**ĐỀ 06**

**ĐỀ HSG 9 ĐẶNG THAI MAI – TP VINH Năm 2023-2024**

**Câu 1.** (5 điểm)

1. Rút gọn các biểu thức sau:
2. A = $\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\sqrt{2-\sqrt{3}}$
3. B = $\sqrt{2-\sqrt{2\sqrt{5}-2}}-\sqrt{2+\sqrt{2\sqrt{5}-2}}$
4. C = sin$α$.cos$α + \frac{sin^{2}α}{1+cot α}+\frac{cos^{2}α}{1+tan α}$ với 0$°<a<90°$
5. Cho biểu thức P = $\frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-12}{x-\sqrt{x}-6}-\frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$
6. Tìm ĐKXĐ và rút gọn P
7. Tìm GTNN của P

**Câu 2.** (3 điểm)

1. Chứng minh rằng biểu thức $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} $có giá trị là số vô tỷ.
2. Giải phương trình nghiệm nguyên: $y^{2}-(y+2)x^{2}=1$
3. Tìm các số tự nhiên n để $n^{5}+n^{4}+1$ là số nguyên tố

**Câu 3.** (4,5 điểm)

1. Giải các phương trình:
2. $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}$ = $\sqrt{x+9}$
3. $\sqrt{x^{2}+x+2}=\frac{3x^{2}+3x+2}{3x+1}$
4. Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$\sqrt{\frac{ab}{(a+2c)(b+2c)}}+\sqrt{\frac{bc}{(b+2a)(c+2a)}}+\sqrt{\frac{ca}{(c+2b)(a+2b)}}\geq 1$

**Câu 4.** (6 điểm)

Cho $∆ABC$ nhọn, có ba đường cao AD, BI, CK cắt nhau tại H. Gọi chân các đường vuông góc hạ từ D xuống AB, AC lần lượt tại E và F.

1. Chứng minh rằng: AE.AB = AF.AC
2. Giả sử HD = $\frac{1}{3}AD.$ Chứng minh rằng: tanB.tanC = 3
3. Gọi M, N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến BI và CK. Chứng minh rằng: 4 điểm E, M, N, F thẳng hàng.

**Câu 5.** (1,5 điểm)

Trên bảng đang có hai số 2 và 8. Thực hiện ghi thêm số lên bảng theo qui tắc sau: Mỗi lần viết lên bảng một số c = ab + a + b với hai số a và b đã có trên bảng. Hỏi với cách viết số như trên thì có thể viết được số $2022^{2023}$ lên bảng không? Tại sao?

**--- Hết ---**

**LỜI GIẢI**

**Câu 1.** (5 điểm)

1. Rút gọn các biểu thức sau:
2. A = $\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\sqrt{2-\sqrt{3}}$ = $\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^{2}}$

= $\left(\sqrt{3}+1\right)\left|\sqrt{3}-1\right|$ = $\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$ = 3 - 1 = 2

1. $B^{2}$ = $\left(\sqrt{2-\sqrt{2\sqrt{5}-2}}-\sqrt{2+\sqrt{2\sqrt{5}-2}}\right)^{2} =$ 4 - 2$\sqrt{4-2\sqrt{5}+2}$

$=$4 - 2 $\left(\sqrt{5}-1\right)$ = 6 - $2\sqrt{5}$ = $\left(\sqrt{5}-1\right)^{2}$

Vì B < 0 nên B = 1 - $\sqrt{5}$

1. C = sin$α$.cos$α + \frac{sin^{2}α}{1+cot α}+\frac{cos^{2}α}{1+tan α}$

= sin$α$.cos$α + \frac{sin^{2}α}{1+\frac{cosα}{sinα}}+\frac{cos^{2}α}{1+\frac{sinα}{cosα}}$

= sin$α$.cos$α + \frac{sin^{3}α}{sinα + cosα }+\frac{cos^{3}α}{ cosα + sinα }$

= sin$α$.cos$α + \frac{sin^{3}α}{sinα + cosα }+\frac{cos^{3}α}{ cosα + sinα }$

= sin$α$.cos$α +$ $\frac{\left(sinα + cosα\right)\left(sin^{2}α -sinα.cosα + cos^{2}α \right)}{sinα + cosα}$

= sin$α$.cos$α +$ 1 - sin$α$.cos$α $= 1

1. Cho biểu thức P = $\frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-12}{x-\sqrt{x}-6}-\frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$
2. ĐKXĐ: x $\geq 0, x\ne $9, ta có:

P = $\frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-12}{x-\sqrt{x}-6}-\frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ = $\frac{x(\sqrt{x}-3)+12(\sqrt{x}-3)}{\left(\sqrt{x}+2\right)(\sqrt{x}-3)}$ = $\frac{(\sqrt{x}-3)\left(x+12\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)(\sqrt{x}-3)}=\frac{x+12}{\sqrt{x}+2}$

1. ĐKXĐ: x $\geq 0, x\ne $9, ta có:

P = $\frac{x+12}{\sqrt{x}+2}$ = $\sqrt{x}$ -2 + $\frac{16}{\sqrt{x}+2}=\sqrt{x}$ + 2 + $\frac{16}{\sqrt{x}+2}$ - 4

Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số không âm $\sqrt{x}$ + 2 và $\frac{16}{\sqrt{x}+2}$ ta có:

P = $\sqrt{x}$ + 2 + $\frac{16}{\sqrt{x}+2}$ $\geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x} + 2\right)\frac{16}{\sqrt{x}+2}}=8$

Dấu đẳng thức xảy ra $⟺$ $\sqrt{x}+2$ = $\frac{16}{\sqrt{x}+2}$ $⟺$ $\left( \sqrt{x}+2\right)^{2}=4^{2}$ $⟺$ x = 4 (tm)

Vậy GTNN của P = 4 $⟺x=4$

**Câu 2.** (3 điểm)

1. Giả sử x = $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} $là số hữu tỷ.

Suy ra $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ = x - $\sqrt{5}$ => $x^{2}+5-2x\sqrt{5}$ = 5 + 2$\sqrt{6}$ => $\sqrt{6}$ + x$\sqrt{5}$ = $\frac{x^{2}}{2}$

=> 6 + 5$x^{2}+2x\sqrt{30}=\frac{x^{2}}{4}$ => $\sqrt{30}$ = $\frac{\frac{x^{2}}{4} - 6 - 5x^{2}}{2x}$ (hiển nhiên x $\ne 0)$

Do x là số hữu tỷ nên $\frac{\frac{x^{2}}{4} - 6 - 5x^{2}}{2x}$ là số hữu tỷ. Mà $\sqrt{30}$ là số vô tỷ (vô lý)

Suy ra $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ là số vô tỷ.

1. Ta có: $y^{2}-(y+2)x^{2}=1$ => (y - 2)($x^{2}$ - y + 2) = 3

Nên y + 2 và $x^{2}$ - y + 2 $\in U(3)$ = $\left\{\pm 1; \pm 3\right\}$

Giải ra ta có: (x,y) $\in \left\{\left(0;1\right);\left(0,-1\right)\right\}$

1. Ta có:

$n^{5}+n^{4}+1$ = $n^{5}-n^{2}+n^{4}-n+n^{2}+n+1$

= $n^{2}\left(n^{3}-1\right)+n\left(n^{3}-1\right)$ + $n^{2}$ + n + 1

= $\left(n^{3}-1\right)\left(n^{2}+n\right)+n^{2}$ + n + 1

= (n - 1)($n^{2}$ + n + 1)($n^{2}$ + n) + $n^{2}$ + n + 1

= ($n^{2}$ + n + 1)$\left(n^{3}-n\right)$ + $n^{2}$ + n + 1

= ($n^{2}$ + n + 1)$\left(n^{3}-n+1\right)$

Do $n^{5}+n^{4}+1$ là số nguyên tố

=> $\left[\begin{array}{c}n^{2} + n + 1=1\\n^{2} - n + 1=1\end{array}\right.$ $⟺\left[\begin{array}{c}n^{2} + n =0\\n^{2} - n=0\end{array}\right. ⟺\left[\begin{array}{c}n(n+1)=0\\n(n-1)=0\end{array}\right.$ $⟺\left[\begin{array}{c}n=0\\n=1\end{array}\right.$

(vì n là số nguyên)

Thử lại: n = 1 (tm). Vậy n = 1

**Câu 3.** (4,5 điểm)

1. Giải các phương trình:
2. ĐKXĐ: $\geq 0$

$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}\right)^{2}\leq $ $\left[\left(2\sqrt{2}\right)^{2}+x+1\right]\left[\frac{1}{x+1}+\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^{2}\right]=x+9$

Dấu bằng $⟺$ $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}$ = $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ $⟺x=\frac{1}{7}$ (tm ĐKXĐ)

Vậy PT có nghiệm là $x=\frac{1}{7}$

1. ĐKXĐ: x $\ne -\frac{1}{3}$

$Ta có: \sqrt{x^{2}+x+2}=\frac{3x^{2}+3x+2}{3x+1}$

$⟺ (3x+1)\sqrt{x^{2}+x+2}$ = $x^{2}+x+2$ + 2($x^{2}+x)$

Đặt: $\sqrt{x^{2}+x+2}$ = t (t $\geq \frac{\sqrt{3}}{2}$). Ta có phương trình:

$t^{2}-(3x+1)t+2(x^{2}+x)$ = 0 $⟺(t-2x)(t-x-1)=0⟺\left[\begin{array}{c}t=2x\\t=x+1\end{array}\right.$

 \* Với t = 2x => $\sqrt{x^{2}+x+2}$ = 2x $⟺\left\{\begin{array}{c}x\geq 0\\x=1;x=-\frac{2}{3}\end{array}\right.=>x=1(TM)$

\* Với t = x + 1 => $\sqrt{x^{2}+x+2}$ = x + 1 $⟺\left\{\begin{array}{c}x\geq -1\\x=1\end{array}\right.=>x=1 (TM)$

Vậy PT có nghiệm duy nhất x = 1

1. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$\sqrt{\frac{ab}{(a+2c)(b+2c)}}$ = $\frac{2ab}{2\sqrt{(ab+2bc)(ab+2ac)}} \geq \frac{2ab}{(ab+2bc)(ab+2ac)}$ = $\frac{ab}{ab+bc+ca}$

Chứng minh tương tự: $\sqrt{\frac{bc}{(b+2a)(c+2a)}}$ $\geq $ $\frac{bc}{bc+ca+ab};$

$\sqrt{\frac{ca}{(c+2b)(a+2b)}}\geq $ $\frac{ca}{ca+ab+bc}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có:

$\sqrt{\frac{ab}{(a+2c)(b+2c)}}+\sqrt{\frac{bc}{(b+2a)(c+2a)}}+\sqrt{\frac{ca}{(c+2b)(a+2b)}}$ $\geq \frac{ab+ba+ca}{ab+bc+ca}=1$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c

**Câu 4.** (6 điểm)



1. Chứng minh được: AE.AB = $AD^{2}$

Chứng minh được: AF.AC = $AD^{2}$

Suy ra: AE.AB = AF.AC

1. Biểu thị được: tanB = $\frac{AD}{BD}; tanC=\frac{AD}{CD}$; tanB.tanC = $\frac{AD^{2}}{BD.CD}$

Biểu thị được: tanB = tanDHC = $\frac{CD}{HD};$ tanC = tanDHB = $\frac{BD}{HD};$ tanB.tanC = $\frac{BD.CD}{HD^{2}}$

Suy ra: $\left(tanB.tanC\right)^{2}=$ $\left(tanB.tanC\right)^{2}$ = $\frac{AD^{2}}{HD^{2}}$ => tanB.tanC = $\frac{AD}{HD}=3$

1. CM được: $\frac{AE.AB}{AK.AB }=\frac{AF.AC}{AI.AC}=> EF∥ $IK

CM được: $\frac{BM}{MI}=\frac{BD}{DC}=\frac{BE}{EK}=>ME∥ $IK => M $\in EF$

Tương tự CM được N $\in EF$ và suy ra 4 điểm E, M, N, F thẳng hàng

**Câu 5.** (1,5 điểm)

Ta sẽ CM nếu hai số tự nhiên a, b chia 3 đều dư 2 thì c = ab + a + b chia 3 cũng dư 2

Đặt a = 3k + 2; b = 3n + 2 (m, n $\in N)$

c = ab + a + b =(3m + 2)(3n + 2) + 3m + 2 + 3n + 2

= 3(3mn + 3m + 3n + 2) + 2

Suy ra c chia cho 3 dư 2

Trên bảng đang có 2 số 2 và 8 chia cho 3 đều dư 2, nên theo quy tắc viết trên thì trên bảng toàn là các số chia cho 3 dư 2

Mà số $2022^{2023}$ chia hết cho 3 nên không thể viết $2022^{2023}$ lên bảng.