**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN THỌ XUÂN**

**ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH**

**NĂM HỌC 2020-2021. MÔN : TOÁN**

**Thời gian làm bài 150 phút**

**Câu 1. (4,0 điểm)**

1. Rút gọn biểu thức 

(với )

1. Tìm tất cả các giá trị của sao cho biểu thức có giá trị nguyên

**Câu 2. (4,0 điểm)**

1. Giải phương trình 
2. Giải hệ phương trình 

**Câu 3. (4,0 điểm)**

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn 
2. Chứng minh rằng nếu là số nguyên tố thì không phải là số chính phương

**Câu 4. (6,0 điểm)** Cho đường tròn và điểm cố định ở bên ngoài đường tròn. Từ kẻ các tiếp tuyến và cát tuyến đến đường tròn với là các tiếp điểm. thuộc đường tròn sao cho . Gọi là trung điểm của 

1. Chứng minh bốn điểm cùng nằm trên một đường tròn
2. Gọi là giao điểm của Chứng minh là tiếp tuyến của đường tròn 
3. Gọi T là điểm thay đổi trên cung nhỏ của đường tròn (O). Tiếp tuyến qua của đường tròn lần lượt cắt tại các điểm Chứng minh chu vi tam giác không đổi. Xác định vị trí của điểm trên cung nhỏ sao cho tam giác có diện tích lớn nhất

**Câu 5. (2,0 điểm)** Cho các số là các số thực không âm thỏa mãn .

Chứng minh rằng 

**ĐÁP ÁN**

**Câu 1.**

1. Rút gọn biểu thức



1. **Tìm tất cả các giá trị của xsao cho biểu thức có giá trị nguyên**

Với 

Ta có :

Lại có 

Từ (1) và (2), ta có: , Mà 



Vậy thì A nhận giá trị nguyên

**Câu 2.**

1. **Giải phương trình : **

ĐKXĐ: 



Ta thấy không phải là nghiệm của PT, chia cả 2 vế của PT cho ta có :



Đặt thay vào phương trình (\*) ta có :



Với 

Với 

Kết hợp ĐKXĐ suy ra tập nghiệm của PT là 

1. **Giải hệ phương trình :** 

Điều kiện : Xét phương trình (1) ta có :



Thay vào phương trình ta có :



Mặt khác 



Vậy hệ phương trình có nghiệm 

**Câu 3.**

1. Ta có : 





Vì nên 

1. Giả sử là số chính phương, đặt 

Ta có 



Trong hai số và có một số chia hết cho số nguyên tố 

Mặt khác, 

Do đó, 

Cả hai số và đều nhỏ hơn 

Vậy không phải là số chính phương

**Câu 4.**

****

1. **Chứng minh bốn điểm cùng nằm trên một đường tròn**

Xét tứ giác có :

(vì là tiếp tuyến của đường tròn tâm O)

(vì là tiếp tuyến của đường tròn tâm O)



Tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính 

Vì là trung điểm của đoạn thẳng nên 

Xét vuông tại E nên nội tiếp đường tròn đường kính 

Từ (1) và (2) suy ra điểm cùng nằm trên đường tròn đường kính . Vậy bốn điểm cùng nằm trên một đường tròn

1. **Gọi là giao điểm của Chứng minh là tiếp tuyến của đường tròn **

Gọi 

Ta có (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau), 

Suy ra là đường trung trực của đoạn thẳng vuông góc AB tại H

Xét tam giác vuông tại A có đường cao ta có : 

Ta chứng minh được 

Suy ra Khi đó 

Tứ giác nội tiếp đường tròn

(hai góc nôi tiếp cùng chắn cung , mà 

hay 

hay 

Xét và có: (hai góc đối đỉnh)



hay 

Từ (3), (4) suy ra tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính mà tứ giác nội tiếp đường tròn (cmt)

Suy ra 5 điểm cùng nằm trên đường tròn đường kính 

hay 

là tiếp tuyến của đường tròn 

1. **Gọi T là điểm thay đổi trên cung nhỏ của đường tròn (O). Tiếp tuyến qua của đường tròn (O) lần lượt cắt tại các điểm Chứng minh chu vi tam giác không đổi. Xác định vị trí của điểm trên cung nhỏ sao cho tam giác có diện tích lớn nhất**

Do là tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại T nên 



Mà điểm và M cố định nên không đổi. Do đó không đổi (đpcm)

Qua O kẻ đường thẳng song song cắt tại cắt tại . Ta có :

Từ đó suy ra 

hay (không đổi). Ta có :



Mà (chứng minh trên)



Áp dụng bất đẳng thức ta có:

.

Dấu xảy ra 

**Câu 5.**

Cộng thêm hai vế của cho ta được: 



, do vậy ta có:
Ta sẽ đi chứng minh mệnh đề sau:

Thật vậy, theo bđt Cô si ta có:

Như vậy, mệnh đề được chứng minh

Tương tự ta thu được : và 

Cộng lại ta có :

