

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. KHẢO SÁT HÀM SỐ

Trong trường hợp tổng quát, để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).
- Tính đạo hàm y' và tìm các điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0.
- Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên, cực trị của hàm số (nếu có).

Bước 3. Vẽ đồ thị hàm số

- Vẽ các đường tiệm cận (nếu có).
- Xác định các điểm đặc biệt của đồ thị: cực trị, giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (trong trường hợp đơn giản),...
- Nhận xét về đặc điểm của đồ thị: chỉ ra tâm đối xứng, trục đối xứng (nếu có).

Chú ý: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ giao với trục hoành tại những điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, giao với trục tung tại điểm có tung độ là $f(0)$ nếu 0 thuộc tập xác định của hàm số đó.

Câu 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$.
Giải

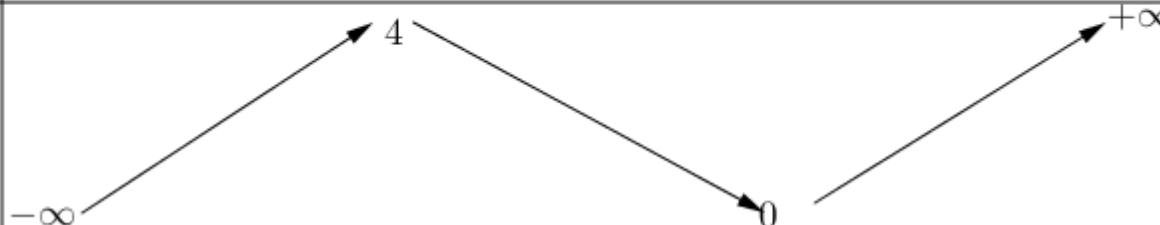
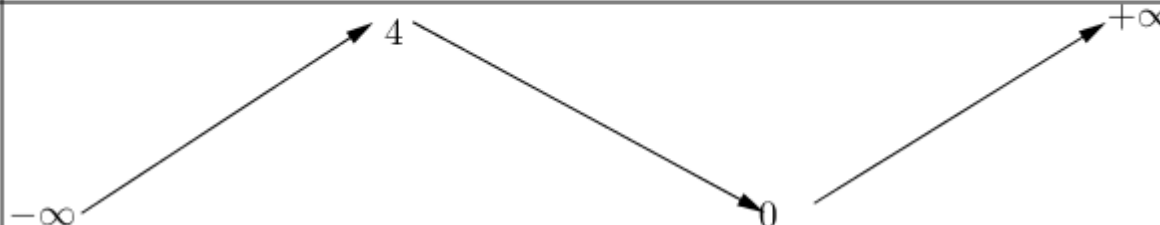
1) Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2) Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.

- $y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$			4		
				0		

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = 4$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{CT} = 0$.

3) Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0;4)$.

- Giao điểm của đồ thị với trục hoành:

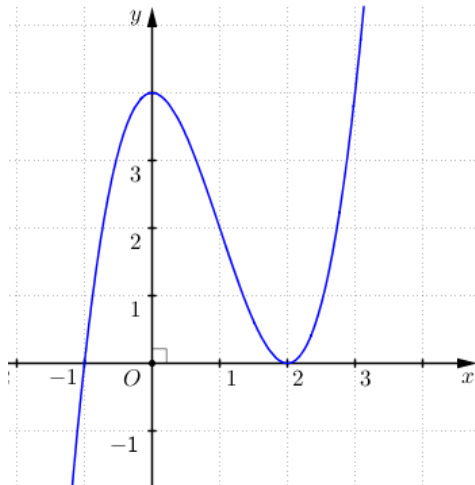
Xét phương trình $x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2.$$

Vậy đồ thị hàm số giao với trục hoành tại hai điểm $(-1;0)$ và $(2;0)$.

- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1;0), (2;0), (0;4)$ và $(1;2)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ được cho ở Hình.



Quan sát đồ thị ở Hình, ta thấy đồ thị đó có tâm đối xứng là điểm $I(1;2)$.

Câu 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$.
Giải

1) Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2) Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$.

$$y' = -3x^2 + 6x - 4; y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
y'	—	
y	$+\infty$	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

3) Đồ thị

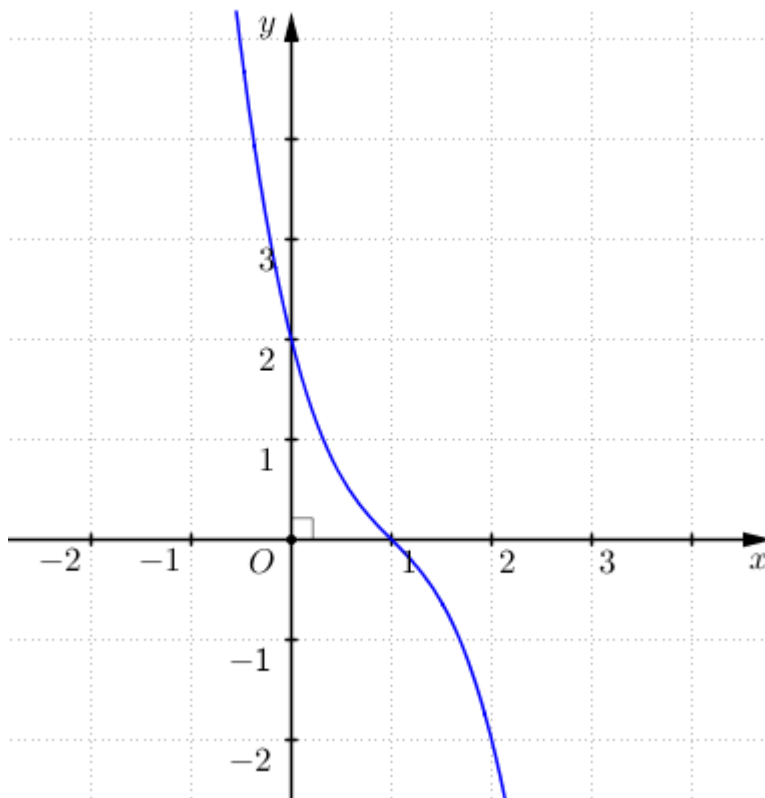
- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; 2)$.

- Giao điểm của đồ thị với trục hoành:

Giải phương trình $-x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = 0$ ta được $x = 1$. Vậy đồ thị hàm số giao với trục hoành tại điểm $(1; 0)$.

- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(1; 0), (0; 2), (2; -2)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ được cho ở hình



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số đó là điểm $I(1; 0)$.

Nhận xét: Trong trường hợp tổng quát, đồ thị của hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$(a \neq 0)$ có tâm đối xứng là điểm $I\left(-\frac{b}{3a}; f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$. Hoành độ $-\frac{b}{3a}$ của tâm đối xứng đó là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

Câu 3. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
Giải

1. Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty), y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó. Trên khoảng $(0; 2), y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = 2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = -2$.

- Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = +\infty.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

3. Đồ thị:

Khi $x = 0$ thì $y = 2$ nên $(0; 2)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy .

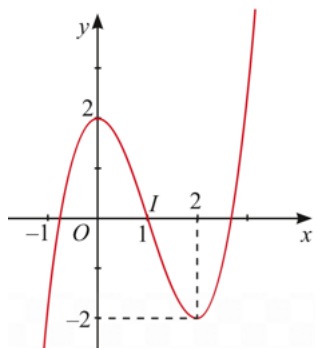
Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 1 - \sqrt{3} \text{ hoặc } x = 1 + \sqrt{3}.$$

Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại ba điểm $(1; 0), (1 + \sqrt{3}; 0), (1 - \sqrt{3}; 0)$.

Điểm $(0; 2)$ là điểm cực đại và điểm $(2; -2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn trên Hình. Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(1; 0)$.



Chú ý: Đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ luôn nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.

Câu 4. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$.

Giải

1. Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = -3x^2 - 3x - \frac{3}{2}$.

Do $y' < 0$ trên $\mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Hàm số đã cho không có cực trị.

- Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x^3 \left(1 + \frac{3}{2x} + \frac{3}{2x^2} \right) \right] = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x^3 \left(1 + \frac{3}{2x} + \frac{3}{2x^2} \right) \right] = -\infty.$$

- Bảng biến thiên:

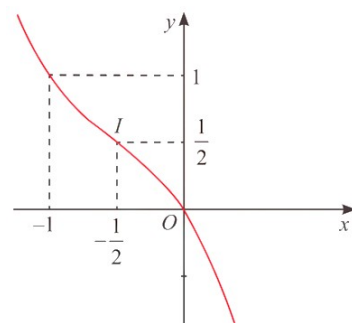
x	$-\infty$	$+\infty$
y'		-
y	$+\infty$	$-\infty$

3. Đồ thị:

Đồ thị của hàm số đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $(-1;1)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn trên Hình. Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm

$$I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$



Câu 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

- Sự biến thiên:

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} \right) \right] = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} \right) \right] = -\infty$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$;

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y			4			$+\infty$
	$-\infty$			0		

- Chiều biến thiên: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

- Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, f_{CB} = f(0) = 4$;

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2, f_{CT} = f(2) = 0$.

- Đồ thị:

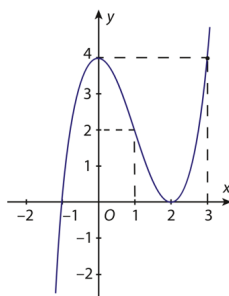
Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; 4)$.

Ta có $x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)^2(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$, do đó đồ thị hàm số giao với trục Ox tại hai điểm là $(-1; 0)$ và $(2; 0)$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; 4)$ và có tâm đối xứng là điểm $I(1; 2)$.

Đồ thị hàm số được cho như Hình



Câu 6. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^3 - 3x^2 - 4x - 2$.
Giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

- Sự biến thiên:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - 3x^2 - 4x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(-1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) \right] = -\infty$$

- Giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 - 3x^2 - 4x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(-1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) \right] = +\infty.$$

Ta có $y' = -3x^2 - 6x - 4$.

Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		-
y	$+\infty$	$-\infty$

- Chiều biến thiên: Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

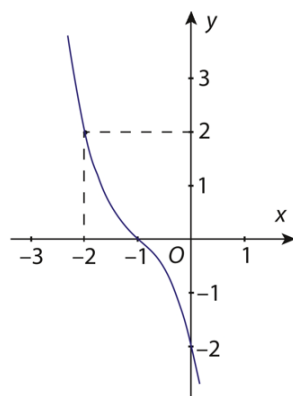
- Cực trị: Hàm số không có cực trị.

- Đồ thị:

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; -2)$.

Ta có $-x^3 - 3x^2 - 4x - 2 = (x+1)(-x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, do đó đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1; 0)$. Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-2; 2)$ và có tâm đối xứng là điểm $I(-1; 0)$.

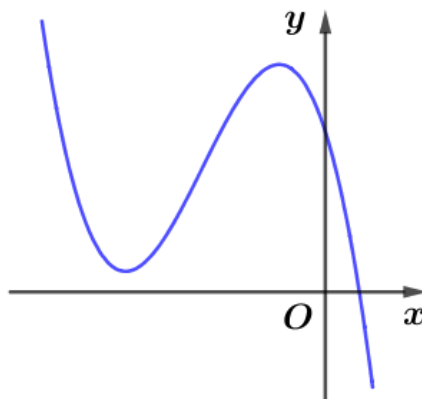
Đồ thị hàm số được cho như Hình.



Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ có tâm đối xứng là điểm $I(x_0; f(x_0))$, với x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ (tức là $x_0 = \frac{-b}{3a}$).

DẠNG 2. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ BẬC BA

Câu 7. (Mã 104 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Xác định dấu của các hệ số a, b, c, d ?

Lời giải

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

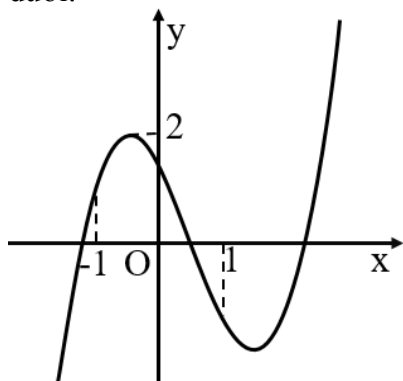
Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0$

$$\begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\frac{2b}{3a} < 0 \\ \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Hàm số có 2 cực trị âm nên

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0; d)$ nên $d > 0$

Câu 8. (Cụm liên trường Hải Phòng 2019) Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Xác định dấu các hệ số của hàm số.

Lời giải

+ Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a > 0$.

+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; d)$. Dựa vào đồ thị suy ra $d > 0$.

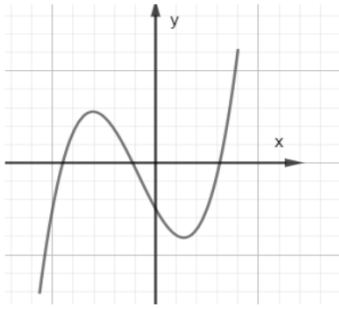
+ Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) trái dấu nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu. Vì thế $3ac < 0$, nên suy ra $c < 0$.

+ Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} x_1 > -1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$ nên $x_1 + x_2 > 0$.

Mà $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$ nên suy ra $-\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 9. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Xác định dấu của các hệ số a, b, c và d



Lời giải

Từ hình dạng đồ thị hàm số ta có $a > 0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow d < 0$

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Rightarrow y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ca < 0$

Mà $a > 0$ nên $c < 0$

Ta lại có: $y'' = 6ax + 2b$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$$

Từ đồ thị hàm số ta thấy tâm đối xứng có hoành độ âm. Do đó $-\frac{b}{3a} < 0$

Mà $a > 0$ nên $b > 0$

Câu 10. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $A(3; 1)$.

Lời giải.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị:

⊞ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

⊞ Chiều biến thiên:

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2); y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty).$$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

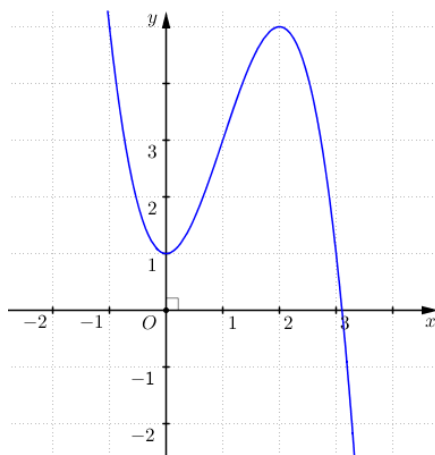
Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$; giá trị cực đại của hàm số là $y(2)=5$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0)=1$.

oGiới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.

oBảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$		1		5		$-\infty$

oĐồ thị:



2. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(3; 1)$ có dạng:
 $y - 1 = y'(3) \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y = -9(x - 3) + 1 \Leftrightarrow y = -9x + 28$

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$, trong đó m là tham số

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho với $m=0$;

2. Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

1. Khi $m=0$ thì hàm số là: $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

⊆ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

⊆ Chiều biến thiên:

oGiới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

oBảng biến thiên:

+ $y' = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$; giá trị cực đại của hàm số là $y(-2) = 0$

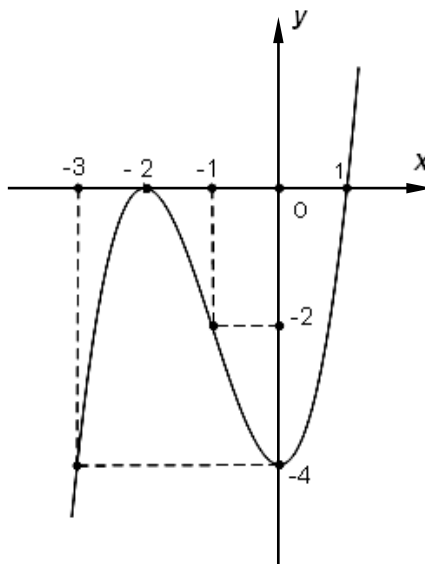
Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = -4$

oGiới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.

oBảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$

Đồ thị:



2. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

$$\Leftrightarrow y' = 3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0)$$

Xét: $g(x) = 3x^2 + 6x - m, x \in (-\infty; 0)$

$$g'(x) = 6x + 6 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$-3 - m$	$-m$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy:

$$y' = g(x) = 3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow -3 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -3$$

Vậy khi $m \leq -3$ thì yêu cầu của bài toán được thỏa mãn.

Câu 12. Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ có đồ thị (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số;

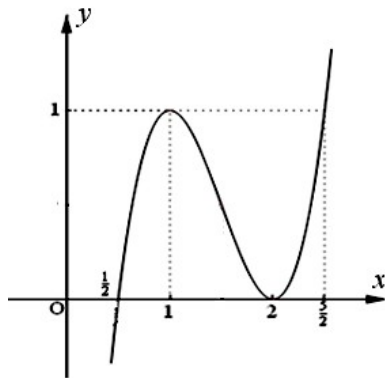
2. Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$

Lời giải.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$	

+ Đồ thị:



2. Ta có: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m \Leftrightarrow 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4$

Gọi $(C): y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ và $(C'): y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$

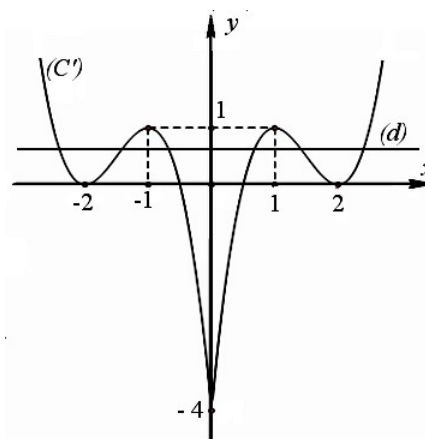
Ta thấy khi $x \geq 0$ thì: $(C'): y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

Mặt khác hàm số của đồ thị (C') là hàm số chẵn nên (C') nhận Oy là trục đối xứng. Từ đồ thị © ta suy ra đồ thị (C') như sau:

oGiữ nguyên phần đồ thị © bên phải trục Oy , ta được (C'_1)

oLấy đối xứng qua trục Oy phần (C'_1) , ta được (C'_2)

o $(C') = (C'_1) \cup (C'_2)$



Số nghiệm của phương trình:

$$2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$$

$$\Leftrightarrow 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4$$

là số giao điểm của đồ thị (C') và đường thẳng $(d): y = m - 4$.

Từ đồ thị (C') , ta thấy yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow 0 < m - 4 < 1 \Leftrightarrow 4 < m < 5.$$

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 2$ có đồ thị là (C_m) , m là tham số

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) khi $m = -3$

2. Tùy theo k giải và biện luận phương trình: $-|x|^3 + 3x^2 + k = 0$

3. Gọi A và B là hai điểm cực trị của (C) , tìm điểm M trên (C) sao cho tam giác MAB cân tại M

4. Tìm m để đồ thị hàm số (C_m) cắt trục hoành tại điểm duy nhất.

Lời giải.

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

* Ta có: $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

* Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Hàm đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(0; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$ với giá trị cực đại của hàm số là $y(0) = 2$ và hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$ với giá trị cực tiểu của hàm số là $y(2) = -2$.

* Đồ thị

• Điểm uốn: $y'' = 6x - 6$ và $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ta thấy y'' đổi dấu khi x qua điểm $x = 1$.

Vậy $I(1; 0)$ là điểm uốn của đồ thị.

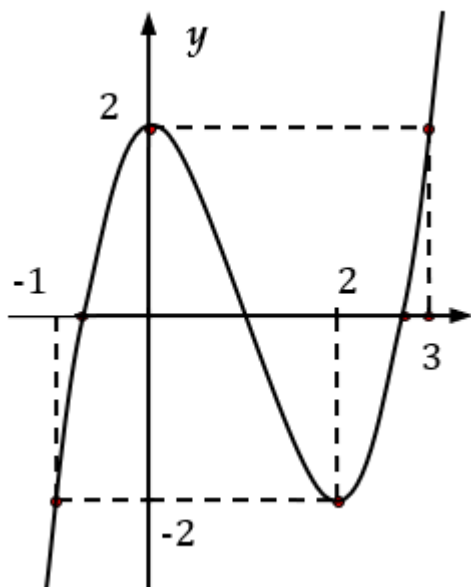
- Giao điểm của đồ thị với trục tọa độ

Giao điểm của đồ thị với trục Oy là điểm $(0; 2)$

Đồ thị cắt Ox tại ba điểm $(1; 0)$, $(1 \pm \sqrt{3}; 0)$

- Chọn $x = 3 \Rightarrow y = 2$, $x = -1 \Rightarrow y = -2$.

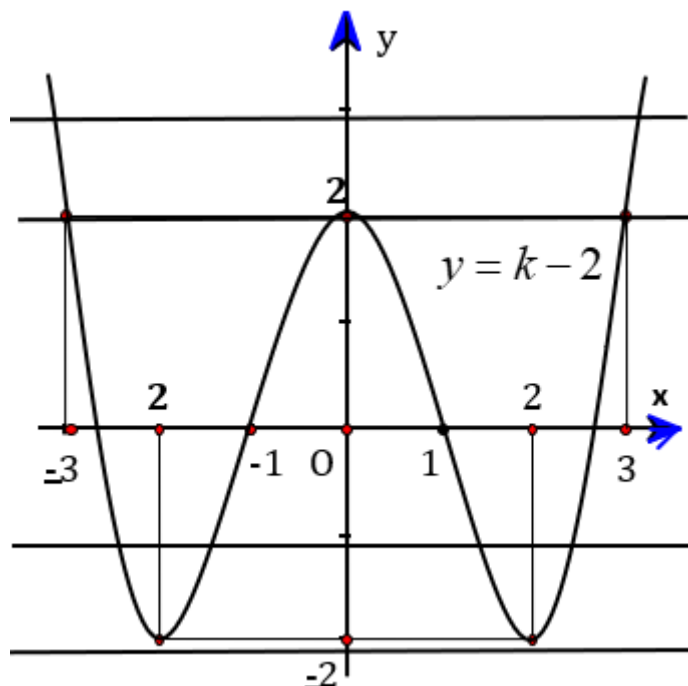
Nhận xét: Đồ thị nhận $I(1; 0)$ làm tâm đối xứng.



2. - $|x|^3 + 3x^2 + k = 0 \Leftrightarrow |x|^3 - 3x^2 + 2 = k - 2$, đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C') : $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$ và đường thẳng (d) : $y = k - 2 \Rightarrow$ số nghiệm của phương trình cho

chính là số giao điểm của hai đồ thị $\begin{cases} y = |x|^3 - 3x^2 + 2 & (C') \\ y = k - 2 & (d) \end{cases}$.

- $k - 2 < -2 \Leftrightarrow k < 0 \Rightarrow d$ không cắt đồ thị (C') nên phương trình cho vô nghiệm.
- $\begin{cases} k - 2 = -2 \\ k - 2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k > 4 \end{cases} \Rightarrow d$ cắt (C') tại hai điểm phân biệt nên phương trình cho có hai nghiệm phân biệt.
- $k - 2 = 2 \Leftrightarrow k = 4 \Rightarrow d$ cắt (C') tại ba điểm phân biệt nên phương trình cho có ba nghiệm phân biệt.
- $-2 < k - 2 < 2 \Leftrightarrow 0 < k < 4 \Rightarrow d$ cắt (C') tại bốn điểm phân biệt nên phương trình cho có bốn nghiệm phân biệt.



3. Giả sử $A(0;2)$ và $B(2;-2)$ là hai điểm cực trị của (C)

Tam giác MAB cân tại $M \Leftrightarrow MA = MB$ và M, A, B không thẳng hàng.

$MA = MB \Leftrightarrow M$ thuộc trung trực $AB: x - 2y - 1 = 0$

Tọa độ M thỏa nghiệm hệ phương trình:
$$\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 + 2 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

 $\Rightarrow (x-1)(2x^2 - 4x - 5) = 0 \Rightarrow M \left(1 \pm \frac{\sqrt{14}}{2}; \pm \frac{\sqrt{14}}{4} \right)$

Loại $M(1;0)$ vì M, A, B thẳng hàng.

4. **Cách 1:** Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (C_m) với trục Ox :
 $x^3 + mx + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{x} = -m$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$. Ta có: $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Lập bảng biến thiên suy ra $-m < 3 \Leftrightarrow m > -3$ là những giá trị cần tìm.

Cách 2: Để đồ thị hàm số (C_m) cắt Ox tại duy nhất một điểm ta có các trường hợp sau:

TH 1: Đồ thị hàm số (C_m) không có cực trị hay là hàm số (C_m) luôn đồng biến (do $a = 1 > 0$) trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 3x^2 + m \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq 0$

TH 2: Đồ thị hàm số (C_m) có hai cực trị cùng dấu

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{m}{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{m}{3}}$ với $m < 0$

Hai giá trị cực trị là: $y_1 = 2 + \frac{2m}{3}\sqrt{-\frac{m}{3}}, y_2 = 2 - \frac{2m}{3}\sqrt{-\frac{m}{3}}$

$$\Rightarrow y_1 \cdot y_2 = 4 + \frac{4m^3}{27} > 0 \Leftrightarrow -3 < m < 0$$

Vậy $m > -3$ là những giá trị cần tìm.

Câu 14. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị là (C)

1. Tìm m để đường thẳng $d_m: y = (2m-1)x - 1$ cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0; -1), B, C$ sao cho $BC = \sqrt{82}$.

2. Tìm những điểm nằm trên (C) mà qua đó vẽ được duy nhất một tiếp tuyến đến (C) .

LỜI GIẢI

1. $-x^3 + 3x^2 + 9x - 1 = (2m-1)x - 1 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x^2 - 3x + 2m - 10 = 0$ (*)

Đường thẳng d_m cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 49 - 8m > 0 \\ 2m - 10 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{49}{8} \\ m \neq 5 \end{cases}$$

$$BC^2 = [1 + (2m-1)^2] (x_1 - x_2)^2 = (4m^2 - 4m + 2)(49 - 8m)$$

$$BC = \sqrt{82} \Leftrightarrow (2m^2 - 2m + 1)(49 - 8m) = 41$$

$$8m^3 - 57m^2 + 53m - 4 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(8m^2 - 49m + 4) = 0 \Leftrightarrow m=1, m = \frac{49 \pm \sqrt{2273}}{16}$$

2. Gọi $A(a; -a^3 + 3a^2 + 9a - 1) \in (C)$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(x_0; y_0)$ có phương trình

$$y = (-3x_0^2 + 6x_0 + 9)(x - x_0) - x_0^3 + 3x_0^2 + 9x_0 - 1$$

$$A \in \Delta \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 - 9a + (-3x_0^2 + 6x_0 + 9)(a - x_0) - x_0^3 + 3x_0^2 + 9x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - x_0)^2 (a + 2x_0 - 3) = 0 \Leftrightarrow a = x_0, a = 3 - 2x_0. \text{ Để từ } A \text{ vẽ đến } (C) \text{ đúng một tiếp tuyến thì}$$

$$\text{ta phải có } x_0 = 3 - 2x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow A(1; 10)$$

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (4m-1)x + 2m^2 - 3$ cắt Ox tại ba điểm A, B, C sao cho $AB = BC$.

LỜI GIẢI

Điều kiện cần: Giả sử (C_m) cắt Ox tại ba điểm A, B, C suy ra phương trình $x^3 + 3x^2 + (4m - 1)x + 2m^2 - 3 = 0$ (*) có ba nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3$ và khi đó $A(x_1; 0), B(x_2; 0), C(x_3; 0) \Rightarrow AB = BC \Leftrightarrow x_2 - x_1 = x_3 - x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$ (1)

Mặt khác: $x^3 + 3x^2 + (4m - 1)x + 2m^2 - 3 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - ax^2 + bx - c$

Với $a = x_1 + x_2 + x_3, b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, c = x_1x_2x_3$

So sánh hệ số của x^2 ta có: $a = -3 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $3x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -1 \Rightarrow (*)$ có một nghiệm $x = -1 \Rightarrow -1 + 3 - 4m + 1 + 2m^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = 2$

Điều kiện đủ:

$$* m = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1) = 0$$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = -3, x = -1, x = 1$ ba nghiệm này thỏa (1) nên $m = 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

$$* m = 2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + 2x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow m = 2 \text{ loại.}$$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: Với cách làm tương tự như trên ta có kết quả sau:

Đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt Ox tại ba điểm lập thành cấp số cộng khi và chỉ

$$\begin{cases} y\left(-\frac{b}{3a}\right) = 0 \\ y_{CT} \cdot y_{CD} < 0 \end{cases}$$

khi

Câu 16. Tìm m để đồ thị $(C_m): y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 3mx - m + 1$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt trong đó có ít nhất một điểm có hoành độ âm.

LỜI GIẢI

Đồ thị (C_m) cắt Ox tại ba điểm phân biệt trong đó có ít nhất một điểm có hoành độ âm $\Leftrightarrow$ hàm

$$\begin{cases} y_{cd} \cdot y_{ct} < 0 \\ y(0) > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow y_1 \cdot y_2 = 4(m^2 + m + 1)^2 x_1 x_2 - 2(m^2 + m + 1)(m^2 + 1)(x_1 + x_2) + (m^2 + 1)^2$$

$$= (m + 1)(m^3 - m^2 - m - 3) \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 1)(m^3 - m^2 - m - 3) < 0 \\ m < 1 \end{cases} \quad (2)$$

Nên

Xét hàm số $g(m) = m^3 - m^2 - m - 3, m < 1$. Có $g'(m) = 3m^2 - 2m - 1$ và $g'(m) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}, m = 1$. Lập bảng biến thiên ta thấy $g(m) < 0 \forall m < 1$

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 1$$
 là những giá trị cần tìm.

Câu 17. Tìm m để đồ thị $(C_m): y = x^3 - 2x^2 - (3m-1)x + m+3$ cắt đường thẳng $d: y = (1-m)x + m-5$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1 < x_2 < 1 < x_3$.

LỜI GIẢI

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d :

$$x^3 - 2x^2 + 8 = 2mx \Leftrightarrow 2m = x^2 - 2x + \frac{8}{x} = f(x) \quad (*)$$

Xét hàm số $y = f(x)$ ta có: $f'(x) = 2x - 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2(x-2)(x^2+x+2)}{x^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Dựa vào bảng biến thiên và yêu cầu bài toán $\Rightarrow 2m > f(1) = 7 \Leftrightarrow m > \frac{7}{2}$.

Câu 18. Cho hàm số $(C): y = x^3 - 5x^2 + 6x + 3$.

1. Tìm trên đồ thị (C_2) những cặp điểm đối xứng qua O

2. Tìm m để trên O tồn tại một cặp điểm đối xứng nhau qua Oy

LỜI GIẢI

1. Gọi A, B là hai điểm thuộc (C_2) và đối xứng nhau qua O

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ a^3 - 5a^2 + 6a + 3 = -b^3 + 5b^2 - 6b - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a^2 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Hai điểm thuộc (C_2) đối xứng nhau qua O là: $A\left(\sqrt{\frac{3}{5}}; \frac{33}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ và $B\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}; -\frac{33}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

2. Gọi M, N là hai điểm thuộc đồ thị

$$M, N \text{ đối xứng nhau qua } Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x_1, x_2 \neq 0 \\ x_1 = -x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1, x_2 \neq 0 \\ x_1 = -x_2 \\ x_1^2 + 2m = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Câu 19. Cho hàm số $(C): y = -\frac{2}{x}$ có đồ thị (C) . Trên đồ thị (C) có bao nhiêu bộ bốn điểm A, B, C, D sao cho tứ giác ABCD là hình vuông tâm $I(1; -1)$.

LỜI GIẢI

Đổi hệ tọa độ Oxy về hệ tọa độ IXY theo công thức đổi trục

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 1 \end{cases} \text{ . Phương trình đường cong } (C) \text{ đối với hệ tọa độ } IXY \text{ là}$$

$$Y - 1 = -(X + 1)^3 + 3(X + 1)^2 - 3 \Leftrightarrow Y = -X^3 + 3X$$

Trong hệ trục mới hình vuông ABCD biến thành hình vuông $A'B'C'D'$.

$$A'B'C'D' \text{ là hình vuông} \Leftrightarrow \begin{cases} IA' \cdot IB' = 0 \\ IA' = IB' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2b^2 - 3(a^2 + b^2) + 10 = 0 \\ (a+b)[1 + (a^2 + ab + b^2 - 3)(a^2 - ab + b^2 - 3)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a^2b^2 - 3(a^2 + b^2) + 10 = 0 \end{cases} \quad (I) \text{ hoặc}$$

$$\begin{cases} a^2b^2 - 3(a^2 + b^2) + 10 = 0 \\ (a^2 + b^2 - 3)^2 - a^2b^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad (II)$$

• Giải hệ (I) : Từ $a+b=0 \Rightarrow a=-b$ thay vào phương trình thứ nhất ta có : $a^4 - 6a^2 + 10 = 0$ vô nghiệm

• Giải hệ (II) : Đặt $v = a^2b^2, u = a^2 + b^2$

$$* \begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ b=\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ b=\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$* \begin{cases} u=5 \\ v=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \\ b=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \\ b=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

Vì vai trò A, B như nhau nên trên (C) có hai bộ bốn điểm A,B,C,D sao cho ABCD là hình vuông có tâm $I(1; -1)$.

Câu 20. Trên mp Oxy cho đồ thị $(C): y = x^3 - 2\sqrt{2}x$. Chứng minh rằng nếu một hình bình hành có tất cả các đỉnh đều nằm trên (C) thì tâm của hình bình hành đó là gốc tọa độ O .

LỜI GIẢI

Xét hình bình hành ABCD với $A(a; a^3 - 2\sqrt{2}a),$

$$B(b; b^3 - 2\sqrt{2}b), C(c; c^3 - 2\sqrt{2}c), D(c; c^3 - 2\sqrt{2}c)$$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} b - a = c - d \\ b^3 - a^3 - 2\sqrt{2}(b - a) = c^3 - d^3 - 2\sqrt{2}(c - d) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = b + d \\ b^2 + ab + a^2 = d^2 + cd + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = b + d \\ ab = cd \end{cases}$$

Ta có $\frac{a}{c} = \frac{d}{b} = t \Rightarrow a = ct, d = bt$

Suy ra $a + c = b + d \Leftrightarrow c(1+t) = b(1+t) \Rightarrow t+1=0 \Rightarrow t=-1$

$\Rightarrow a = -c, b = -d \Rightarrow$ tâm của hình bình hành là gốc tọa độ O .

Đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt nên hàm số có hai điểm cực trị

và $\begin{cases} y_{CD} > 0 \\ y_{CT} < 0 \end{cases} (*)$ (Trong đó y_{CD}, y_{CT} là giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số)

Câu 21. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt. Chứng minh rằng $|27c + 2a^3 - 9ab| < 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3}$

LỜI GIẢI

$$y' = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3} \\ x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3} \end{cases}$$

Ta có:

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} y(x_2) > 0 & (1) \\ y(x_1) < 0 & (2) \end{cases}$$

Hàm đạt cực tiểu tại x_1 và cực đại tại x_2

$$y = \frac{1}{3}y' \left(x + \frac{a}{3} \right) + \frac{1}{3} \left(2b - \frac{2a^2}{3} \right) x + c - \frac{ab}{9}$$

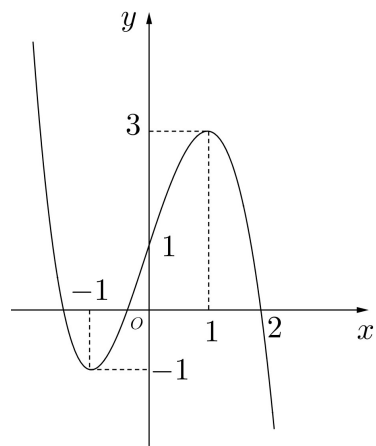
Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \left(2b - \frac{2a^2}{3} \right) \left(a + \sqrt{a^2 - 3b} \right) < 9c - ab \Leftrightarrow -2\sqrt{(a^2 - 3b)^3} < 27c - 9ab + 2a^3 \quad (3)$$

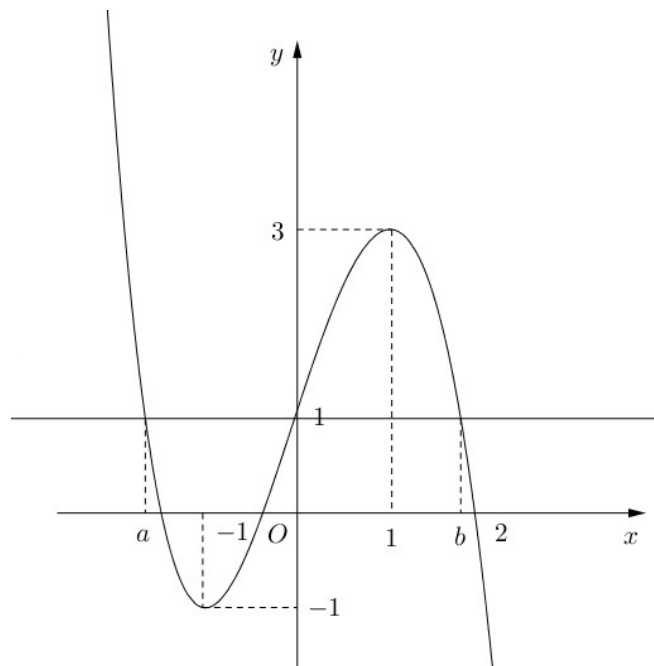
$$(2) \Leftrightarrow \left(2b - \frac{2a^2}{3} \right) \left(a - \sqrt{a^2 - 3b} \right) < 9c - ab \Leftrightarrow 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3} > 27c - 9ab + 2a^3 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có: $|27c + 2a^3 - 9ab| < 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3}$

Câu 22. (Mã 102 - 2021 Lần 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



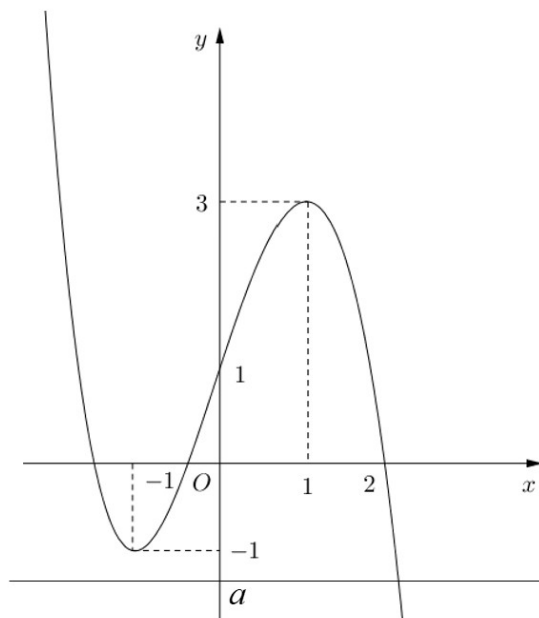
Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=1$
Lời giải



$$f(f(x))=1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a \ (a < -1) & (1) \\ f(x)=0 & (2) \\ f(x)=b \ (1 < b < 2) & (3) \end{cases}$$

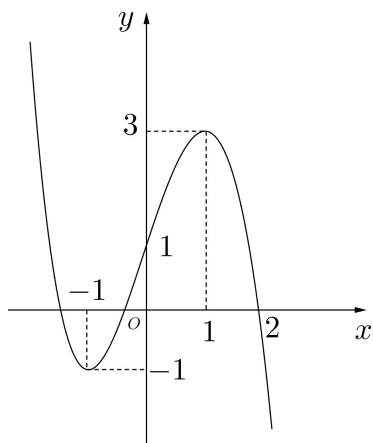
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra

TH1



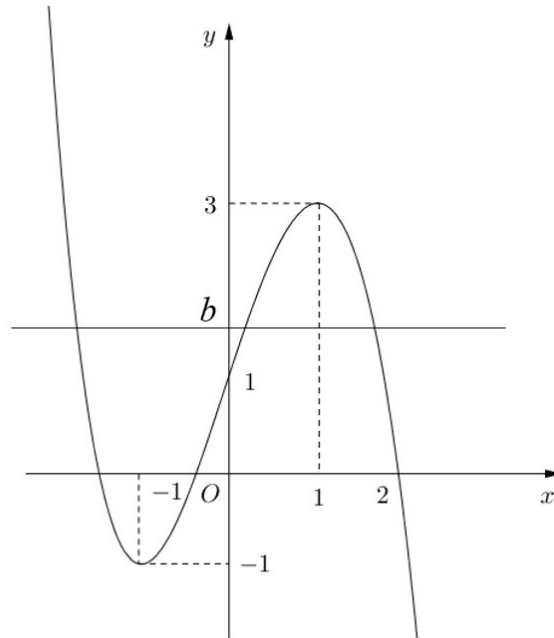
$f(x) = a \quad (a < -1) \Rightarrow$ phương trình có một nghiệm.

TH2



$f(x) = 0 \Rightarrow$ phương trình có ba nghiệm phân biệt.

TH3

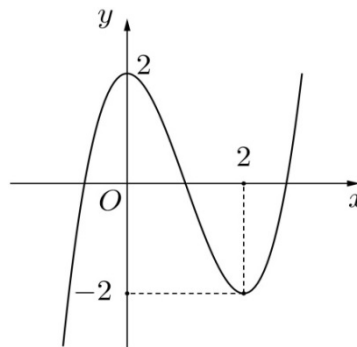


$f(x) = b$ ($1 < b < 2$) $\Rightarrow$ phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Các nghiệm của (1); (2); (3) là đôi một khác nhau.

Vậy $f(f(x)) = 1$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 23. (Sở Cần Thơ - 2021) Cho hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Tìm số nghiệm của phương trình $\sqrt{f(f(x)) + 4} = f(x) + 1$

Lời giải

♦ Ta có $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

Do đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $M(0; 2), N(2; -2)$ nên ta có hệ sau

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f(0) = 2 \\ f'(2) = 0 \\ f(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 2 \\ 12 + 4b + c = 0 \\ 8 + 4b + 2c + d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

Suy ra $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

♦ Đặt $t = f(x)$. Phương trình đã cho trở thành $\sqrt{f(t)+4} = t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ f(t)+4 = t^2 + 2t + 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ (t^3 - 3t^2 + 2) + 4 = t^2 + 2t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ t^3 - 4t^2 - 2t + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{3+\sqrt{29}}{2} \\ t = \frac{3-\sqrt{29}}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{3+\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

♦ Với $t = 1$ ta được $f(x) = 1 \in (-2; 2)$. Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình này có 3 nghiệm phân biệt.

♦ Với $t = \frac{3+\sqrt{29}}{2}$ ta được $f(x) = \frac{3+\sqrt{29}}{2} \in (2; +\infty)$. Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình này có đúng 1 nghiệm.
 Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 24. (THPT Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2021) Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Tìm tập hợp các

giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm.

Lời giải

Ta có: $y' = 6x^2 - 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

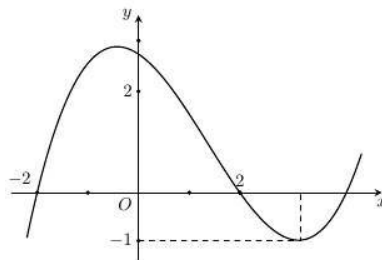
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		1		0		$+\infty$

Ta có: $\frac{2\sin x + 1}{2} = \sin x + \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ suy ra $f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right) \in [0; 1]$ nên $f\left(f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) \in [0; 1]$

Phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \leq f(m) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 - 3m^2 + 1 \geq 0 \\ 2m^3 - 3m^2 \leq 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Câu 25. (Mã 104 2019) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{2}{3}$

Lời giải

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x$ (1)

Ta có $g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow 2$	$\searrow -2$	$\nearrow +\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có với $t \in (-2; 2)$ cho ta 3 giá trị x thỏa mãn (1)

$t \in \{-2; 2\}$ cho ta 2 giá trị x thỏa mãn (1)

$t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ cho ta 1 giá trị x thỏa mãn (1).

Phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{2}{3}$ (2) trở thành

$$|f(t)| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = \frac{2}{3} \\ f(t) = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta có:

+ Phương trình $f(t) = \frac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $-2 < t_1 < t_2 < 2 < t_3 \Rightarrow$ có 7 nghiệm của phương trình (2).

+ Phương trình $f(t) = -\frac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $t_4 < -2 < 2 < t_5 < t_6 \Rightarrow$ có 3 nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm.

Câu 26. (Chuyên Thái Bình - 2021) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		4		0		$+\infty$

Tìm m để phương trình $|f(x-1)+2|=m$ có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$.

Lời giải

Đặt $g(x) = f(x-1) + 2$

Ta có: $g'(x) = f'(x-1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -1 \\ x-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow g(0)=6 \\ x=2 \Rightarrow g(2)=2 \end{cases}$$

Vì $f(x)$ là hàm bậc ba nên $f(0) = \frac{y_{CT} + y_{CD}}{2} = 2 \Rightarrow g(1) = f(0) + 2 = 4$

Bảng biến thiên của hàm số $y = |g(x)|$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		0	$+$		
y	$+\infty$		6		4		2		$+\infty$

Để phương trình $|f(x-1)+2|=m$ có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$ thì $4 < m < 6$.