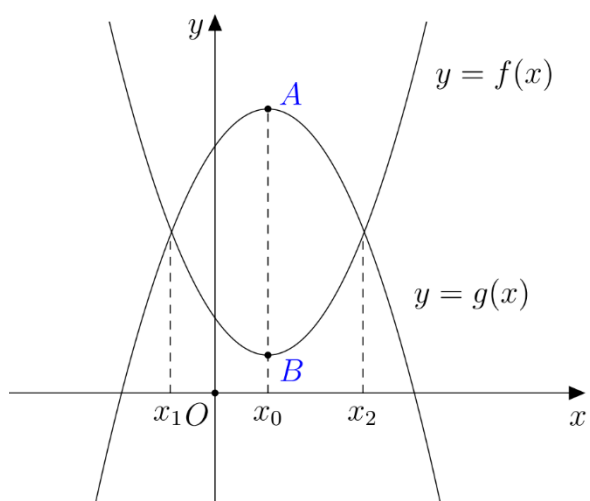
Từ bảng biến thiên suy ra: Yêu cầu bài toán tương đương với $7 - m > 0 \Leftrightarrow m < 7$

$$\Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

Câu 58. (Sở GD Quảng Nam - 2019) Cho hai hàm đa thức $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A , đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng một điểm cực trị là B và $AB = \frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5; 5)$ để hàm số $y = |f(x) - g(x)| + m$ có đúng 5 điểm cực trị?



Lời giải



Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$, ta có: $h'(x) = f'(x) - g'(x)$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$;

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ hoặc $x = x_2$ ($x_1 < x_0 < x_2$);

$$h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = -\frac{7}{4}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ là:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$-\frac{7}{4}$	$+\infty$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = k(x) = |f(x) - g(x)|$ là:

x	$-\infty$	x_1	x_0	x_2	$+\infty$
$k'(x)$		$-$	$+$	$-$	$+$
$k(x)$	$+\infty$	0	$\frac{7}{4}$	0	$+\infty$

Do đó, hàm số $y = k(x) + m$ cũng có ba điểm cực trị.

Vì số điểm cực trị hàm số $y = |k(x) + m|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y = k(x) + m$ và số nghiệm đơn và số nghiệm bội lẻ của phương trình $k(x) + m = 0$, mà hàm số $y = k(x) + m$ cũng có ba điểm cực trị nên hàm số $y = |f(x) - g(x)| + m$ có đúng năm điểm cực trị khi phương trình $k(x) + m = 0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ).

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = k(x)$, phương trình $k(x) + m = 0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ) khi và chỉ khi

$$-m \geq \frac{7}{4} \Leftrightarrow m \leq -\frac{7}{4}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$, $m \leq -\frac{7}{4}$ và $m \in (-5; 5)$ nên $m \in \{-4; -3; -2\}$.

Câu 59. (Chuyên Vinh – 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x^2 + 9x)(x^2 - 9)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = g(x) = f(|x^3 + 3x| + 2m - m^2)$ có không quá 6 điểm cực trị?

Lời giải

Do $g(-x) = f(|-x^3 - 3x| + 2m - m^2) = f(|x^3 + 3x| + 2m - m^2) = g(x)$ nên hàm số này là hàm số chẵn tức để hàm số $g(x)$ có không quá 6 điểm cực trị (cụ thể là tối đa 5 cực trị) thì hàm $h(x) = f(x^3 + 3x + 2m - m^2)$ có tối đa 2 điểm cực trị dương.

Tức phương trình $h'(x) = (3x^2 + 3)f'(x^3 + 3x + 2m - m^2) = 0$ có tối đa 2 nghiệm bội lẻ dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x + 2m - m^2 = 0 \\ x^3 + 3x + 2m - m^2 = -9 \\ x^3 + 3x + 2m - m^2 = -3 \\ x^3 + 3x + 2m - m^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x = m^2 - 2m = y_3 \\ x^3 + 3x = m^2 - 2m - 9 = -y_1 \quad (*) \\ x^3 + 3x = m^2 - 2m - 3 = y_2 \\ x^3 + 3x = m^2 - 2m + 3 = y_4 \end{cases}$$

Như vậy để thỏa mãn đề bài thì bốn đường thẳng lần lượt là y_1, y_2, y_3, y_4 phải cắt đồ thị $y = x^3 + 3x$ tại tối đa hai nghiệm dương. Xét hàm số $y = x^3 + 3x$ có $y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y(0) = 0$.

Nhận thấy $m^2 - 2m + 3 = (m - 1)^2 + 2 > 0$ luôn đúng nên hệ $(*)$ có tối thiểu 1 nghiệm, từ đó ta có:

Trường hợp 1: $m^2 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow m \in [0; 2]$ thì hệ $(*)$ có 1 nghiệm tức hàm số luôn có 3 điểm cực trị

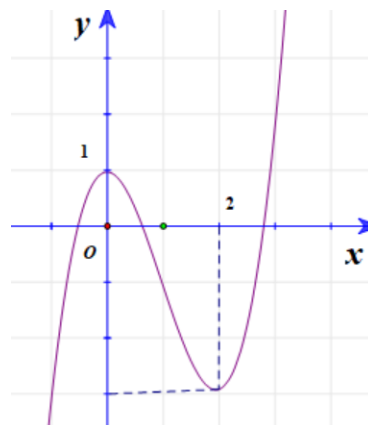
Trường hợp 2: $m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases}$ thì hệ $(*)$ đang có 2 nghiệm dương. Do hàm số có tối đa 5 điểm cực trị nên chỉ có tối đa 2 nghiệm dương tức ta có điều kiện đủ là:

$$\begin{cases} m^2 - 2m - 9 \leq 0 \\ m^2 - 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-1; 3]$$

So với điều kiện ta suy ra $m \in \{-1; 3\}$.

Từ hai trường hợp ta suy ra $m \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$ tức có 5 giá trị nguyên m thỏa.

Câu 60. (Cụm Trường Nghệ An - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ để hàm số $g(x) = f(|x^5 + 4x| + m)$ có ít nhất 5 điểm cực trị.



Lời giải

Hàm số $y = x^5 + 4x \Rightarrow y' = 5x^4 + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $y = x^5 + 4x$ là hàm số lẻ và đồng biến trên $\mathbb{R}$, $x^5 + 4x > 0 \Leftrightarrow x > 0; x^5 + 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Vậy hàm số $g(x) = f(|x^5 + 4x| + m)$ là hàm số chẵn, có đồ thị nhận trục Oy là trục đối xứng.

Hàm số $g(x) = f(|x^5 + 4x| + m) \Leftrightarrow h(x) = f(x^5 + 4x + m)$ có ít nhất 5 điểm cực trị có ít nhất hai điểm cực trị dương.

$$h'(x) = (5x^4 + 4)f'(x^5 + 4x + m) \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 + 4x + m = 0 \\ x^5 + 4x + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 + 4x = -m \\ x^5 + 4x = 2 - m \end{cases}$$

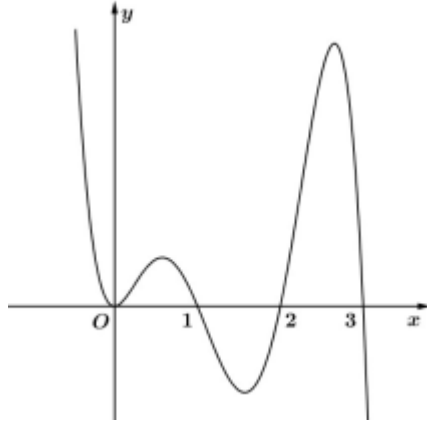
Ta có

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tổng số giao điểm có hoành độ dương khác nhau của đồ thị hàm số $y = x^5 + 4x$ với hai đường thẳng $y = -m; y = 2 - m$ ít nhất là 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$$

Do m nguyên và thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ nên có 2021 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 61. (Chuyên Sơn La 2022) Cho hàm đa thức $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị của m để $m \in [0; 6], 2m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2|x - 1| - 2x + m)$ có đúng 9 điểm cực trị.

Lời giải

Ta có: $g(x) = f(|x - 1|^2 - 2|x - 1| + m - 1)$

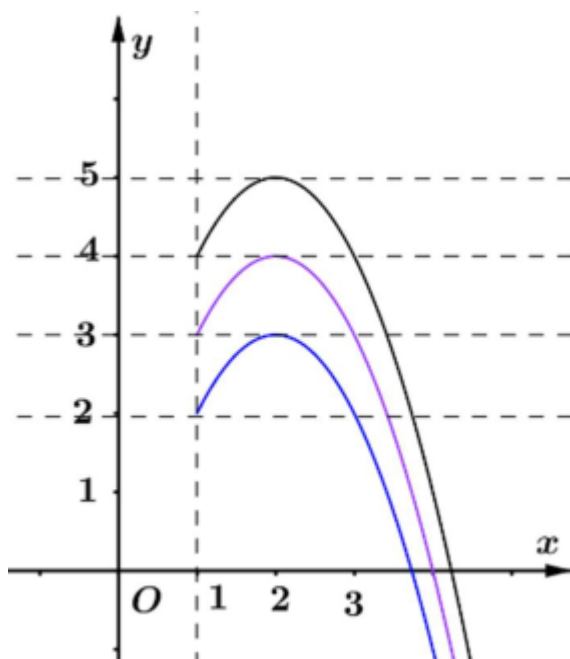
Đồ thị hàm số $y = g(x)$ nhận đường thẳng $x = 1$ làm trục đối xứng và hàm số $y = g(x)$ luôn có một điểm cực trị là $x = 1$.

Xét trường hợp $x > 1$, ta có: $g(x) = f(x^2 - 4x + 2 + m) \cdot g'(x) = (2x - 4) \cdot f'(x^2 - 4x + 2 + m)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x + 2 + m = 0 (*) \\ -x^2 + 4x - 1 = m (1) \\ -x^2 + 4x = m (2) \\ -x^2 + 4x + 1 = m (3) \end{cases}$$

Phương trình (*) nếu có nghiệm thì các nghiệm này sẽ là nghiệm bội chẵn của $g'(x) = 0$ nên hàm số $g(x)$ không đạt cực trị tại các nghiệm này.

Đồ thị các hàm số $y = -x^2 + 4x - 1, y = -x^2 + 4x, y = -x^2 + 4x + 1$ trên khoảng $(1; +\infty)$ được cho bởi hình dưới đây:

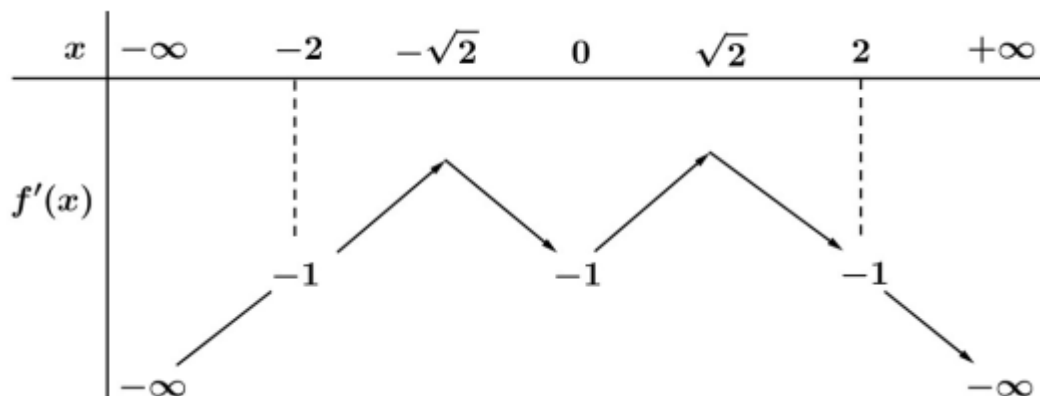


Hàm số $y=g(x)$ có 9 cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y=g(x)$ có 4 cực trị $x > 1$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $g'(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt $x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < m < 4 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 < 2m < 8 \\ 2m \leq 4 \end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện $2m \in \mathbb{Z}$ và $0 \leq 2m \leq 12$ ta được: $2m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 7\}$, tức là $m \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{7}{2}\right\}$. Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 62. (THPT Trần Nhân Tông – Quảng Ninh 2022) Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có $f(2)=36, f(-2)=-32$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-50; 50)$ để hàm số

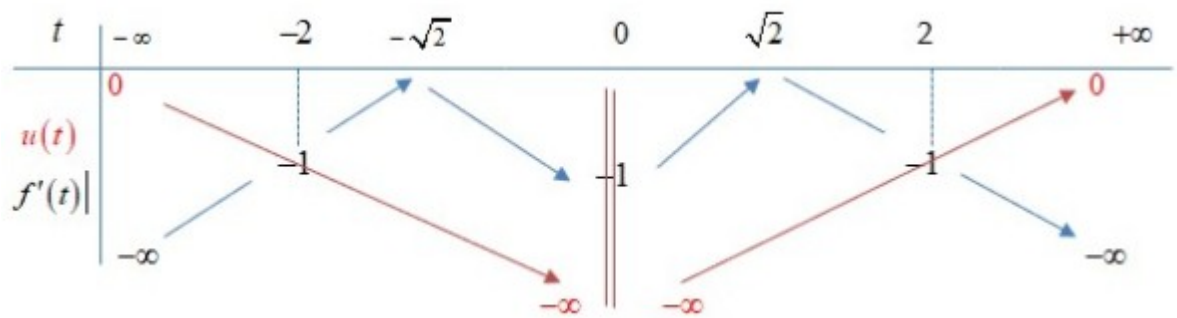
$g(x) = \left| f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) - \frac{6}{2x-1} + m \right|$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

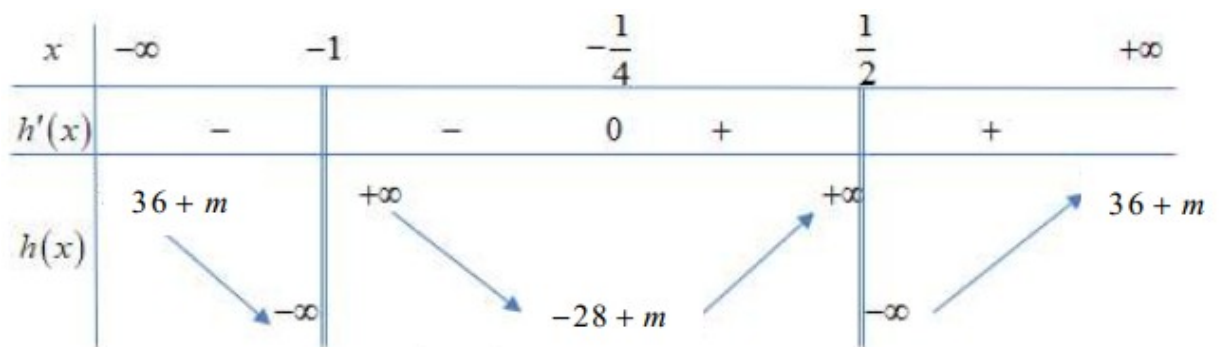
Xét $h(x) = f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) - \frac{6}{2x-1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}; -1\right\}$. Ta có $h'(x) = f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{12}{(2x-1)^2}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \frac{-4(x+1)^2}{(2x-1)^2}$ đặt $t = \frac{2x-1}{x+1}$ ta được phương trình $f'(t) = \frac{-4}{t^2}$

Đặt $u(t) = \frac{-4}{t^2}$ dễ dàng suy ra được bảng sau



Do đó $f'(t) = \frac{-4}{t^2} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-2 \end{cases}$ thay lại ta được $h'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \frac{-1}{4}$. Ta có bảng biến thiên của $h(x) = 0$.



Do $h(x)$ có 1 điểm cực trị nên để hàm số $|h(x)|$ có 5 điểm cực trị khi chỉ khi $h(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt do đó ta suy ra $\begin{cases} 36 + m > 0 \\ -28 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -36 < m < 28$. Vậy có 63 giá trị của m .