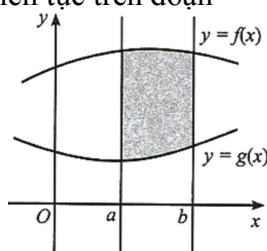


PHẦN. C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH**

Câu 1. Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đồ thị như Hình.



Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là:

A. $S = \int_b^a |f(x) - g(x)| dx$

B. $S = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$

C. $S = \int_b^a [f(x) - g(x)] dx$

D. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

Lời giải

Chọn D.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(x) \leq 0, \forall x \in [a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính bằng công thức

A. $S = \int_a^b f(x) dx$

B. $S = - \int_a^b f(x) dx$

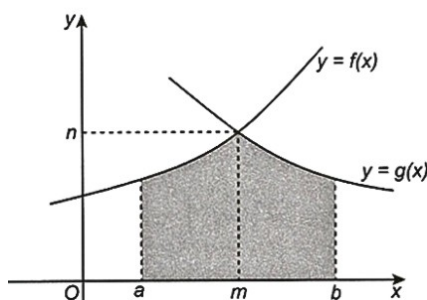
C. $S = \pi \int_a^b f(x) dx$

D. $S = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

Lời giải

Chọn B.

Câu 3. Cho S là diện tích phần hình phẳng được tô màu như Hình.



Khi đó biểu thức tính diện tích S là

A. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

B. $S = \int_a^m |f(x) - g(x)| dx + \int_m^b |g(x) - f(x)| dx$

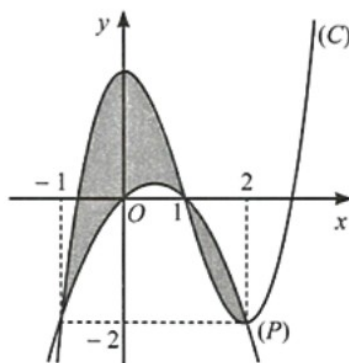
C. $S = \int_a^m |f(x)| dx + \int_m^b |g(x)| dx$

D. $S = \int_a^m |g(x)| dx + \int_m^b |f(x)| dx$

Lời giải

Chọn C.

Câu 4. Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là $(P), (C)$ và hình phẳng được tô màu như Hình.



Công thức tính diện tích hình phẳng được tô màu là:

A.
$$S = \int_{-1}^1 [g(x) - f(x)] dx + \int_1^2 [g(x) - f(x)] dx$$

B.
$$S = \int_{-1}^1 [g(x) - f(x)] dx - \int_1^2 [g(x) - f(x)] dx$$

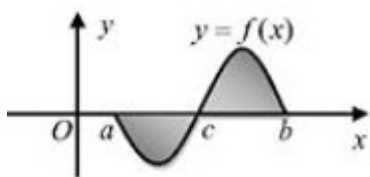
C.
$$S = \int_{-1}^2 [g(x) - f(x)] dx$$

D.
$$S = \int_{-1}^2 [f(x) - g(x)] dx$$

Lời giải

Chọn B.

Câu 5. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



A.
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

C.
$$S = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

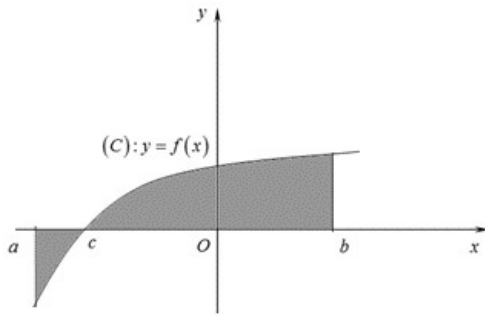
B.
$$S = \left| \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right|$$

D.
$$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Lời giải.

Chọn B.

Câu 6. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

B. $S = \int_a^b f(x)dx$

C. $S = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

D. $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$

Lời giải

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường

thẳng $x = a$, $x = b$ là
$$S = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|dx = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị cắt trục Ox tại đúng ba điểm phân biệt $a, b, c (a < c < b)$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox tương ứng với $x \in [a; c]$, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox tương ứng với

$x \in [c; b]$. Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; c], f(x) \leq 0, \forall x \in [c; b]$ thì giá trị của $\int_a^b f(x)dx$ bằng

A. $S_1 + S_2$

B. $S_1 - S_2$

C. $-S_1 + S_2$

D. $-S_1 - S_2$

Lời giải

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = S_1 - S_2$$

Chọn B

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị cắt trục Ox tại đúng ba điểm phân biệt $a, b, c (a < c < b)$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox tương ứng với $x \in [a; c]$, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox tương ứng với

$x \in [c; b]$. Nếu $f(x) \leq 0, \forall x \in [a; c], f(x) \geq 0, \forall x \in [c; b]$ thì giá trị của $\int_a^b f(x)dx$ bằng

A. $S_1 + S_2$

B. $S_1 - S_2$

C. $-S_1 + S_2$

D. $-S_1 - S_2$

Lời giải

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = -S_1 + S_2$$

Chọn C.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị cắt trục Ox tại đúng ba điểm phân biệt $a, b, c (a < c < b)$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox tương ứng

với $x \in [a; c], S_2$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox tương ứng với $x \in [c; b]$. Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; c], f(x) \geq 0, \forall x \in [c; b]$ thì giá trị của $\int_a^b f(x) dx$ bằng

A. $S_1 + S_2$. B. $S_1 - S_2$. C. $-S_1 + S_2$. D. $-S_1 - S_2$.

Lời giải

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = S_1 + S_2$$

. Chọn A.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị cắt trục Ox tại đúng ba điểm phân biệt $a, b, c (a < c < b)$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox tương ứng với $x \in [a; c], S_2$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox tương ứng với

$x \in [c; b]$. Nếu $f(x) \leq 0, \forall x \in [a; c], f(x) \leq 0, \forall x \in [c; b]$ thì giá trị của $\int_a^b f(x) dx$ bằng

A. $S_1 + S_2$. B. $S_1 - S_2$. C. $-S_1 + S_2$. D. $-S_1 - S_2$.

Lời giải

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = -S_1 - S_2$$

. Chọn D

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại đúng ba điểm phân biệt $a, b, c (a < c < b)$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox tương ứng với $x \in [a; c], S_2$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$ và trục Ox tương ứng với $x \in [c; b]$. Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in [a; c], f'(x) \geq 0, \forall x \in [c; b]$ thì giá trị của $f(b) - f(a)$ bằng

A. $S_1 + S_2$. B. $S_1 - S_2$. C. $-S_1 + S_2$. D. $-S_1 - S_2$.

Lời giải

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx = \int_a^c f'(x) dx + \int_c^b f'(x) dx = -S_1 + S_2$$

. Chọn C.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại đúng ba điểm phân biệt $a, b, c (a < c < b)$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox tương ứng với $x \in [a; c], S_2$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$ và trục Ox tương ứng với $x \in [c; b]$. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in [a; c], f'(x) \leq 0, \forall x \in [c; b]$ thì giá trị của $f(b) - f(a)$ bằng

A. $S_1 + S_2$. B. $S_1 - S_2$. C. $-S_1 + S_2$. D. $-S_1 - S_2$.

Lời giải

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx = \int_a^c f'(x) dx + \int_c^b f'(x) dx = S_1 - S_2$$

. Chọn B

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại đúng ba điểm phân biệt $a, b, c (a < c < b)$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox tương ứng với $x \in [a; c]$, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$ và trục Ox tương ứng với $x \in [c; b]$. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in [a; c], f'(x) \leq 0, \forall x \in [c; b]$ thì giá trị của $f(b) - f(a)$ bằng

- A. $S_1 + S_2$. B. $S_1 - S_2$. C. $-S_1 + S_2$. D. $-S_1 - S_2$.

Lời giải

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx = \int_a^c f'(x) dx + \int_c^b f'(x) dx = S_1 + S_2$$

. Chọn A

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại đúng ba điểm phân biệt $a, b, c (a < c < b)$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox tương ứng với $x \in [a; c]$, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$ và trục Ox tương ứng với $x \in [c; b]$. Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in [a; c], f'(x) \geq 0, \forall x \in [c; b]$ thì giá trị của $f(b) - f(a)$ bằng

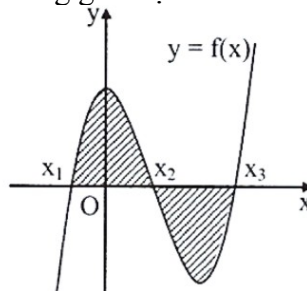
- A. $S_1 + S_2$. B. $S_1 - S_2$. C. $-S_1 + S_2$. D. $-S_1 - S_2$.

Lời giải

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx = \int_a^c f'(x) dx + \int_c^b f'(x) dx = -S_1 + S_2$$

. Chọn D.

Câu 15. Hình vẽ bên biểu diễn trục hoành cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$). Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành là



A. $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx$

B. $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx - \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx$

C. $\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right|$

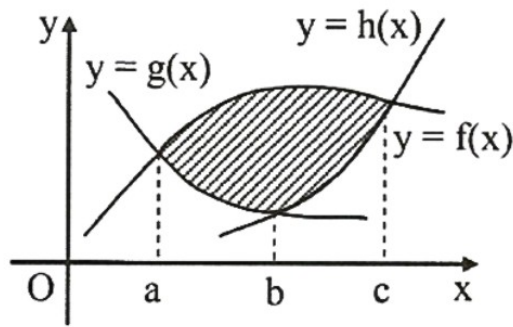
D. $\left| \int_{x_1}^{x_3} f(x) dx \right|$

Lời giải

$$S = \int_{x_1}^{x_3} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx - \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx$$

. Chọn B

Câu 16. Hình phẳng được đánh dấu trong hình vẽ sau có diện tích là



A. $S = \int_a^b |h(x) - g(x)| dx + \int_b^c |h(x) - f(x)| dx$

B. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \int_b^c |f(x) - h(x)| dx$

C. $S = \int_a^c |h(x) - g(x)| dx + \int_b^c |h(x) - f(x)| dx$

D. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \int_b^c |f(x) - h(x)| dx$

Lời giải

Chọn D

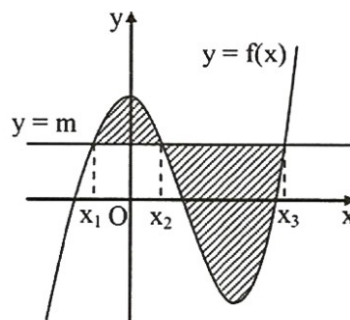
$$S = S_1 + S_2$$

S_1 là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a, x = b$.

S_2 là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x), y = h(x)$ và các đường thẳng $x = b, x = c$.

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \int_b^c |f(x) - h(x)| dx.$$

Câu 17. Hình vẽ bên biểu diễn đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$). Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi hai đường trên là



A. $\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - m) dx + \int_{x_2}^{x_3} (f(x) - m) dx$

B. $\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - m) dx - \int_{x_2}^{x_3} (f(x) - m) dx$

C. $\int_{x_1}^{x_2} (m - f(x)) dx + \int_{x_2}^{x_3} (m - f(x)) dx$

D. $\left| \int_{x_1}^{x_3} (f(x) - m) dx \right|$

Lời giải

$$S = \int_{x_1}^{x_3} |f(x) - m| dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - m| dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - m| dx = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - m) dx - \int_{x_2}^{x_3} (f(x) - m) dx.$$

Chọn B.

Câu 18. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x=0, x=\pi$, đồ thị hàm số $y=\cos x$ và trục Ox là:

A. $S = \int_0^{\pi} \cos x dx$

B. $S = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

C. $S = \int_0^{\pi} |\cos x| dx$

D. $S = \pi \int_0^{\pi} \cos x dx$

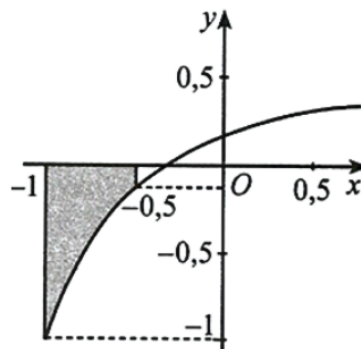
Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x=a, x=b$ và các đồ thị hàm số

$y=f(x), y=g(x)$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. Khi đó, theo đề bài ta có $S = \int_0^{\pi} |\cos x| dx$.

Chọn C.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như Hình. Gọi S là phần diện tích hình phẳng được tô màu. Phát biểu nào sau đây là đúng?



A. $S = \int_{-1}^{-0,5} f(x) dx$

B. $S = - \int_{-1}^0 f(x) dx$

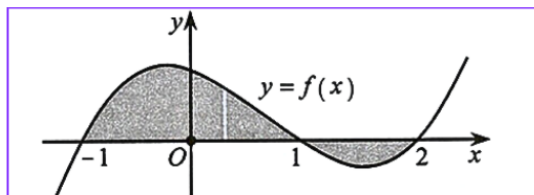
C. $S = - \left| \int_{-1}^{-0,5} f(x) dx \right|$

D. $S = - \int_{-1}^{-0,5} f(x) dx$

Lời giải

Chọn D.

Câu 20. Gọi S là diện tích hình phẳng được tô đậm trong Hình. Công thức tính S là:



A. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$

B. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx$

C. $S = \int_{-1}^2 f(x)dx$

D. $S = - \int_{-1}^2 f(x)dx$

Lời giải

Chọn B.

Câu 21. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^3, y = x^2$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$ là:

A. $\int_1^3 (x^3 - x^2)dx$

B. $\int_1^3 (x^2 - x^3)dx$

C. $\int_1^3 x^2 dx - \int_1^3 x^3 dx$

D. $\int_1^3 x^2 dx + \int_1^3 x^3 dx$

Lời giải

Chọn A.

Câu 22. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = e^x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = \ln 4$ là

A. 1.

B. 3.

C. $2\ln 2 - 1$.

D. $3 - 4\ln 2$.

Lời giải

Chọn A.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1, x = 3$ là

A. $S = \int_1^3 |f(x)| dx$

B. $S = \int_1^3 f(x)dx$

C. $S = - \int_1^3 f(x)dx$

D. $S = \int_3^1 |f(x)| dx$

Lời giải

Chọn A.

Câu hỏi nhận biết ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng.

Câu 24. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = e^x, y = -5$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ bằng

A. $S = \int_0^4 (e^x + 5)dx$

B. $S = \int_0^4 (e^x - 5)dx$

$$C. \quad S = \pi \int_0^4 (e^x + 5) dx$$

$$D. \quad S = \pi \int_0^4 (e^x + 5)^2 dx$$

Lời giải

Chọn A

$$S = \int_0^4 |e^x - (-5)| dx = \int_0^4 (e^x + 5) dx.$$

Câu 25. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2; x = 3$ bằng

$$A. \quad \frac{27}{4}$$

$$B. \quad \frac{11}{4}$$

$$C. \quad \frac{75}{4}$$

$$D. \quad 12.$$

Lời giải

Chọn C

$$S = \int_{-2}^3 |x^3 - 3x^2| dx = \left| \int_{-2}^3 (x^3 - 3x^2) dx \right| = \left| \left(\frac{x^4}{4} - x^3 \right) \right|_{-2}^3 = \frac{75}{4}.$$

Câu 26. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{3}$ bằng

$$A. \quad \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$B. \quad \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$C. \quad \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$D. \quad \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

Lời giải

Chọn B

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} |\sin x| dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Câu 27. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = f(x) = x^2 - 1$, trục tung và tiếp tuyến của (P) tại điểm $M(-1; 0)$ bằng

$$A. \quad \frac{5}{3}$$

$$B. \quad \frac{2}{3}$$

$$C. \quad \frac{1}{3}$$

$$D. \quad \frac{4}{3}$$

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = (x^2 - 1)' = 2x; f'(-1) = -2$

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm $M(-1; 0)$ là

$$y = f'(-1) \cdot (x + 1) + f(-1) \Leftrightarrow y = -2(x + 1) + 0 \Leftrightarrow y = -2x - 2.$$

$$S = \int_{-1}^0 |(x^2 - 1) - (-2x - 2)| dx = \int_{-1}^0 |x^2 + 2x + 1| dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3}$$

Diện tích cần tìm là

- Câu 28.** Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = a (a > 0)$. Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = b (b > 0)$. Biết $S_2 = 5S_1 + 4$, khi đó $b - a$ bằng
- A. $\ln 5$. B. $-\ln 5$. C. 5. D. -5 .

Lời giải

Chọn A

$$S_1 = \int_0^a e^x dx = e^x \Big|_0^a = e^a - 1; S_2 = \int_0^b e^x dx = e^x \Big|_0^b = e^b - 1$$

$$\text{Vì } S_2 = 5S_1 + 4 \text{ nên } e^b - 1 = 5(e^a - 1) + 4 \Leftrightarrow e^b = 5e^a \Leftrightarrow e^{b-a} = 5 \Leftrightarrow b - a = \ln 5$$

- Câu 29.** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 3$. Diện tích của hình phẳng (H) được tính bằng công thức nào dưới đây?

A. $S = \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$

B. $S = \int_0^3 (-x^2 + 2x) dx$

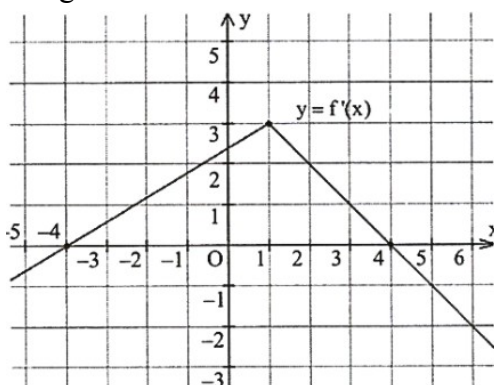
C. $S = \int_2^3 |x^2 - 2x| dx$

D. $S = \int_0^3 |x^2 - 2x| dx$

Lời giải

Chọn D.

- Câu 30.** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Giá trị của biểu thức $f(4) - f(-4)$ bằng



A. 12.

B. 3.

C. 24.

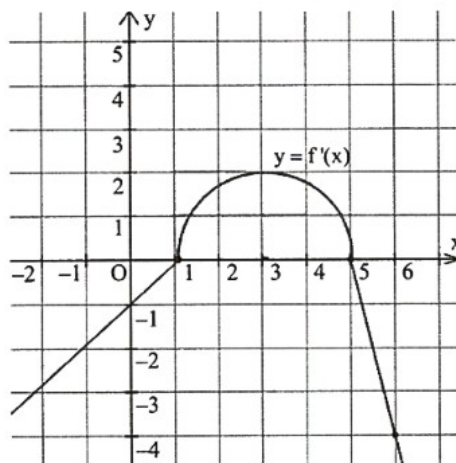
D. 6.

Lời giải

$$f(4) - f(-4) = \int_{-4}^4 f'(x) dx = \int_{-4}^1 f'(x) dx + \int_1^4 f'(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 12$$

Chọn A.

- Câu 31.** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Giá trị của biểu thức $f(6) - f(1)$ bằng



A. $4\pi - 2$.

B. $2\pi + 2$.

C. $2\pi - 4$.

D. $2\pi - 2$.

Lời giải

$$f(6) - f(1) = \int_1^6 f'(x) dx = \int_1^5 f'(x) dx + \int_5^6 f'(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2\pi - 2$$

Chọn D

Câu 32. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x$ và trục Ox có diện tích là

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{20}{3}$.

Lời giải

$$-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$S = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Chọn A.

Câu 33. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x + 3$ có diện tích là

A. $\frac{49}{3}$.

B. $\frac{29}{3}$.

C. $\frac{22}{3}$.

D. $\frac{32}{3}$.

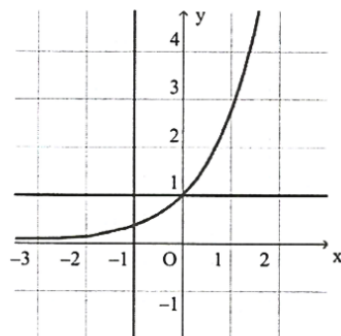
Lời giải

$$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$S = \int_{-1}^3 |x^2 - 2x - 3| dx = \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{32}{3}.$$

Chọn D

Câu 34. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$ và các đường thẳng $y = 1, x = -1$ có diện tích là



A. $\frac{1}{e}$.

B. $1 - \frac{1}{e}$.

C. $e - 1$.

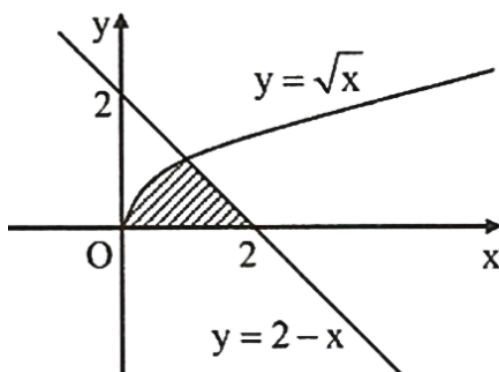
D. e .

Lời giải

$$S = \int_{-1}^0 (1 - e^x) dx = \int_{-1}^0 (1 - e^x) dx = (x - e^x) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{e}.$$

Chọn A

Câu 35. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ và trục Ox được tính bởi công thức



A. $\int_0^2 (\sqrt{x} - 2 + x) dx$.

B. $\int_0^2 (2 - x - \sqrt{x}) dx$.

C. $\int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^2 (2 - x) dx$.

D. $\int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_0^2 (2 - x) dx$.

Lời giải

$$\sqrt{x} = 2 - x \Leftrightarrow x = 1.$$

$S = S_1 + S_2$ S_1 là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và các đường thẳng $x = 1, y = 0$.

S_2 là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = 2 - x$ và các đường thẳng $x = 1, y = 0$.

$$S = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^2 (2 - x) dx.$$

Chọn C

Câu 36. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2^x$ và các đường thẳng $y=2; x=-1; x=2$ có giá trị bằng

- A. $\int_1^2 (2^x - 2) dx$ B. $\int_{-1}^2 (2^x - 2) dx$ C. $\int_{-1}^2 (2 - 2^x) dx$ D. $\int_{-1}^1 (2 - 2^x) dx + \int_1^2 (2^x - 2) dx$

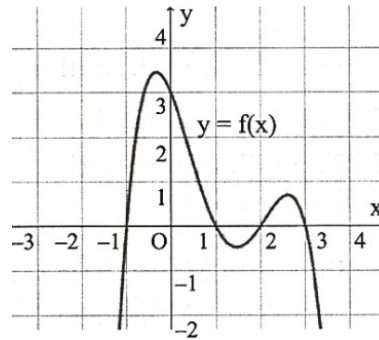
Lời giải

$$S = \int_{-1}^2 |2^x - 2| dx = \int_{-1}^1 |2^x - 2| dx + \int_1^2 |2^x - 2| dx = \int_{-1}^1 (2 - 2^x) dx + \int_1^2 (2^x - 2) dx.$$

Chọn D.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị cắt trục Ox tại đúng 4 điểm phân biệt (hình bên).

Biết rằng $\int_{-1}^1 f(x) dx = 21$, $\int_1^2 f(x) dx = -2$, $\int_2^3 f(x) dx = 3$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và trục Ox bằng



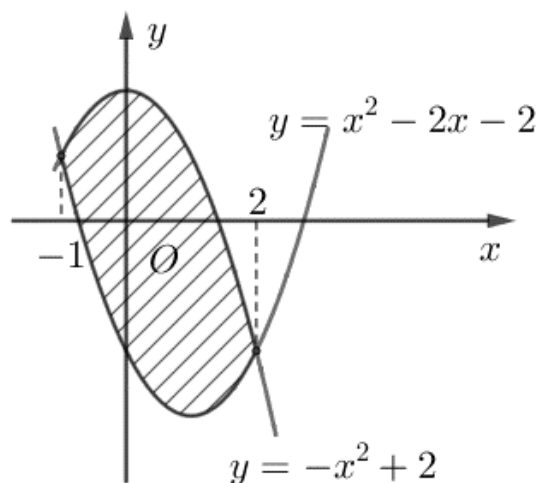
- A. 22. B. 20. C. 16. D. 26.

Lời giải

$$S = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx + \int_2^3 |f(x)| dx = 21 + 2 + 3 = 26$$

Chọn D.

Câu 38. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng



- A. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$ B. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$

C. $\int_1^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx$

D. $\int_1^2 (2x^2 + 2x - 4) dx$
Lời giải

Chọn A

Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên là:

$$\int_1^2 [(-x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 2)] dx = \int_1^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$$

Câu 39. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y = -1$, $x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \pi \int_0^1 (2x^2 + 1) dx$

B. $S = \int_0^1 (2x^2 - 1) dx$

C. $S = \int_0^1 (2x^2 + 1)^2 dx$

D. $S = \int_0^1 (2x^2 + 1) dx$
Lời giải

Chọn D

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^1 |2x^2 + 1| dx = \int_0^1 (2x^2 + 1) dx$ do $2x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in [0; 1]$.

Câu 40. (Mã 101 - 2020 Lần 1) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 4$ và $y = 2x - 4$ bằng

A. 36

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{4\pi}{3}$

D. 36π
Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$$x^2 - 4 = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho là:

$$S = \int_0^2 |(x^2 - 4) - (2x - 4)| dx = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

Câu 41. (Mã 102 - 2020 Lần 1) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 1$ và $y = x - 1$

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{13}{6}$

C. $\frac{13\pi}{6}$

D. $\frac{1}{6}$
Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm hai đường là: $x^2 - 1 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường là $\int_0^1 |x^2 - x| dx = \frac{1}{6}$.

- Câu 42.** (Mã 104 - 2020 Lần 1) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 3$ và $y = x - 3$ bằng
- A. $\frac{125\pi}{6}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{125}{6}$. D. $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 3 = x - 3 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Diện tích hình phẳng: $S = \int_0^1 |(x^2 - 3) - (x - 3)| dx = \int_0^1 |x^2 - x| dx = \frac{1}{6}$.

- Câu 43.** (Mã 103 - 2020 Lần 1) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 2$ và $y = 3x - 2$ bằng
- A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{9\pi}{2}$. C. $\frac{125}{6}$. D. $\frac{125\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm, ta có:

$$\begin{cases} x^2 - 2 = 3x - 2 \\ x^2 - 2 = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Như vậy, diện tích hình phẳng được giới hạn bởi $\int_0^3 |(x^2 - 2) - (3x - 2)| dx = \frac{9}{2}$.

- Câu 44.** (Mã 102 2018) Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \pi \int_0^2 2^x dx$. B. $S = \int_0^2 2^x dx$.

C. $S = \pi \int_0^2 2^{2x} dx$. D. $S = \int_0^2 2^{2x} dx$.

Lời giải

Chọn B

$$S = \int_0^2 |2^x| dx = \int_0^2 2^x dx \quad (\text{do } 2^x > 0, \forall x \in [0; 2]).$$

- Câu 45.** (Mã 101 2018) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

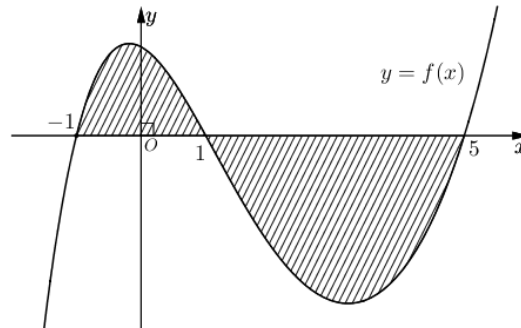
A. $S = \int_0^2 e^x dx$. B. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$. C. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$. D. $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ là: $S = \int_0^2 e^x dx$.

Câu 46. (Mã 102 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 5$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S = - \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx$

B. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx$

C. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx$

D. $S = - \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx$

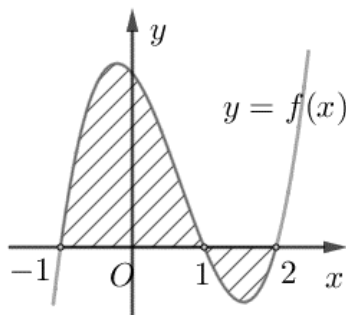
Lời giải

Chọn C

$$S = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^5 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx$$

Ta có:

Câu 47. (Mã 103 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$

B. $S = - \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$

C. $S = - \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$

D. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$

Lời giải

Chọn D

$$S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx$$

Nhìn hình ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[-1;1]$ nên
 $\int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 f(x) dx$; hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn $[1;2]$ nên
 $\int_1^2 |f(x)| dx = - \int_1^2 f(x) dx$

$$S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$$

Vậy

Câu 48. (Đề Minh Hòa 2017) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

A. $\frac{37}{12}$.

B. $\frac{9}{4}$.

C. $\frac{81}{12}$.

D. 13.

Lời giải

Chọn A

$$x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

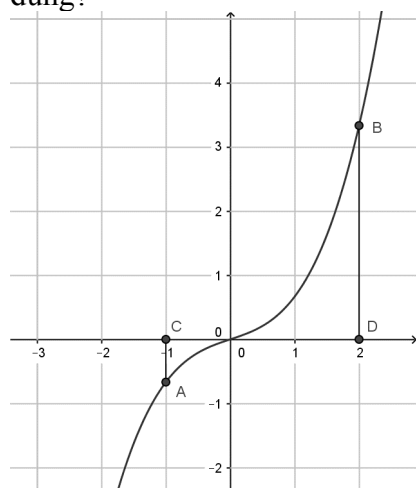
Phương trình hoành độ giao điểm

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$ là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 |x^3 - x - (x - x^2)| dx = \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right|_{-2}^0 + \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right|_0^1 = \left| \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4 \right) \right| + \left| \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) \right| = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

Câu 49. (Đề Tham Khảo 2017) Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục

hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$. Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx$, $b = \int_0^2 f(x) dx$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S = b - a$

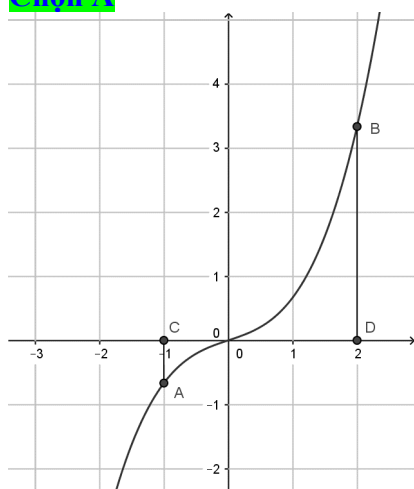
B. $S = b + a$

C. $S = -b + a$

D. $S = -b - a$

Lời giải

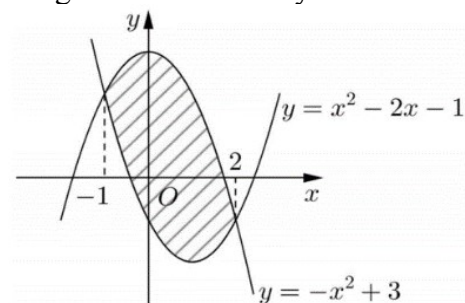
Chọn A



Ta có:

$$S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^2 |f(x)| dx = - \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = -a + b$$

Câu 50. (Đề Tham Khảo 2019) Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx$

B. $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx$

C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$

D. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$

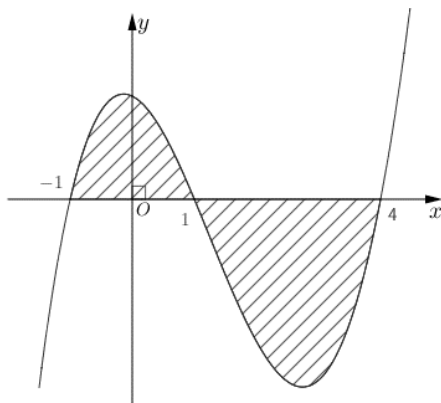
Lời giải

Chọn C

Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là:

$$S = \int_{-1}^2 |(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)| dx = \int_{-1}^2 |-2x^2 + 2x + 4| dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$$

Câu 51. (Mã 101 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 4$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$

B. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$

C. $S = - \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$

D. $S = - \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$

Lời giải

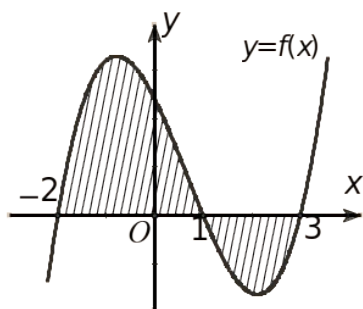
Chọn A

Ta có: hàm số $f(x) \geq 0 \forall x \in [-1; 1]; f(x) \leq 0 \forall x \in [1; 4]$, nên:

$$S = \int_{-1}^4 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^4 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$$

Chọn B.

Câu 52. (Mã 104 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi cả đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$ và $x = 3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = - \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

B. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

C. $S = - \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

D. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

Lời giải

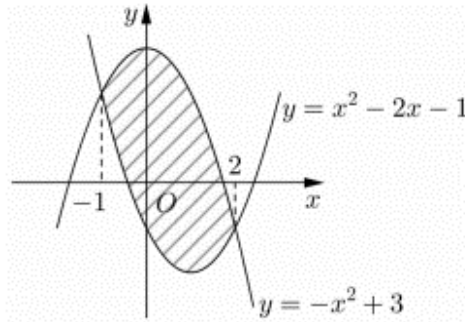
Chọn B

$$S = \int_{-2}^3 |f(x)| dx = S = \int_{-2}^1 |f(x)| dx + \int_1^3 |f(x)| dx.$$

Ta có

Do $f(x) \geq 0$ với $\forall x \in [-2; 1]$ và $f(x) \leq 0$ với $\forall x \in [1; 3]$ nên $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx$.

Câu 53. (Chuyên KHTN 2019) Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$

B. $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx$

C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$

D. $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx$

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy $-x^2 + 3 \geq x^2 - 2x - 1, \forall x \in [-1; 2]$.

Vậy diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là

$$S = \int_{-1}^2 [(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$$

Câu 54. (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x, y = x$. Tính S .

A. $S = 4$.

B. $S = 8$.

C. $S = 2$.

D. $S = 0$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x^3 - 3x = x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Vậy $S = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| = 4 + 4 = 8$.

Câu 55. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019) Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x, y = 0, x = 0, x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_0^2 3^x dx$

B. $S = \pi \int_0^2 3^{2x} dx$

C. $S = \pi \int_0^2 3^x dx$

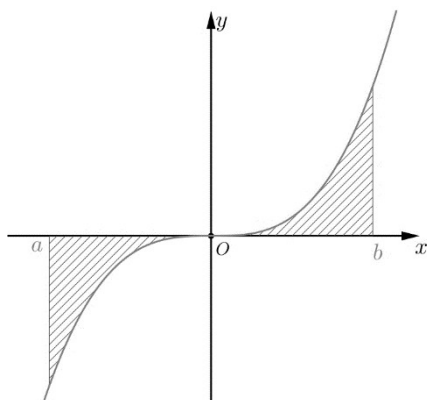
D. $S = \int_0^2 3^{2x} dx$

Lời giải

$$S = \int_0^2 3^x dx$$

Diện tích hình phẳng đã cho được tính bởi công thức

Câu 56. (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (như hình vẽ dưới đây). Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . Đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?



A. $S_D = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$

B. $S_D = - \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$

C. $S_D = \int_a^0 f(x)dx - \int_0^b f(x)dx$

D. $S_D = - \int_a^0 f(x)dx - \int_0^b f(x)dx$

Lời giải

$$S_D = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^0 |f(x)|dx + \int_0^b |f(x)|dx$$

Ta có

Vì $f(x) \leq 0, \forall x \in [a; 0], f(x) \geq 0, \forall x \in [0; b]$ nên:

$$S_D = \int_a^0 (-f(x))dx + \int_0^b f(x)dx = - \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx.$$

Câu 57. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{7}{3}$

Lời giải

$$S = \int_1^2 |(x-2)^2-1|dx = \int_1^2 |x^2-4x+3|dx = \left| \int_1^2 (x^2-4x+3)dx \right| = \frac{2}{3}$$

Ta có:

Câu 58. (KTNL GV Bắc Giang 2019) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=4x-x^2$ và trục Ox

A. 11

B. $\frac{34}{3}$

C. $\frac{31}{3}$

D. $\frac{32}{3}$

Lời giải

Chọn D

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=4x-x^2$ và trục Ox .

$$4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Xét phương trình

$$S = \int_0^4 |4x - x^2| dx = \left| \int_0^4 (4x - x^2) dx \right| = \left| \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 \right| = \frac{32}{3}$$

Ta có

Câu 59. (Viết Đức Hà Nội 2019) Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1, x = -1, x = 2$ và trục hoành.

- A.** $S = 6$ **B.** $S = 16$ **C.** $S = \frac{13}{6}$ **D.** $S = 13$

Lời giải

$$S = \int_{-1}^2 |x^2 + 1| dx = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = 6$$

Ta có:

Câu 60. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 5, y = 6x, x = 0, x = 1$. Tính S .

- A.** $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{8}{3}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + 5 = 6x \Leftrightarrow x = 5; x = 1$

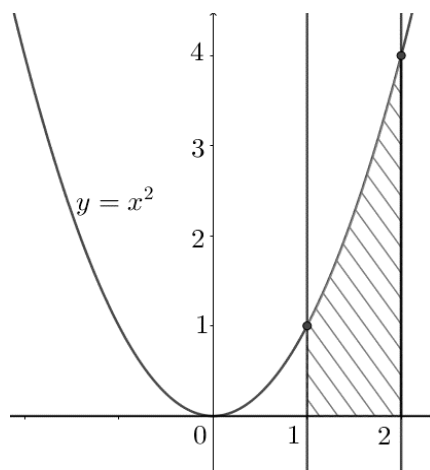
$$S = \int_0^1 |x^2 - 6x + 5| dx = \frac{7}{3}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm:

Câu 61. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2; y = 0; x = 1; x = 2$ bằng

- A.** $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{8}{3}$ **D.** 1

Lời giải



$$S = \int_1^2 |x^2| dx = \int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$$

Ta có

- Câu 62.** (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$ là
- A. 8. B. 5. C. 4. D. 10.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $-x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng là

$$S = \left| \int_0^2 [(2x^2 - 4x + 1) - (-x^2 + 2x + 1)] dx \right|$$

$$= \left| \int_0^2 (3x^2 - 6x) dx \right| = \left| (x^3 - 3x^2) \Big|_0^2 \right| = 4$$

- Câu 63.** (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$.

- A. $\frac{7}{2}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Xét phương trình: $x^2 + 2x = x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là:

$$S = \int_{-2}^1 |x^2 + x - 2| dx = \left| \int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-2}^1 \right| = \left| -\frac{7}{6} - \frac{10}{3} \right| = \frac{9}{2}$$

- Câu 64.** (Chuyên Hạ Long 2019) Hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 3x - 2$. Tính diện tích hình phẳng (H)

- A. $\frac{2}{3}$ (đvdt). B. $\frac{1}{3}$ (đvdt). C. 1 (đvdt). D. $\frac{1}{6}$ (đvdt).

Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường là:

$$S = \int_1^2 |x^2 - (3x - 2)| dx = \left| \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx \right| = \frac{1}{6} \text{ (đvdt).}$$

- Câu 65.** (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019) Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.

- A. $S = \frac{2000}{3}$. B. $S = 2008$. C. $S = 2000$. D. $S = \frac{2008}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C): y = x^2 - 2x$ và $(d): y = 0$ là:
 $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

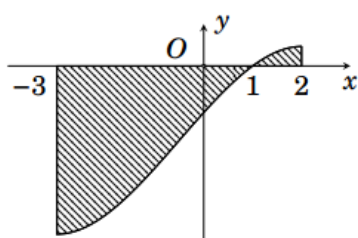
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
VT	+	0	-	0	+

Diện tích cần tìm:
$$S = \int_{-10}^{10} |x^2 - 2x| dx = \int_{-10}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^{10} (x^2 - 2x) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-10}^0 - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^{10} = \frac{1300}{3} + \frac{4}{3} + \frac{704}{3} = \frac{2008}{3}$$

Câu 66. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a = \int_{-3}^1 f(x) dx$, $b = \int_1^2 f(x) dx$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.



- A.** $S = a + b$. **B.** $S = a - b$. **C.** $S = -a - b$. **D.** $S = b - a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có
$$S = \int_{-3}^2 |f(x)| dx = \int_{-3}^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx = - \int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = -a + b$$

Câu 67. (Chuyên Bắc Giang 2019) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là :

- A.** $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{23}{15}$

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $x^2 = 2x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là :

$$S = \int_0^1 |x^2 - x| dx = \left| \int_0^1 (x^2 - x) dx \right| = \frac{4}{3}$$

Câu 68. (Chuyên Phan Bội Châu 2019) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$ là

- A. 8. B. 5. C. 4. D. 10.

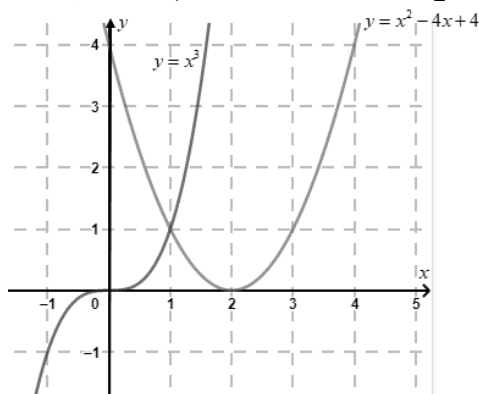
Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$ là:

$$-x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng đã cho là $\int_0^2 |3x^2 - 6x| dx = \int_0^2 (6x - 3x^2) dx = (3x^2 - x^3) \Big|_0^2 = 4$

Câu 69. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^3$, $y = x^2 - 4x + 4$ và trục Ox (tham khảo hình vẽ) được tính theo công thức nào dưới đây?



- A. $\int_0^2 |x^3 - (x^2 - 4x + 4)| dx$ B. $-\int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx$
- C. $\int_0^1 x^3 dx - \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx$ D. $\int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx$

Lời giải

Dựa vào hình vẽ ta thấy hình phẳng cần tính diện tích gồm 2 phần:

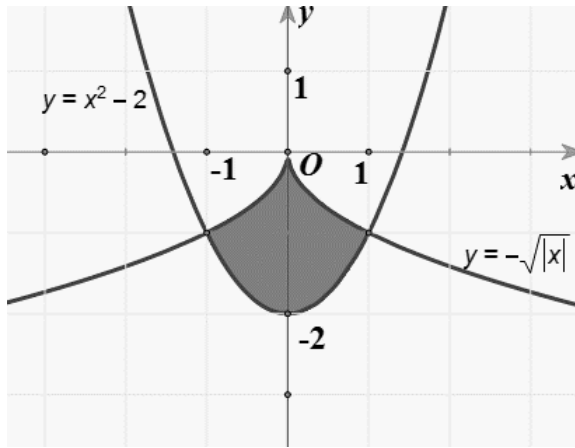
Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục Ox , $x = 0$, $x = 1$.

Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 4$, trục Ox , $x = 1$, $x = 2$.

$$S = \int_0^1 |x^3| dx + \int_1^2 |x^2 - 4x + 4| dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx$$

Do đó diện tích cần tính là

Câu 70. Diện tích phần hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 + \sqrt{|x|}) dx$

B. $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 - \sqrt{|x|}) dx$

C. $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 + \sqrt{|x|}) dx$

D. $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}) dx$

Lời giải

Diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên là:

$$\int_{-1}^1 |x^2 - 2 - (-\sqrt{|x|})| dx = \int_{-1}^1 (-\sqrt{|x|} - x^2 + 2) dx \quad (\text{vì } x \in [-1; 1] \Rightarrow -\sqrt{|x|} > x^2 - 2).$$

Câu 71. (Chuyên Quốc Học Huế 2019) Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

A. $S = \frac{937}{12}$

B. $S = \frac{343}{12}$

C. $S = \frac{793}{4}$

D. $S = \frac{397}{4}$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm 2 đường cong:

$$-x^3 + 12x = -x^2 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \int_{-3}^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx = \int_{-3}^0 |x^3 - x^2 - 12x| dx + \int_0^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx$$

Diện tích cần tìm là:

$$\begin{aligned} &= \left| \int_{-3}^0 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| + \left| \int_0^4 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 \right) \right|_{-3}^0 + \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 \right) \right|_0^4 \\ &= \left| \frac{-99}{4} \right| + \left| \frac{-160}{3} \right| = \frac{937}{12} \end{aligned}$$

Câu 72. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x - 1$ và $y = x^4 + x - 1$ là

A. $\frac{8}{15}$

B. $\frac{7}{15}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{4}{15}$

Lời giải

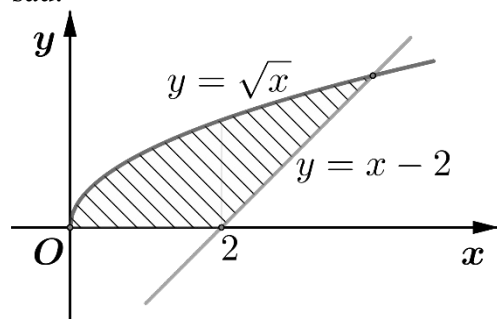
Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2 + x - 1$ và $y = x^4 + x - 1$ là

$$\begin{aligned} x^2 + x - 1 &= x^4 + x - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - x^4 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{-1}^1 |x^2 - x^4| dx = \int_{-1}^0 |x^2 - x^4| dx + \int_0^1 |x^2 - x^4| dx$

$$= \left| \int_{-1}^0 (x^2 - x^4) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 \right| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$

Câu 73. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Tính diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ sau:



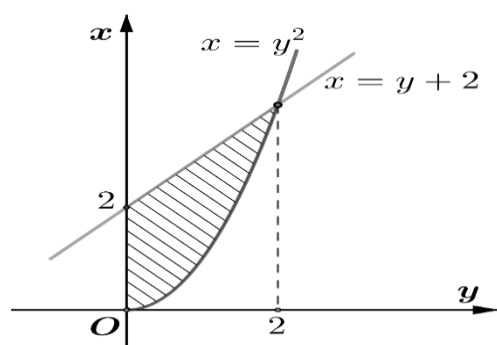
A. $\frac{10}{3}$

B. 4

C. $\frac{13}{3}$
Lời giải

D. $\frac{11}{3}$

Cách 1: Coi x là hàm số theo biến số y .



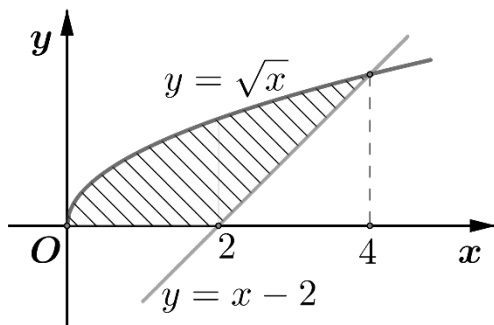
Hình phẳng đã cho giới hạn bởi các đường:

$$x = y^2 \text{ (với } y \geq 0); x = y + 2; y = 0$$

Ta có: $y^2 = y + 2 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \text{ (loại)} \\ y = 2 \text{ (t/m)} \end{cases}$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^2 |y + 2 - y^2| dy = \int_0^2 (y + 2 - y^2) dy = \frac{10}{3}$ (đvdt)

Cách 2:



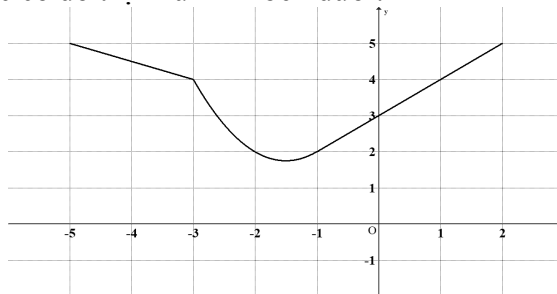
Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$:

$$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_2^4 (x - 2) dx = \frac{10}{3}$ (đvdt)

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ GIỎI

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ liên tục có đồ thị như hình bên dưới.



Biết $F'(x) = f(x), \forall x \in [-5; 2]$ và $\int_{-3}^{-1} f(x) dx = \frac{14}{3}$. Tính $F(2) - F(-5)$

A. $\frac{-145}{6}$.

B. $\frac{-89}{6}$.

C. $\frac{145}{6}$.

D. $\frac{89}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta nhận thấy, đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên đoạn $[-5; 2]$ được xây

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{khi } -5 \leq x < -3 \\ f_2(x) & \text{khi } -3 \leq x \leq -1 \\ f_3(x) & \text{khi } -1 < x \leq 2 \end{cases}$$

dựng bởi ba hàm số. Trong đó:

$f_1(x)$ là đường thẳng qua hai điểm $(-5; 5)$ và $(-3; 4)$ có phương trình: $f_1(x) = \frac{-x+5}{2}$.

$f_2(x)$ có đồ thị là một đường cong nối từ điểm $(-3; 4)$ đến điểm $(-1; 2)$.

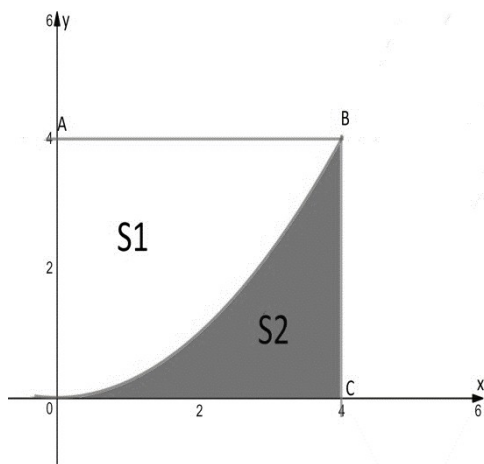
$f_3(x)$ là đường thẳng qua hai điểm $(-1; 2)$ và $(0; 3)$ có phương trình $f_3(x) = x + 3$.

$$F(2) - F(-5) = \int_{-5}^2 f(x) dx = \int_{-5}^{-3} f_1(x) dx + \int_{-3}^{-1} f_2(x) dx + \int_{-1}^2 f_3(x) dx$$

Vậy:

$$= \int_{-5}^{-3} \frac{-x+5}{2} dx + \int_{-3}^{-1} f_2(x) dx + \int_{-1}^2 (x+3) dx = 9 + \frac{14}{3} + \frac{21}{2} = \frac{145}{6}.$$

Câu 75. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{2}$.

B. 3.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 2.

Lời giải

Ta có diện tích hình vuông $OABC$ là 16 và bằng $S_1 + S_2$.

$$S_2 = \int_0^4 \frac{1}{4}x^2 dx = \frac{x^3}{12} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{16 - S_2}{S_2} = \frac{16 - \frac{16}{3}}{\frac{16}{3}} = 2.$$

Câu 76. (Viết Đức Hà Nội 2019) Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = t$ ($t > 1$). Tìm t để $S(t) = 10$.

A. $t = 3$

B. $t = 4$

C. $t = 13$

D. $t = 14$.

Lời giải

$$S(t) = \int_1^t |2x+1| dx = \int_1^t (2x+1) dx$$

Cách 1. Ta có:

Suy ra $S(t) = (x^2 + x) \Big|_1^t = t^2 + t - 2$.

$$S(t) = 10 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 10 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases} (L)$$

Do đó

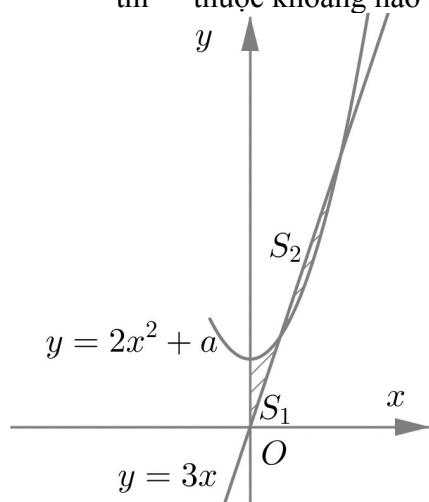
Vậy $t = 3$.

Cách 2. Hình phẳng đã cho là hình thang có đáy nhỏ bằng $y(1)=3$, đáy lớn bằng $y(t)=2t+1$ và chiều cao bằng $t-1$.

$$\frac{(3+2t+1)(t-1)}{2}=10 \Leftrightarrow 2t^2+2t-24=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=-4 \end{cases}. \text{ Vì } t>1 \text{ nên } t=3$$

Do đó **chọn A**.

Câu 77. (Mã 103 - 2019) Cho đường thẳng $y=3x$ và parabol $2x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(1; \frac{9}{8}\right)$

B. $\left(\frac{9}{10}; 1\right)$

C. $\left(\frac{4}{5}; \frac{9}{10}\right)$

D. $\left(0; \frac{4}{5}\right)$

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2+a=3x \Leftrightarrow 2x^2-3x+a=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=9-8a>0 \\ \frac{a}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<\frac{9}{8} \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<a<\frac{9}{8}$$

Ta được nghiệm của phương trình là $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8a}}{4}$.

$$S_1=S_2 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}} (2x^2+a-3x)dx = - \int_{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}} (2x^2+a-3x)dx$$

Ta có

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}} (2x^2+a-3x)dx + \int_{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}} (2x^2+a-3x)dx = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}} (2x^2 - 3x + a) dx = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax \right) \Big|_0^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right)^3 - \frac{2}{3} \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right)^2 + a \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right) \left[\frac{2}{3} \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right) + a \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} = 0 \text{ (vn)} \\ \frac{2}{3} \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right) + a = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4} \right) + a = 0 \xrightarrow[\text{Shift Solve}]{CASIO} a = \frac{27}{32}
\end{aligned}$$

Câu 78. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2$, $mx = y^2$ ($m > 0$). Tìm giá trị của m để $S = 3$.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = 3$.

D. $m = 4$.

Lời giải

Chọn C

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} my = x^2 & (1) \\ mx = y^2 & (2) \end{cases}$$

Thế (1) vào (2) ta được:
$$mx = \left(\frac{x^2}{m} \right)^2 \Leftrightarrow m^3 x - x^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m > 0 \end{cases}$$

Vì $y = \frac{x^2}{m} > 0$ nên $mx = y^2 \xrightarrow{y > 0} y = \sqrt{mx}$

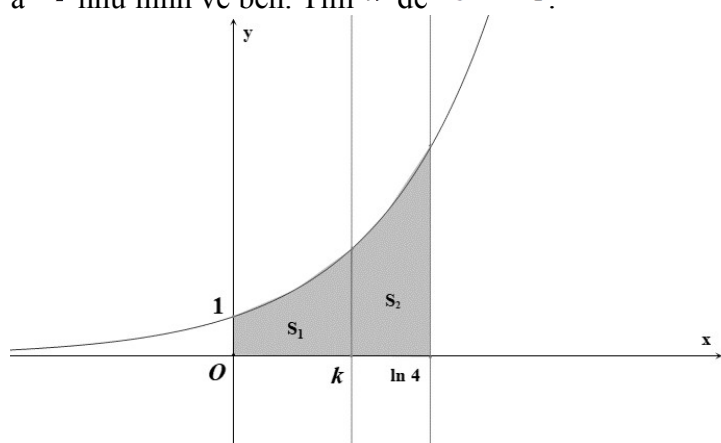
$$S = \int_0^m \left| \sqrt{mx} - \frac{x^2}{m} \right| dx = \left| \int_0^m \left(\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m} \right) dx \right|$$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$= \left| \left(\frac{2\sqrt{m}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3m} \right) \Big|_0^m \right| = \left| \frac{1}{3} m^2 \right| = \frac{1}{3} m^2$$

Yêu cầu bài toán $S = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} m^2 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 9 \xrightarrow{m > 0} m = 3$

Câu 79. (THPT Cẩm Giàng 2 -2019) Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



A. $k = \frac{4}{3} \ln 2$.

B. $k = \ln \frac{8}{3}$.

C. $k = \ln 2$.

D. $k = \ln 3$.

Lời giải

Diện tích hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$ là

$$S = \int_0^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln 4} = e^{\ln 4} - e^0 = 4 - 1 = 3 \text{ (đvdt)}.$$

Ta có $S = S_1 + S_2 = S_1 + \frac{1}{2} S_1 = \frac{3}{2} S_1$. Suy ra $S_1 = \frac{2S}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$ (đvdt).

Vì S_1 là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = k$ nên

$$2 = S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - e^0 = e^k - 1.$$

Do đó $e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3$.

Câu 80. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019) Cho parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB là

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Gọi phương trình đường thẳng AB là: $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

Phương trình giao điểm của AB và (P) là: $x^2 - ax - b = 0$

Để có 2 điểm A, B thì $a^2 + 4b > 0$. khi đó:

$$\begin{cases} A(x_1; ax_1 + b) \\ B(x_2; ax_2 + b) \\ x_1 + x_2 = a \\ x_1 x_2 = -b \end{cases}$$

Nên $AB = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + 1)} |x_2 - x_1| = 2$

Giả sử $x_2 > x_1$ ta có

$$|x_2 - x_1| = \frac{2}{\sqrt{(a^2 + 1)}} \leq 2$$

Mặt khác: $|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{a^2 + 4b}$

Khi đó

$$S = \int_{x_1}^{x_2} ax + b - x^2 dx = \frac{a}{2}(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) - \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3)$$

$$= (x_2 - x_1) \left[\frac{a}{2}(x_2 + x_1) + b - \frac{1}{3}(x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2) \right]$$

$$= (x_2 - x_1) \left[\frac{a}{2}a + b - \frac{1}{3}(a^2 + b) \right] = (x_2 - x_1) \left[\frac{a^2}{b} + \frac{2b}{3} \right] = \frac{a^2 + 4b}{6}(x_2 - x_1) = \frac{(x_2 - x_1)^3}{6} \leq \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Suy ra: $S_{\max} = \frac{4}{3}$ khi $\begin{cases} a = 0 \\ x_2 - x_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 = 1 \end{cases}$ (thỏa mãn vì (P) có tính đối xứng)

$$\Rightarrow \begin{cases} A(1;1) \\ B(-1;1) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A(-1;1) \\ B(1;1) \end{cases}$$

Câu 81. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019) Cho Parabol $(P): y = x^2 + 1$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$ với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là nhỏ nhất. Hỏi m_0 nằm trong khoảng nào?

- A. $(-\sqrt{2}; -\frac{1}{2})$ B. $(0; 1)$ C. $(-1; \frac{1}{\sqrt{2}})$ D. $(\frac{1}{2}; 3)$

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ của (P) và d là $x^2 - mx - 1 = 0$ (1)

Dễ thấy (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt. Gọi a, b ($a < b$) là các nghiệm của (1) thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là

$$S = \int_a^b |x^2 - mx - 1| dx = \left| \int_a^b (x^2 - mx - 1) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{mx^2}{2} - x \right) \right|_a^b$$

Mà $a + b = m, ab = -1$ nên $S = \sqrt{m^2 + 4} \cdot \left(\frac{m^2}{6} + \frac{2}{3} \right) \geq \frac{4}{3}$

Lời giải

Đổi chiều điều kiện (*) ta có $m=5 \Rightarrow a=5$ và $b=1$. Vậy $S=6$.

Câu 83. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2018) Cho parabol $(P): y=x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB=2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d . Tìm giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S .

A. $S_{\max} = \frac{2018^3 + 1}{6}$

B. $S_{\max} = \frac{2018^3}{3}$

C. $S_{\max} = \frac{2018^3 - 1}{6}$

D. $S_{\max} = \frac{2018^3}{3}$

Lời giải

Giả sử $A(a; a^2), B(b; b^2) (b > a)$ sao cho $AB=2018$.

Phương trình đường thẳng d là: $y=(a+b)x - ab$. Khi đó

$$S = \int_a^b |(a+b)x - ab - x^2| dx = \int_a^b ((a+b)x - ab - x^2) dx = \frac{1}{6}(b-a)^3$$

Vì $AB=2018 \Leftrightarrow (b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 2018^2 \Leftrightarrow (b-a)^2 (1 + (b+a)^2) = 2018^2$

$\Rightarrow (b-a)^2 \leq 2018^2 \Rightarrow |b-a| = b-a \leq 2018 \Rightarrow S \leq \frac{2018^3}{6}$. Vậy $S_{\max} = \frac{2018^3}{6}$ khi $a = -1009$ và $b = 1009$.

Câu 84. (THPT Tứ Kỳ - Hải Dương - 2018) Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4-x^2$, trục hoành và đường thẳng $x=-2, x=m, (-2 < m < 2)$. Tìm số giá trị của tham

số m để $S = \frac{25}{3}$.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Ta có $S = \int_{-2}^m |4-x^2| dx = \frac{25}{3}$

Phương trình $4-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Bài ra $-2 < m < 2$ nên trên $(-2; m)$ thì $4-x^2=0$ vô nghiệm.

$$\int_{-2}^m |4-x^2| dx = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \left| \int_{-2}^m (4-x^2) dx \right| = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \left| \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^m \right| = \frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left| \left(4m - \frac{m^3}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) \right| = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \left| 4m - \frac{m^3}{3} + \frac{16}{3} \right| = \frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m - \frac{m^3}{3} + \frac{16}{3} = \frac{25}{3} \\ 4m - \frac{m^3}{3} + \frac{16}{3} = -\frac{25}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}m^3 - 4m + 3 = 0 \\ \frac{1}{3}m^3 - 4m - \frac{41}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 - 12m + 9 = 0 \\ m^3 - 12m - 41 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(m) = m^3 - 12m$, với $m \in (-2; 2)$ có

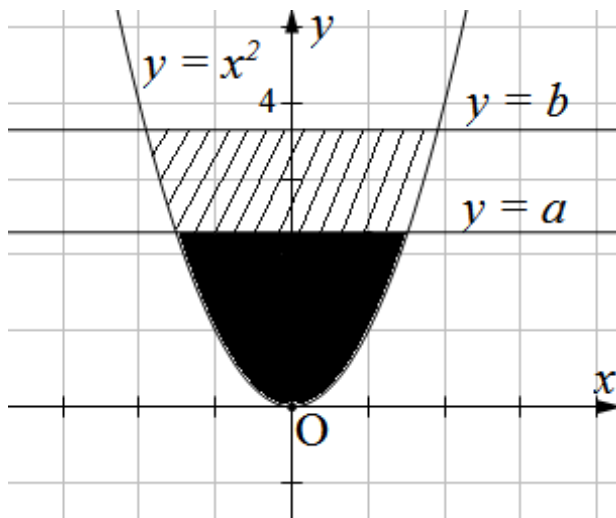
$$f'(m) = 3m^2 - 12 = 3(m^2 - 4) < 0 \quad \forall m \in (-2; 2)$$

Do đó $f(m)$ nghịch biến trên $(-2; 2) \Rightarrow f(m) < f(-2) = 16 \Rightarrow m^3 - 12m - 41 < 0$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow m^3 - 12m + 9 = 0 \Leftrightarrow (m - 3)(m^2 + 3m - 3) = 0 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{21} - 3}{2}$ thỏa mãn.

Vậy chỉ có $m = \frac{\sqrt{21} - 3}{2}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 85. (THPT Mộ Đức - Quảng Ngãi - 2018) Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ ($0 < a < b$) (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = a$ (phần tô đen); (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1 = S_2$?



A. $b = \sqrt[3]{4}a$.

B. $b = \sqrt[3]{2}a$.

C. $b = \sqrt[3]{3}a$.

D. $b = \sqrt[3]{6}a$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ với đường thẳng $y = b$ là $x^2 = b \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{b}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ với đường thẳng $y = a$ là $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $y = b$ là

$$S = 2 \int_0^{\sqrt{b}} (b - x^2) dx = 2 \left(bx - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{b}} = 2 \left(b\sqrt{b} - \frac{b\sqrt{b}}{3} \right) = \frac{4b\sqrt{b}}{3}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $y = a$ (phần tô màu đen) là

$$S_1 = 2 \int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = 2 \left(ax - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{a}} = 2 \left(a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} \right) = \frac{4a\sqrt{a}}{3}$$

$$\text{Do đó } S = 2S_1 \Leftrightarrow \frac{4b\sqrt{b}}{3} = 2 \cdot \frac{4a\sqrt{a}}{3} \Leftrightarrow (\sqrt{b})^3 = 2(\sqrt{a})^3 \Leftrightarrow \sqrt{b} = \sqrt[3]{2}\sqrt{a} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{4}a$$

Câu 86. Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 2x + 3$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 4$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d . Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

A. $T = 99$

B. $T = 64$

C. $T = 32$

D. $T = 72$

Lời giải

Để việc tính toán trở nên đơn giản, ta tịnh tiến hai parabol sang trái một đơn vị.

Khi đó, phương trình các parabol mới là $(P_1): y = -x^2 + 4$ $(P_2): y = -\frac{a}{4}x^2 + a$

Gọi A, B là các giao điểm của (P_1) và trục $Ox \Rightarrow A(-2; 0), B(2; 0) \Rightarrow AB = 4$

Gọi A, B là giao điểm của (P_1) và đường thẳng $d \Rightarrow M(-\sqrt{4-a}; a), N(\sqrt{4-a}; a)$

$$S_1 = 2 \int_a^4 \sqrt{4-y} dy = -\frac{4}{3} \left((4-y)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_a^4 = \frac{4}{3} (4-a) \sqrt{4-a}$$

Ta có

$$S_2 = 2 \int_a^2 \left(-\frac{a}{4}x^2 + a \right) dx = 2 \left(-\frac{ax^3}{12} + ax \right) \Big|_0^2 = \frac{8a}{3}$$

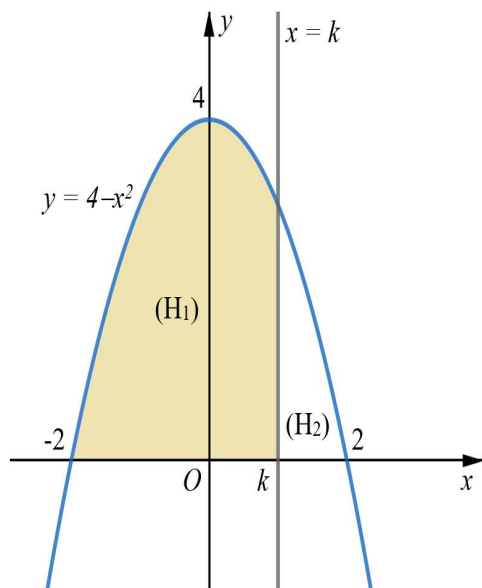
$$S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{4}{3} (4-a) \sqrt{4-a} = \frac{8a}{3} \Leftrightarrow (4-a)^3 = 4a^2 \Leftrightarrow a^3 - 8a^2 + 48a = 64$$

Theo giả thiết

$$T = 64$$

Vậy

Câu 87. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2021) Trong mặt phẳng Oxy cho là hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol $y = 4 - x^2$ và trục hoành. Đường thẳng $x = k, (-2 < k < 2)$ chia (H) thành hai phần $(H_1), (H_2)$ như hình vẽ.



Biết rằng diện tích (H_1) gấp $\frac{20}{7}$ lần diện tích (H_2) , hỏi giá trị k thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2; -1)$

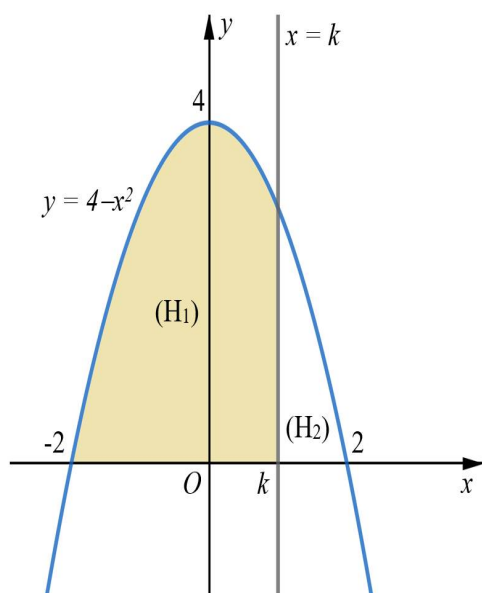
B. $(0; 1)$

C. $(-1; 0)$

D. $(1; 2)$

Lời giải

Chọn B



Gọi S, S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hình phẳng $(H), (H_1)$ và (H_2) .

Ta có $S = S_1 + S_2, S_1 = \frac{20}{7} S_2 \Rightarrow S = \frac{27}{7} S_2$

Mặt khác $S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{32}{3} \Rightarrow S_2 = \frac{7}{27} \cdot \frac{32}{3} = \frac{224}{81}$

Mà $S_2 = \int_k^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_k^2 = \frac{16}{3} + \frac{k^3}{3} - 4k$ nên ta được $\frac{16}{3} + \frac{k^3}{3} - 4k = \frac{224}{81}$

$$\Leftrightarrow (3k - 2)(9k^2 + 6k - 104) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3} \text{ (do } k \in (-2; 2)).$$

D. 20.

Chọn A

D. 8.

Chọn C

$$\Leftrightarrow F(2) - G(0) + a = F(2) - F(0) \Leftrightarrow F(0) = G(0) - a \quad (2).$$

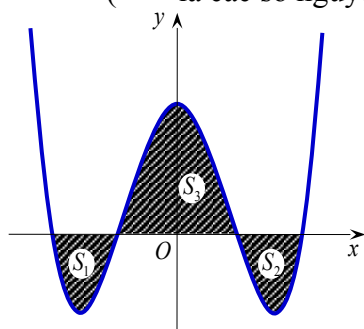
Từ (1) và (2) suy ra $C = -a$.

Khi đó $F(x) = G(x) - a, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |F(x) - G(x)| = a, \forall x \in \mathbb{R}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 2$ là

$$S = \int_0^2 |F(x) - G(x)| dx = \int_0^2 a dx = 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

Câu 90. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và Ox có phần phía trên trục hoành là S_1 , phần dưới trục hoành x là S_2 và S_3 thỏa $S_1 + S_2 = S_3$. Khi đó $m = \frac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên, $b > 0, \frac{a}{b}$ tối giản). Giá trị của biểu thức $S = a - b$ là



- A. 2. B. 7. C. 9. **D. 11.**

Lời giải

Chọn D

Gọi m, n, p, q ($m < n < 0 < p < q$) là hoành độ các giao điểm của đồ thị với Ox

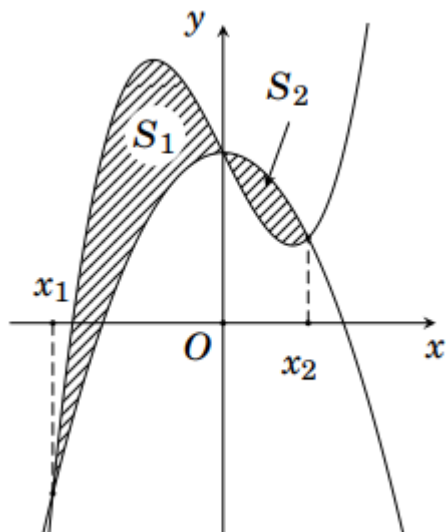
Do đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng nên

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 = S_3 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} S_3 = S_2 \Leftrightarrow \int_0^p (x^4 - 4x^2 + m) dx = \int_p^q (x^4 - 4x^2 + m) dx \\ &\Leftrightarrow \int_0^q (x^4 - 4x^2 + m) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{q^5}{5} - \frac{4q^3}{3} + mq = 0 \Leftrightarrow \frac{q^4}{5} - \frac{4q^2}{3} + m = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác $q^4 - 4q^2 + m = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $m = \frac{20}{9}$. Vậy $a = 20, b = 9 \Rightarrow a - b = 11$.

Câu 91. (Sở Hà Tĩnh 2022) Cho đường cong $(C): y = x^3 + kx + 2$ và parabol $P: y = -x^2 + 2$ tạo thành hai miền phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ bên.



Biết rằng $S_1 = \frac{8}{3}$, giá trị của S_2 bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{5}{12}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$$x^3 + kx + 2 = -x^2 + 2 \Leftrightarrow x(x^2 + x + k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x + k = 0 \end{cases}$$

Hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt nên phương trình $x^2 + x + k = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} k < 0 \\ x_2 = -1 - x_1 \\ k = -x_1^2 - x_1 \end{cases}$$

x_1, x_2 khác 0 và thỏa mãn $x_1 < 0 < x_2$. Do đó ta có

Trên đoạn $[x_1; 0]$, $x^3 + kx + 2 \geq -x^2 + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + kx \geq 0$. Theo bài ra, diện tích $S_1 = \frac{8}{3}$ nên

$$\int_{x_1}^0 |x^3 + x^2 + kx| dx = \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^0 (x^3 + x^2 + kx) dx = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{kx^2}{2} \right) \Big|_{x_1}^0 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow -(3x_1^4 + 4x_1^3 + 6kx_1^2) = 32$$

$$\Leftrightarrow 3x_1^4 + 4x_1^3 + 6(-x_1^2 - x_1)x_1^2 = -32$$

$$\Leftrightarrow 3x_1^4 + 2x_1^3 - 32 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + 2)(3x_1^3 - 4x_1^2 + 8x_1 - 16) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ (vì } x_1 < 0).$$

Với $x_1 = -2 \Rightarrow k = -2, x_2 = 1$ và $x^3 + x^2 - 2x \leq 0, \forall x \in [0; 1]$, ta có

$$S_2 = - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx = - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{12}.$$

Câu 92. (Sở Ninh Bình 2022) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = (m+1)x + 5$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\frac{16}{3}$.

B. $\frac{48}{3}$.

C. $\frac{64}{3}$.

D. $\frac{32}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 + 2x + 1 = (m+1)x + 5 \Leftrightarrow x^2 + (1-m)x - 4 = 0.$$

Với mọi m ta đều có $ac = -4 < 0$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm $x_1, x_2, (x_1 < x_2)$. Theo

định lí Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 1 \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$ và

$$x_2 - x_1 = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{(m-1)^2 + 16}.$$

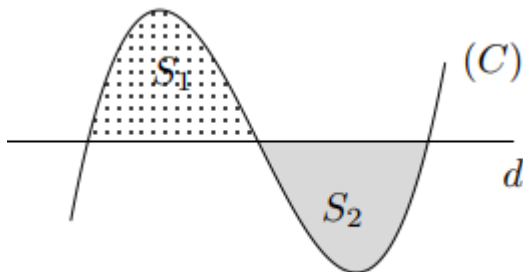
Khi đó hình phẳng luôn tồn tại và có diện tích là

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_1}^{x_2} |x^2 + (1-m)x - 4| dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} (x^2 + (1-m)x - 4) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{x^3}{3} + (1-m)\frac{x^2}{2} - 4x \right) \right|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{6} \left| (2x^3 + 3(1-m)x^2 - 24x) \right|_{x_1}^{x_2} \\ &= \left| \frac{m^2 - 2m + 17}{6} (x_2 - x_1) \right| = \frac{(\sqrt{m^2 - 2m + 17})^3}{6} = \frac{(\sqrt{(m-1)^2 + 16})^3}{6} \geq \frac{4^3}{6} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng $\frac{32}{3}$.

Câu 93. (Sở Ninh Bình 2022) Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d :

$y = -45m - 2$ cùng với đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + x + 1$ tạo thành hai miền kín có diện tích lần lượt là S_1, S_2 thỏa mãn $S_1 = S_2$ (xem hình vẽ). Số phần tử của tập X là



A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 9.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương đồ thị (C) có hai điểm cực trị và tâm đối xứng I của (C) thuộc d . Ta có $f'(x) = x^2 - 4mx + 1$ nên hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi

$$\Delta' = (2m)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[m > \frac{1}{2} \vee m < -\frac{1}{2} \right].$$

Lại có

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4m \Leftrightarrow x = 2m.$$

Với $x = 2m$ thì $f(x) = \frac{-16}{3}m^3 + 2m + 1$ nên $I\left(2m; \frac{-16}{3}m^3 + 2m + 1\right)$. Suy ra $I \in d$ khi và chỉ khi

$$\frac{-16}{3}m^3 + 2m + 1 = -45m - 2 \Leftrightarrow 16m^3 - 141m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{-6 \pm \sqrt{33}}{4} \end{cases}.$$

Để thấy $m = \frac{-6 \pm \sqrt{33}}{4}$ không thỏa mãn, do đó $X = \left\{ 3; \frac{-6 - \sqrt{33}}{4} \right\}$.

Câu 94. (THPT Kim Liên - Hà Nội - 2022) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 + 2x - 1$ và các đường thẳng $y = m$, $x = 0$, $x = 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-4040; -3]$ để $S \leq 2021$?

A. 2019.

B. 2020.

C. 2021.

D. 2018.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2 \geq -2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

mà $m \in [-4040; -3]$ nên $m < x^2 + 2x - 1 \quad \forall x \in [0; 1]$.

$$S = \int_0^1 (x^2 + 2x - 1 - m) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - x - mx \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - m.$$

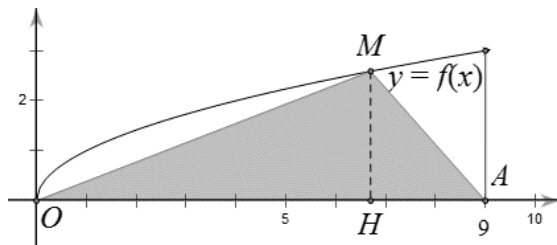
Suy ra

$$S \leq 2021 \Leftrightarrow \frac{1}{3} - m \leq 2021 \Leftrightarrow m \geq -\frac{6062}{3}.$$

Khi đó:

Vì $m \in [-4040; -3]$, $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2018 số nguyên m .

Câu 95. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018) Cho đồ thị $(C): y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , đường thẳng $x = 9$ và trục Ox . Cho điểm M thuộc đồ thị (C) và điểm $A(9; 0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho (H) quay quanh trục Ox , V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh trục Ox . Biết rằng $V_1 = 2V_2$. Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM .



- A. $S = 3$. B. $S = \frac{27\sqrt{3}}{16}$. C. $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. $S = \frac{4}{3}$.
- Lời giải**

Ta có
$$V_1 = \pi \int_0^9 (\sqrt{x})^2 dx = \frac{81\pi}{2}.$$

Gọi H là hình chiếu của M lên trục Ox , đặt $OH = m$ (với $0 < m \leq 9$), ta có $M(m; \sqrt{m})$, $MH = \sqrt{m}$ và $AH = 9 - m$.

Suy ra
$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot MH^2 \cdot OH + \frac{1}{3} \pi \cdot MH^2 \cdot AH = \frac{1}{3} \pi \cdot MH^2 \cdot OA = 3m\pi.$$

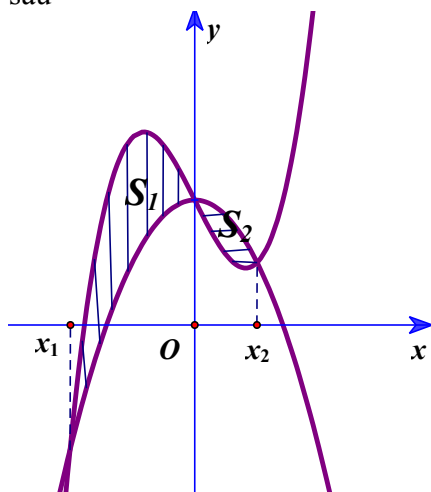
Theo giả thiết, ta có $V_1 = 2V_2$ nên $\frac{81\pi}{2} = 6m\pi \Leftrightarrow m = \frac{27}{4}$. Do đó $M\left(\frac{27}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng OM là $y = \frac{2\sqrt{3}}{9}x$.

Diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM là

$$S = \int_0^{\frac{27}{4}} \left(\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{3}}{9}x \right) dx = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{\sqrt{3}}{9}x^2 \right) \Big|_0^{\frac{27}{4}} = \frac{27\sqrt{3}}{16}.$$

Câu 96. (Cụm trường Nam Định 2022) Cho đường cong $(C): y = x^3 + mx + 2$ (với m là tham số thực) và parabol $(P): y = -x^2 + 2$ tạo thành hai miền phẳng có diện tích S_1, S_2 có diện tích như hình vẽ sau



Biết $S_1 = \frac{8}{3}$, giá trị của S_2 bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{5}{12}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có: $x^3 + x^2 + mx = (x - x_1)x(x - x_2) \Leftrightarrow x^3 + x^2 + mx = x^3 - (x_1 + x_2)x^2 + x_1x_2x$. Cân bằng

hệ số ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = m \end{cases} \Rightarrow m = -x_1^2 - x_1$

+ Vì $S_1 = \frac{8}{3} \Rightarrow \int_{x_1}^0 (x^3 + x^2 + mx) dx = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_1^3}{3} + \frac{mx_1^2}{2} = -\frac{8}{3} \Rightarrow \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_1^3}{6} = \frac{8}{3} \Rightarrow x_1 = -2$

+ Do đó: $m = -2, x_2 = 1$ nên $S_2 = -\int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx = \frac{5}{12}$

Câu 97. (Sở Bình Thuận 2022) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 2mx - 1$ (m là tham số) và $y = x^3 + x^2 + 3$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

- A. $\frac{31}{3}$. B. $\frac{28}{3}$. C. $\frac{32}{3}$. D. $\frac{29}{3}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + 2x^2 - 2mx - 1 = x^3 + x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 4 = 0$ luôn có hai nghiệm $x_1, x_2, (x_1 < x_2)$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2m; x_1x_2 = -4 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4m^2 + 16$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} |x^2 - 2mx - 4| dx = \left| \left[\frac{x - m}{3} (x^2 - 2mx - 4) - \frac{8 + 2m^2}{3} x - \frac{4m}{3} \right] \right|_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{8 + 2m^2}{3} |x_2 - x_1| = \frac{4}{3} \sqrt{(m^2 + 4)^3} \geq \frac{32}{3}$$

Vậy $S_{\min} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow m = 0$

Câu 98. (Chuyên ĐHSP Hà Nội 2022) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và đường thẳng $d: y = m(x + 1)$ cắt nhau tạo thành hai hình phẳng có cùng diện tích. Khi đó giá trị của m thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau?

- A. $m \in (4; 5)$. B. $m \in (-5; -3)$. C. $m \in (2; 4)$. D. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn D

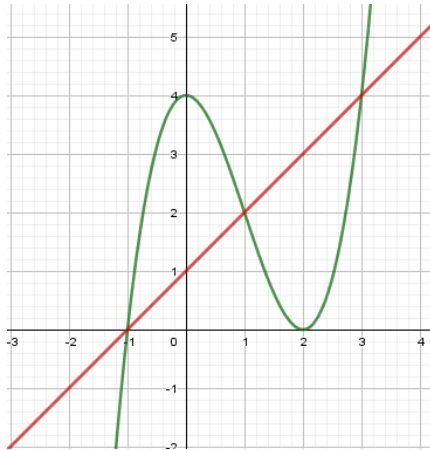
Xét phương trình $x^3 - 3x^2 + 4 = m(x + 1)$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 4x + 4 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 - 4x + 4 - m = 0 \end{cases}$$

Phương trình $x^2 - 4x + 4 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi $m > 0$.

Giả sử x_1, x_2 ($-1 < x_1 < x_2$) là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 4 - m = 0$ và hai hình phẳng cần tìm có diện tích là S_1, S_2 .



$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_{-1}^{x_1} (x^3 - 3x^2 + 4 - mx - m) dx = \int_{x_1}^{x_2} (mx + m - x^3 + 3x^2 - 4) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{x_1} (x^3 - 3x^2 + 4 - mx - m) dx + \int_{x_1}^{x_2} (x^3 - 3x^2 + 4 - mx - m) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{x_2} (x^3 - 3x^2 + 4 - mx - m) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2^4}{4} - x_2^3 + 4x_2 - \frac{mx_2^2}{2} - mx_2 - \left(\frac{1}{4} + 1 - 4 - \frac{m}{2} + m \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2^4 - 4x_2^3 + 16x_2 - 2mx_2^2 - 4mx_2 + 11 - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2^4 - 4x_2^3 + 4x_2^2 - mx_2^2) + (-4x_2^2 + 16x_2 - 16 + 4m) + (-mx_2^2 + 4mx_2 - 4m + m^2) - 8mx_2 + 27 - 2m - m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2^2(x_2^2 - 4x_2 + 4 - m) - 4(x_2^2 - 4x_2 + 4 - m) - m(x_2^2 - 4x_2 + 4 - m) - 8mx_2 + 27 - 2m - m^2 = 0 \quad (1)$$

Mặt khác x_2 là một nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 4 - m = 0$ nên $x_2^2 - 4x_2 + 4 - m = 0$.

Do đó: $(1) \Leftrightarrow -8mx_2 + 27 - 2m - m^2 = 0$

Giải hệ: $\begin{cases} x_2^2 - 4x_2 + 4 = m \\ -8mx_2 + 27 - 2m - m^2 = 0 \end{cases}$ ta được: $x_2 = -1, x_2 = 3$. So với điều kiện $-1 < x_1 < x_2$, ta nhận $x_2 = 3$.

Suy ra: $m = 1$.

Nhận xét: đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có tâm đối xứng là điểm $I(1; 2)$.

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và đường thẳng $d: y = m(x+1)$ cắt nhau tạo thành hai hình phẳng có cùng diện tích khi đường thẳng $d: y = m(x+1)$ đi qua điểm $I(1; 2)$. Suy ra: $m = 1$.

Câu 99. (Mã 120-2021-Lần 2) Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - 2x$, với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1, 2$ và 3 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$.

B. $\frac{71}{9}$.

C. $\frac{64}{9}$.

D. $\frac{71}{6}$.

Lời giải

Chọn B

$$f(x) - g(x) = ax^4 + (b - m)x^3 + (c - m)x^2 + 4x$$

$$\Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = 4ax^3 + 3(b - m)x^2 + 2(c - m)x + 4$$

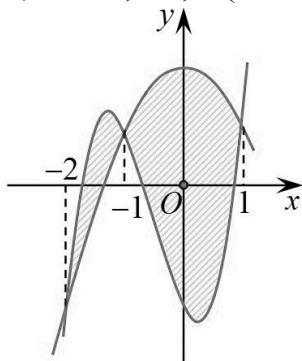
$$\text{Theo giả thiết } f'(x) - g'(x) = 4a(x + 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$\text{Ta có: } 4 = 4a \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-3) \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = \frac{2}{3}(x + 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$S = \int_{-1}^3 \left| \frac{2}{3}(x + 1)(x - 2)(x - 3) \right| dx = \frac{71}{9}$$

Câu 100. (Mã 102 2018) Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{37}{12}$.

B. $\frac{37}{6}$.

C. $\frac{13}{2}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là

$$ax^3 + bx^2 + cx - 2 = dx^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow a^3 + (b - d)x^2 + (c - e)x - 4 = 0. \quad (*)$$

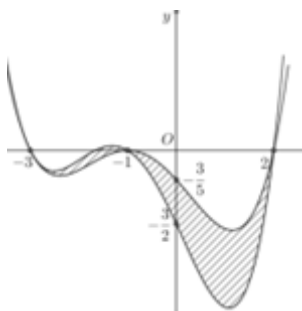
Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x = -2$; $x = -1$; $x = 1$. Ta được

$$ax^3 + (b - d)x^2 + (c - e)x - 4 = k(x + 2)(x + 1)(x - 1)$$

Khi đó $-4 = -2k \Rightarrow k = 2$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int_{-2}^1 2(x + 2)(x + 1)(x - 1) dx = \frac{37}{6}$.

Câu 101. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là -3 ; -1 ; 2 . Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) gần nhất với kết quả nào dưới đây?



A. 3,11.

B. 2,45.

C. 3,21.

D. 2,95.

Lời giải

Chọn A

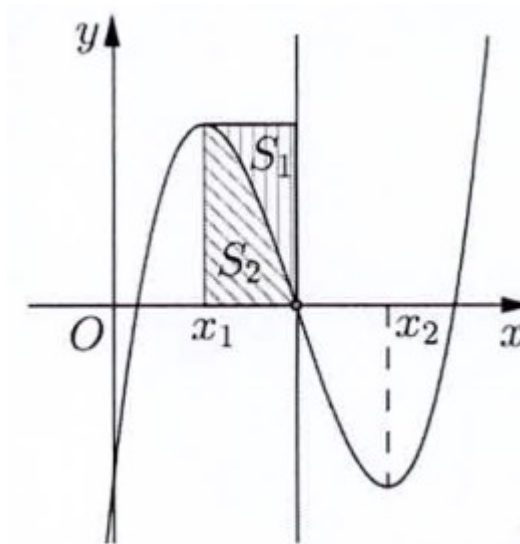
$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= a(x + 3)(x + 1)(x - 2) = (ax + 3a)(x^2 - x - 2) = ax^3 - ax^2 - 2ax + 3ax^2 - 3ax - 6a \\ &= ax^3 + 2ax^2 - 5ax - 6a \end{aligned}$$

$$f(0) - g(0) = -6a, \text{ quan sát hình vẽ ta có } f(0) - g(0) = -\frac{3}{5} + \frac{3}{2} = \frac{9}{10}$$

$$\text{Nên } -6a = \frac{9}{10} \Rightarrow a = -\frac{3}{20} \quad S = \int_{-3}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-3}^2 \left| -\frac{3}{20}(x + 3)(x + 1)(x - 2) \right| dx = \frac{253}{80} = 3.1625$$

Câu 102. (Đề Tham Khảo 2021) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi

S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a > 0 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo giả thiết ta có $f'(x_1) = f'(x_2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3a(x - x_1)(x - x_2) = 3a(x - x_1)(x - x_1 - 2)$.

$$\Rightarrow f'(x) = 3a(x - x_1)^2 - 6a(x - x_1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + C$$

Ta có $f(x_1) + f(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) + f(x_1 + 2) = 0 \Rightarrow C + 8a - 12a + C = 0 \Rightarrow C = 2a$.

Do đó $f(x) = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 2a = a[(x - x_1)^3 - 3(x - x_1)^2 + 2]$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow a[(x - x_1)^3 - 3(x - x_1)^2 + 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + 1 - \sqrt{3} \\ x = x_1 + 1 \\ x = x_1 + 1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$S_2 = \int_{x_1}^{x_1+1} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_1+1} a[(x - x_1)^3 - 3(x - x_1)^2 + 2] dx$$

Suy ra

$$= \int_{x_1}^{x_1+1} a[(x - x_1)^3 - 3(x - x_1)^2 + 2] d(x - x_1)$$

$$= a \left[\frac{(x - x_1)^4}{4} - (x - x_1)^3 + 2(x - x_1) \right] \Big|_{x_1}^{x_1+1} = \frac{5a}{4}$$

$$S_1 + S_2 = \int_{x_1}^{x_1+1} f(x_1) dx = f(x_1) \int_{x_1}^{x_1+1} dx = f(x_1) = 2a \Rightarrow S_1 = 2a - S_2 = \frac{3a}{4}$$

Mặt khác ta có

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}$$

Vậy

Câu 103. (Chuyên Ngoại Ngữ - Hà Nội 2022) Cho hàm số $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có ba điểm cực trị $-2, 1$ và 2 . Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có giá trị thuộc khoảng

- A. $(34; 35)$ B. $(36; 37)$ C. $(37; 38)$ D. $(35; 36)$

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra, ta có: $f'(x) = 12(x+2)(x-1)(x-2) = 12(x^3 - x^2 - 4x + 4)$

$$\Rightarrow f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + d.$$

$$\text{Khi đó } f(-2) = d - 112, f(1) = d + 23, f(2) = d + 16$$

$$\text{Giả sử } g(x) = mx^2 + nx + p$$

Theo bài ra, ta có:

$$\begin{cases} g(-2) = 4m - 2n + p = d - 112 \\ g(1) = m + n + p = d + 23 \\ g(2) = 4m + 2n + p = d + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 2n + (p - d) = -112 \\ m + n + (p - d) = 23 \\ 4m + 2n + (p - d) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -13 \\ n = 32 \\ p - d = 4 \end{cases}$$

$$\text{Do vậy, } f(x) - g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + d + 13x^2 - 32x - p = 3x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 16x - 4$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{1}{3} \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Suy ra

$$S = \int_{-2}^2 |3x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 16x - 4| dx \approx 37,31358 \in (37; 38).$$

Vậy

Câu 104. (Sở Hải Phòng 2023) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) - f'(x) = x^3 - 6x^2 + 7x - 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$ và $y = xf'(x)$ bằng

- A. $\frac{69}{32}$ B. $\frac{21}{32}$ C. $\frac{27}{32}$ D. $\frac{135}{64}$

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra, ta có: $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

$$\Rightarrow f(x) - f'(x) = x^3 + (b-3)x^2 + (c-2b)x + d - c \Rightarrow \begin{cases} b-3 = -6 \\ c-2b = 7 \\ d-c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 1 \\ d = -1 \end{cases}$$

Vậy $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 \Rightarrow xf'(x) - f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

$$\bullet xf'(x) - f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^1 |2x^3 - 3x^2 + 1| dx = \frac{27}{32}$$

Vậy

Câu 105. (Sở Hải Dương 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(1) = -\frac{1}{2}$ và $f(x) + x \cdot f'(x) = (2x^3 + x^2) \cdot f^2(x), \forall x \in [1; 2]$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục $Ox, x = 1, x = 2$. Chọn mệnh đề đúng?

A. $\frac{1}{2} < S < 1$

B. $2 < S < 3$

C. $1 < S < \frac{3}{2}$

D. $0 < S < \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn D

$$f(x) + x \cdot f'(x) = (2x^3 + x^2) \cdot f^2(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} f(x) + \frac{1}{x} f'(x) = (2x + 1) \cdot f^2(x)$$

$$\frac{-\frac{1}{x^2} \cdot f(x) - \frac{1}{x} \cdot f'(x)}{f^2(x)} = -2x - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\frac{1}{x}}{f(x)} \right)' = -2x - 1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{x}}{f(x)} = -x^2 - x + C.$$

Thay $x = 1$ vào cả hai vế suy ra $C = 0$.

$$f(x) = \frac{-1}{x^3 + x^2} \Rightarrow S = \int_1^2 \left| \frac{-1}{x^3 + x^2} \right| dx \approx 0,2123$$

Câu 106. (Sở Thái Bình 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) + 4x - 6x \cdot e^{x^2 - f(x) - 1} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -1$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đồ thị hàm số $y = f'(x) + f''(x)$ bằng

A. $\frac{16}{3}$

B. $\frac{32}{3}$

C. $\frac{22}{3}$

D. $\frac{27}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) + 4x - 6x \cdot e^{x^2 \cdot f(x) - 1} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f'(x) + 4x = 6x \cdot e^{x^2 \cdot f(x) - 1} \Leftrightarrow [f'(x) + 4x] e^{f(x) + 1} = 6x \cdot e^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow [f'(x) + 4x] e^{f(x) + x^2 + 1} = 6x \cdot e^{3x^2} \Leftrightarrow [e^{f(x) + 2x^2 + 1}]' = 6x \cdot e^{3x^2}$$

Suy ra $e^{f(x) + 2x^2 + 1} = \int 6x \cdot e^{3x^2} dx = e^{3x^2} + C$.

Vì $f(0) = -1$ nên suy ra $C = 0$.

Vậy $f(x) = x^2 - 1$.

Do đó, ta có $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$.

Xét phương trình $f(x) - [f'(x) + f''(x)] = x^2 - 1 - (2x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy $S = \int_{-1}^3 |f(x) - [f'(x) + f''(x)]| dx = \left| \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx \right| = \frac{32}{3}$.