

ĐỀ: PT mặt cầu

Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Khi đó:

- a) Tâm mặt cầu (S) là $I(1; -2; 3)$;
- b) Bán kính mặt cầu (S) là $R=16$;
- c) Điểm $M(2; 0; 1)$ nằm trong mặt cầu (S) ;
- d) Mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 4 = 0$ cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính nhỏ hơn 3.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3; -2; 5)$, $N(-1; 6; -3)$. Khi đó:

- a) Mặt cầu tâm M và bán kính $R=5$ có phương trình là: $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+5)^2 = 25$;
- b) Mặt cầu đường kính MN có tâm $I(1; 2; 1)$;
- c) Bán kính của mặt cầu đường kính MN là $R=6$;
- d) Mặt phẳng (Q) song song với $(P): 2x + y - 2z - 20 = 0$ tiếp xúc mặt cầu đường kính MN có phương trình là $2x + y - 2z + 16 = 0$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 4 = 0$. Khi đó:

- a) Tâm mặt cầu (S) là $I(1; 0; -2)$;
- b) Bán kính mặt cầu (S) là $R=3$;
- c) Điểm $M(2; 3; 2)$ nằm trên mặt cầu (S) ;
- d) Phương trình mặt phẳng (P) song song với $(\alpha): x + y - z + 1 = 0$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có diện tích bằng 6π là $x + y - z = 0$ hoặc $x + y - z + 6 = 0$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(1; -4; 2)$, $B(1; 1; -3)$, $C(2; 3; 2)$, $D(1; 4; 0)$. Khi đó:

- a) Mặt cầu tâm A và đi qua B có bán kính $R=5\sqrt{2}$;
- b) Phương trình mặt cầu tâm A đi qua B là: $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 10$;
- c) Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có phương trình là: $(x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 26$;
- d) Mặt cầu (S) qua 2 điểm A, B và có tâm thuộc đường thẳng CD có phương trình là: $\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{7}{3}\right)^2 = \frac{124}{3}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 4 = 0$. Khi đó:

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R=9$;
- b) Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{13}{3}$;
- c) Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) ;

d) Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $H(3;0;2)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 9 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$. Khi đó:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$ và bán kính $R = 10$;

b) Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{20}{3}$;

c) Đường thẳng qua $I(3; -2; 1)$ vuông góc với (P) có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$;

d) Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) có tâm $K(-1; 2; 3)$ và bán kính $r = 8$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 10$ và hai điểm $A(1; 2; -4)$ và $B(1; 2; 14)$. Khi đó:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; 2)$; bán kính $R = 10$;

b) Phương trình mặt cầu tâm B có bán kính $R = 5$ là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-14)^2 = 5$;

c) Phương trình mặt cầu tâm A đi qua B là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 324$;

d) Điểm M thay đổi trên mặt cầu (S) , giá trị nhỏ nhất của $MA + 2MB$ bằng $3\sqrt{82}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 3$. Khi đó:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 3; 3)$; bán kính $R = \sqrt{3}$;

b) Phương trình mặt cầu tâm B, bán kính $R = 5$ là $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25$;

c) Phương trình mặt cầu đường kính AB là $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = 75$;

d) Điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S) , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng 105.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$. Khi đó:

a) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ không là phương trình mặt cầu;

b) Phương trình $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ là phương trình mặt cầu;

c) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 2z + 17 = 0$ là phương trình mặt cầu;

d) Phương trình $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x + 8y - 4z - 40 = 0$ không là phương trình mặt cầu..

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 2; 3)$ và $N(-1; 2; -1)$. Khi đó:

a) Mặt cầu tâm $M(1; 2; 3)$ bán kính $R = 5$ có phương trình là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$;

b) Điểm $N(-1; 2; -1)$ nằm trong mặt cầu tâm $M(1; 2; 3)$ bán kính $R = 5$;

c) Mặt cầu đường kính MN có phương trình là $x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$;

d) Giả sử một thiết bị phát sóng đặt tại điểm $M(1; 2; 3)$, vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 3 thì điểm $N(-1; 2; -1)$ thuộc vùng phủ sóng của thiết bị.

Câu 11. Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian. Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: trong cùng một thời điểm tọa độ của điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí điểm M cần tìm tọa độ. Như vậy, điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 vệ tinh đặt tại các vị trí $A(2; 6; 4)$, $B(1; -6; -4)$, $C(1; -4; 1)$, $D(-8; 2; 4)$. Một điểm M trong không gian thỏa mãn khoảng cách từ M đến các vệ tinh lần lượt là: $MA=13$, $MB=10$, $MC=7$, $MD=17$. Khi đó:

a) Điểm M thuộc mặt cầu có phương trình $(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-4)^2 = 169$;

b) Điểm M nằm trên giao tuyến của hai mặt cầu có phương trình: $(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z+4)^2 = 10$ và $(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-4)^2 = 169$;

c) Điểm M nằm trên giao tuyến của hai mặt cầu tâm C , bán kính bằng 7 và mặt cầu tâm D bán kính bằng 17 nên có tọa độ thỏa mãn phương trình: $9x - 6y - 3z - 87 = 0$;

d) Điểm M có tọa độ là $M(7; 6; 4)$.

ĐÁP ÁN

Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Khi đó:

a) Tâm mặt cầu (S) là $I(1; -2; 3)$;

b) Bán kính mặt cầu (S) là $R=16$;

c) Điểm $M(2; 0; 1)$ nằm trong mặt cầu (S) ;

d) Mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 4 = 0$ cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính nhỏ hơn 3.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Tâm mặt cầu (S) là $I(1; -2; 3)$. Do đó câu này đúng.

b) Bán kính mặt cầu (S) là $R = \sqrt{16} = 4$. Do đó câu này sai.

c) Ta có $IM^2 = (2-1)^2 + (0+2)^2 + (1-3)^2 = 9 < R^2$ nên điểm $M(2; 0; 1)$ nằm trong mặt cầu (S) . Do đó câu này đúng.

d) Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) là:

$$d(I, (P)) = \frac{|2 + 2 + 6 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2$$

Vậy bán kính r của đường tròn giao tuyến là: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} \approx 3,5$. Do đó câu này sai.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3; -2; 5)$, $N(-1; 6; -3)$. Khi đó:

a) Mặt cầu tâm M và bán kính $R=5$ có phương trình là: $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+5)^2 = 25$;

b) Mặt cầu đường kính MN có tâm $I(1; 2; 1)$;

c) Bán kính của mặt cầu đường kính MN là $R=6$;

d) Mặt phẳng (Q) song song với $(P): 2x + y - 2z - 20 = 0$ tiếp xúc mặt cầu đường kính MN có phương trình là $2x + y - 2z + 16 = 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

a) Mặt cầu tâm M và bán kính $R=5$ có phương trình là: $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 25$. Do đó câu này sai.

b) Gọi I là tâm của mặt cầu đường kính $MN \Rightarrow I$ là trung điểm của $MN \Rightarrow I(1; 2; 1)$. Do đó câu này đúng.

c) Bán kính $IM = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2 + (5-1)^2} = 6$. Do đó câu này đúng.

d) Mặt cầu đường kính MN có tâm $I(1; 2; 1)$; $R=6$.

Mặt phẳng (Q) cần tìm có dạng $2x + y - 2z + m = 0$ (Do $(Q) // (P) \Rightarrow m \neq -20$).

Điều kiện tiếp xúc: $d(I; (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|m+2|}{3} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -20 \text{ (loại)} \\ m = 16 \end{cases}$. Vậy phương trình (Q) là $2x + y - 2z + 16 = 0$. Do đó câu này đúng.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 4 = 0$. Khi đó:

a) Tâm mặt cầu (S) là $I(1; 0; -2)$;

b) Bán kính mặt cầu (S) là $R=3$;

c) Điểm $M(2; 3; 2)$ nằm trên mặt cầu (S) ;

d) Phương trình mặt phẳng (P) song song với $(\alpha): x + y - z + 1 = 0$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có diện tích bằng 6π là $(P): x + y - z = 0$ hoặc $x + y - z + 6 = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Gọi $I(a;b;c)$ thì $\begin{cases} a = \frac{-2}{-2} = 1 \\ b = \frac{0}{-2} = 0 \\ c = \frac{4}{-2} = -2 \end{cases}$ nên $I(1;0;-2)$. Do đó câu này đúng.

b) Bán kính mặt cầu: $R = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2 + 4} = 3$. Do đó câu này đúng.

c) Ta có $IM^2 = (2-1)^2 + (3-0)^2 + (2+2)^2 = 26 > 9 = R^2$ nên M nằm ngoài mặt cầu. Do đó câu này sai.

d) Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$ có tâm $I(1;0;-2)$ bán kính $R=3$.

Do diện tích đường tròn giao tuyến $S = \pi r^2 = 6\pi \Rightarrow r = \sqrt{6} \Rightarrow d(I;(P)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{3}$.

Mặt phẳng (P) song song với $(\alpha) \Rightarrow (P): x + y - z + D = 0$

Ta có: $d(I;(P)) = \frac{|1+2+D|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} D=0 \\ D=-6 \end{cases}$.

Vì vậy $(P): x + y - z = 0$ hoặc $x + y - z - 6 = 0$. Do đó câu này sai.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(1;-4;2)$, $B(1;1;-3)$, $C(2;3;2)$, $D(1;4;0)$. Khi đó:

a) Mặt cầu tâm A và đi qua B có bán kính $R = 5\sqrt{2}$;

b) Phương trình mặt cầu tâm A đi qua B là: $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 10$;

c) Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có phương trình là: $(x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 26$;

d) Mặt cầu (S) qua 2 điểm A, B và có tâm thuộc đường thẳng CD có phương trình là:

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{7}{3}\right)^2 = \frac{124}{3}.$$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Mặt cầu tâm A đi qua B có bán kính $R = AB = \sqrt{(1-1)^2 + (1+4)^2 + (-3-2)^2} = 5\sqrt{2}$. Do đó câu này đúng.

b) Phương trình mặt cầu tâm A đi qua B là: $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 10$. Do đó câu này sai.

c) **Cách 1:** Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu (S) cần tìm.

Theo giả thiết:
$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = -1 \\ x + 7y = -2 \\ -4y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Do đó: $I(-2;0;1)$ và $R = IA = \sqrt{26}$. Vậy $(S): (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 26$.

Cách 2: Gọi phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$).

Do $A(1; -4; 2) \in (S) \Leftrightarrow -2a + 8b - 4c + d = -21$ (1)

Tương tự: $B(1; 1; -3) \in (S) \Leftrightarrow -2a - 2b + 6c + d = -11$ (2)

$C(2; 3; 2) \in (S) \Leftrightarrow -4a - 6b - 4c + d = -17$ (3)

$D(1; 4; 0) \in (S) \Leftrightarrow -2a - 8b + d = -17$ (4)

Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta có a, b, c, d , suy ra phương trình mặt cầu (S):

$(x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 26$. Do đó câu này đúng.

d) Phương trình tham số đường thẳng CD là:
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Do tâm I mặt cầu (S) thuộc CD nên có $I(2-t; 3+t; 2-2t)$.

Vì $IA = IB$ nên $\sqrt{(-1+t)^2 + (-7-t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{(-1+t)^2 + (-2-t)^2 + (-5+2t)^2}$

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 49 + 14t + t^2 = 25 - 20t + 4t^2 + 4 + 4t + t^2$$

$$\Leftrightarrow 30t = -20 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}$$

Vậy $I\left(\frac{8}{3}; \frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$ và $R = IA = \frac{2\sqrt{93}}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{124}{3}$. Do đó câu này sai.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng (P): $2x - 2y - z - 4 = 0$. Khi đó:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 9$;

b) Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{13}{3}$;

c) Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S);

d) Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $H(3; 0; 2)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 3$. Do đó câu này sai.

$$d(I, (P)) = \frac{|2 - 4 - 3 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 3$$

b) .Do đó câu này sai.

c) Vì $d(I, (P)) = 3 = R$ nên (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) . Do đó câu này đúng.

d) Tọa độ điểm H là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (P) .

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Tọa độ điểm H là giao điểm của d và (P) , ta có:

$$2(1 + 2t) - 2(2 - 2t) - (3 - t) - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy $H(3; 0; 2)$. Do đó câu này đúng.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 9 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$. Khi đó:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$ và bán kính $R = 10$;

b) Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{20}{3}$;

c) Đường thẳng qua $I(3; -2; 1)$ vuông góc với (P) có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases};$$

d) Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) có tâm $K(-1; 2; 3)$ và bán kính $r = 8$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$; $R = 10$. Do đó câu này đúng.

b) Khoảng cách từ I đến (P) là $IK = d(I; (P)) = \frac{|6 + 4 - 1 + 9|}{3} = 6$. Do đó câu này sai.

c) Đường thẳng qua $I(3; -2; 1)$ vuông góc với (P) có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Do đó câu này đúng.

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow K(-1; 2; 3)$$

d) Tọa độ tâm K là nghiệm của hệ phương trình $2x - 2y - z + 9 = 0$.

Bán kính: $r = \sqrt{R^2 - IK^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$. Do đó câu này đúng.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 10$ và hai điểm $A(1; 2; -4)$ và $B(1; 2; 14)$. Khi đó:

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; 2)$; $R = 10$;
 b) Phương trình mặt cầu tâm B và có bán kính $R = 5$ là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-14)^2 = 5$;
 c) Phương trình mặt cầu tâm A và đi qua B là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 324$;
 d) Điểm M thay đổi trên mặt cầu (S) , giá trị nhỏ nhất của $MA + 2MB$ bằng $3\sqrt{82}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$. Do đó câu này sai.

b) Phương trình mặt cầu tâm B và có bán kính $R = 5$ là $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-14)^2 = 25$. Do đó câu này sai.

c) Mặt cầu tâm A và qua B có bán kính là $AB = \sqrt{0^2 + 0^2 + 18^2} = 18$

Phương trình mặt cầu tâm A và qua B là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 324$. Do đó câu này đúng.

d) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Ta có $IA = 2\sqrt{10} = 2R$ nên tồn tại điểm C cố định sao cho $MA = 2MC; \forall M \in (S)$ (1)

Thật vậy, gọi $C(a; b; c)$. Khi đó, với mọi điểm $M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 4z + 5$, ta có:

$$MA^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z + 21$$

$$= 2x + 4z + 5 - 2x - 4y + 8z + 21 = -4y + 12z + 26$$

$$MC^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2$$

$$= 2x + 4z + 5 - 2ax - 2by - 2cx + a^2 + b^2 + c^2 = (2-2a)x - 2by + (4-2c)z + a^2 + b^2 + c^2 + 5$$

$$(1) \Leftrightarrow MA^2 = 4MC^2; \forall M \in (S)$$

Nên

$$\Leftrightarrow -4y + 12z + 26 = 4[(2-2a)x - 2by + (4-2c)z + a^2 + b^2 + c^2 + 5]; \forall x; y; z \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(2-2a)=0 \\ 4(-2b)=-4 \\ 4(4-2c)=12 \\ 4(a^2+b^2+c^2+5)=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Lúc này, $IC = \frac{\sqrt{10}}{2} < R < IB = 2\sqrt{37}$ nên C nằm trong (S) còn B nằm ngoài (S) và
 $MA + 2MB = 2MC + 2MB = 2(MC + MB) \geq 2BC = 3\sqrt{82}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đoạn BC và mặt cầu (S) .

Vậy $\min(MA + 2MB) = 3\sqrt{82}$. Do đó câu này đúng.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 3$. Khi đó:

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 3; 3)$; $R = \sqrt{3}$;
 b) Phương trình mặt cầu tâm B và bán kính $R = 5$ là $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25$;
 c) Phương trình mặt cầu đường kính AB là $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = 75$;
 d) Điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S) , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng 105.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 3; 3)$ bán kính $R = \sqrt{3}$. Do đó câu này đúng.

b) Phương trình mặt cầu tâm B và có bán kính $R = 5$ là $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 25$. Do đó câu này sai.

c) Mặt cầu đường kính AB có tâm là trung điểm $M\left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ của đoạn thẳng AB và bán kính là
 $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(-3-2)^2 + (3+2)^2 + (-1-4)^2}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Phương trình mặt cầu là $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{75}{4}$. Do đó câu này sai.

d) Gọi E là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{2EA} + \overrightarrow{3EB} = \vec{0}$. Suy ra $E(-1; 1; 1)$.

Xét $P = 2MA^2 + 3MB^2 = 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 + 3(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 = 5ME^2 + 2EA^2 + 3EB^2$.

P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ME đạt giá trị nhỏ nhất.

$IE = 2\sqrt{3} > R$ suy ra điểm E nằm ngoài mặt cầu nên ME nhỏ nhất bằng $IE - R = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$

Vậy $P = 2MA^2 + 3MB^2 = 5ME^2 + 2EA^2 + 3EB^2 = 105$. Do đó câu này đúng.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$. Khi đó:

- a) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ không là phương trình mặt cầu;
 b) Phương trình $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ là phương trình mặt cầu;
 c) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 2z + 17 = 0$ là phương trình mặt cầu;
 d) Phương trình $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x + 8y - 4z - 40 = 0$ không là phương trình mặt cầu..

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Tập hợp điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ chỉ gồm 1 điểm duy nhất $O(0; 0; 0)$ nên đây không phải PT mặt cầu. Do đó câu này đúng.

b) Phương trình $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ là phương trình mặt cầu tâm $I(1; 0; 2)$ bán kính $R = 2$.
Do đó câu này đúng.

c) Từ phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 2z + 17 = 0$ ta có: $a=1, b=3, c=-1, d=17$ nên
 $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 9 + 1 - 17 = -6 < 0$. Do đó đây không phải là phương trình mặt cầu. Do đó câu này sai.

d) Phương trình $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x + 8y - 4z - 40 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z - 20 = 0$ khi đó
 $a=3, b=-2, c=1, d=-20$ nên $a^2 + b^2 + c^2 - d = 9 + 4 + 1 + 20 = 34 > 0$. Đây là phương trình mặt cầu.
Do đó câu này sai.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 2; 3)$ và $N(-1; 2; -1)$. Khi đó:

- a) Mặt cầu tâm $M(1; 2; 3)$ bán kính $R=5$ có phương trình là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$;
 b) Điểm $N(-1; 2; -1)$ nằm trong mặt cầu tâm $M(1; 2; 3)$ bán kính $R=5$;
 c) Mặt cầu đường kính MN có phương trình là $x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$;
 d) Giả sử một thiết bị phát sóng đặt tại điểm $M(1; 2; 3)$, vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 3 thì điểm $N(-1; 2; -1)$ thuộc vùng phủ sóng của thiết bị.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Mặt cầu tâm $M(1; 2; 3)$ bán kính $R=5$ có phương trình là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Do đó câu này sai.

b) Ta có: $MN^2 = (-1-1)^2 + (2-2)^2 + (-1-3)^2 = 20 < 25 = R^2$ nên Điểm $N(-1; 2; -1)$ nằm trong cầu tâm $M(1; 2; 3)$ bán kính $R=5$. Do đó câu này đúng.

c) Mặt cầu đường kính MN có tâm $I(0;2;1)$, bán kính $R=IM=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$ nên có phương trình: $x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$. Do đó câu này đúng.

d) Vùng phủ sóng của thiết bị thuộc hình cầu tâm $M(1;2;3)$, bán kính $R=3$ có phương trình: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$.

Ta có: $MN^2=(-1-1)^2+(2-2)^2+(-1-3)^2=20>9=R^2$ nên $N(-1;2;-1)$ không thuộc vùng phủ sóng của thiết bị. Do đó câu này sai.

Câu 11. Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian. Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: trong cùng một thời điểm tọa độ của điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí điểm M cần tìm tọa độ. Như vậy, điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 vệ tinh đặt tại các vị trí $A(2;6;4)$, $B(1;-6;-4)$, $C(1;-4;1)$, $D(-8;2;4)$. Một điểm M trong không gian thỏa mãn khoảng cách từ M đến các vệ tinh lần lượt là: $MA=13$, $MB=10$, $MC=7$, $MD=17$. Khi đó:

a) Điểm M thuộc mặt cầu có phương trình $(x-2)^2+(y-6)^2+(z-4)^2=169$;

b) Điểm M nằm trên giao tuyến của hai mặt cầu có phương trình: $(x-1)^2+(y+6)^2+(z+4)^2=10$ và $(x-2)^2+(y-6)^2+(z-4)^2=169$;

c) Điểm M nằm trên giao tuyến của hai mặt cầu tâm C , bán kính bằng 7 và mặt cầu tâm D bán kính bằng 17 nên có tọa độ thỏa mãn phương trình: $9x-6y-3z-87=0$;

d) Điểm M có tọa độ là $M(7;6;4)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

Theo giả thiết: $MA=13$, $MB=10$, $MC=7$, $MD=17$ nên điểm M thuộc các mặt cầu tâm $A(2;6;4)$, $B(1;-6;-4)$, $C(1;-4;1)$, $D(-8;2;4)$ với các bán kính lần lượt là $13,10,7,17$. Ký hiệu là:

$$S_1(A;13); S_2(B;10); S_3(C;7); S_4(D;17)$$

a) Mặt cầu tâm $A(2;6;4)$, bán kính $MA=13$ có phương trình $(x-2)^2+(y-6)^2+(z-4)^2=169$. Do đó câu này đúng

b) Mặt cầu tâm $B(1;-6;-4)$, bán kính $MB=10$ có phương trình: $(x-1)^2+(y+6)^2+(z+4)^2=100$. Do đó câu này sai.

c) Mặt cầu tâm $C(1;-4;1)$, bán kính $MC=7$ có phương trình $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=49$

Mặt cầu tâm $D(-8; 2; 4)$, bán kính $MD = 17$ có phương trình $(x+8)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 289$

M thuộc giao tuyến của $S_3(C; 7); S_4(D; 17)$ nên có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 49 \\ (x+8)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 289 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y - 2z = 31 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 16x - 4y - 8z = 205 \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình ta được: $18x - 12y - 6z = 174$ hay $9x - 6y - 3z - 87 = 0$.

Do đó câu này đúng.

d) Điểm $M(7; -6; 4)$ là giao của 4 mặt cầu nên có tọa độ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-4)^2 = 169 \\ (x-1)^2 + (y+6)^2 + (z+4)^2 = 100 \\ (x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 49 \\ (x+8)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 289 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y - 8z = 113 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 12y + 8z = 47 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y - 2z = 31 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 16x - 4y - 8z = 205 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 24y + 16z = -66 \\ 4y + 10z = 16 \\ 18x - 12y - 6z = 174 \end{cases} \Rightarrow M(7; -6; 4)$$

. Do đó đáp án này sai.