

A . ĐẶT VẤN ĐỀ

I. LỜI MỞ ĐẦU

Khi giải một bài toán vấn đề khó khăn nhất là giải thích được tại sao lại xuất hiện những yếu tố không có sẵn trong quá trình giải toán để đi đến lời giải.

Phải có một quá trình suy luận logic nào đó để dẫn tới sự xuất hiện của yếu tố đó trong khi giải toán. Khi giải được bài toán rồi lại phải tìm lời giải tối ưu nhất. Quá trình xuất hiện lời giải và xuất hiện lời giải tối ưu để lại nhiều kinh nghiệm quý, nếu GV biết khai thác một cách hợp lý để dạy cho học sinh quá trình tư duy ấy thì chắc chắn việc học của học sinh sẽ mang tính chủ động, sáng tạo hơn.

Xu hướng ra đề thi Đại học hiện nay chú trọng nhiều đến tính sáng tạo của học sinh, vì vậy trong đề thi không có nhiều bài toán mà rõ ràng về mặt đường lối giải toán. Thực tiễn đó yêu cầu học sinh phải được trang bị đầy đủ kiến thức, đặc biệt là khả năng suy luận logic tìm kiếm lời giải

II. THỰC TRẠNG CỦA VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

1. Thực trạng

Đứng trước một bài toán học sinh thường lúng túng và đặt ra câu hỏi: “ Phải định hướng tìm lời giải bài toán từ đâu ?”. Một số học sinh có thói quen không tốt là khi đọc đề chưa kỹ đã vội làm ngay, có khi sự thử nghiệm đó sẽ dẫn tới kết quả, tuy nhiên hiệu suất giải toán như thế là không cao. Với tình hình ấy để giúp học sinh định hướng tốt hơn trong quá trình giải toán, người giáo viên cần tạo cho học sinh thói quen xem xét bài toán dưới nhiều góc độ, khai thác các yếu tố đặc trưng của bài toán để tìm lời giải. Trong đó việc hình thành cho học sinh khả năng tư duy theo suy luận logic là một điều cần thiết. Việc trải nghiệm qua quá trình giải thích tính logic trong suy luận giải toán sẽ giúp học sinh hoàn thiện kỹ năng định hướng và giải toán.

Cần nhấn mạnh một điều rằng, đa số các học sinh sau khi giải xong một bài toán thường dừng lại mà không suy nghĩ, đào sâu thêm. Bởi đơn giản các em nghĩ rằng tìm được lời giải bài toán là xong mà chưa suy nghĩ tại sao lại xuất hiện lời giải ấy. Các yếu tố nào của giả thiết bài toán gợi ý cho ta hướng suy luận ấy?, “Còn lời giải nào khác cho bài toán?”... Chính việc trả lời các câu hỏi ấy sẽ giúp học sinh nắm được bản chất của bài toán và lựa chọn cho mình lời giải bài toán ngắn gọn và sáng tạo nhất.

2. Kết quả, hiệu quả của thực trạng trên

Với thực trạng đã chỉ ra, thông thường học sinh sẽ dễ dàng cho lời giải đối với các bài toán có cấu trúc tương tự các bài toán đã gặp hoặc các bài toán đã có định hướng sẵn về đường lối giải toán. Còn khi đưa ra bài toán khác một chút cấu trúc thông thường ấy học sinh thường tỏ ra rất lúng túng và không biết định hướng tìm lời giải bài toán. Từ đó, hiệu quả giải toán của học sinh bị hạn chế rất nhiều.

Trước thực trạng đó của học sinh, tôi thấy cần thiết phải hình thành cho học sinh một thói quen xem xét bài toán cũng như nội dung kiến thức. Và vì vậy song song với việc tìm ra lời giải cho bài toán, tôi luôn yêu cầu học sinh tìm tòi nhiều lời giải cho một bài toán, tổng quát hoá bài toán? cũng như *giải thích quá trình suy luận logic để đi đến lời giải ấy*.

Trong sáng kiến kinh nghiệm này tôi sẽ chỉ ra một trong nhiều nội dung được áp dụng có hiệu quả (Cụ thể là phần BĐT và hình học toạ độ trong mặt phẳng - những vấn đề sáng tạo trong các đề thi Đại học những năm gần đây). Việc đưa nội dung này nhằm khai thác các yếu tố đặc biệt của cấu trúc bài toán để định hướng tìm lời giải bài toán. Qua đó giúp học sinh nhận thức được rằng: “Giữa nội dung và hình thức của bài toán có mối quan hệ biện chứng”. Nhận dạng hình thức của bài toán để từ đó định hướng tìm kiếm lời giải cho bài toán. Ở đây, yêu cầu học sinh dựa vào cấu trúc của bài toán để đưa ra các suy luận có lí, từ đó đoán nhận lời giải sao cho nhanh nhất. Nếu nhận thức được mối quan hệ biện chứng giữa hình thức và nội dung bài toán thì học sinh sẽ cho những lời giải “đặc biệt” đối với các bài toán có các yếu tố “đặc biệt”.

B GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

I CÁC GIẢI PHÁP THỰC HIỆN

1. Tổ chức cho học sinh hình thành kỹ năng suy luận logic trong quá trình tìm lời giải cho bài toán thông qua một (hay nhiều) buổi học có sự hướng dẫn của giáo viên

2. Tổ chức rèn luyện khả năng định hướng giải toán của học sinh. Trong đó yêu cầu khả năng lựa chọn lời giải tối ưu và lời giải phổ dụng.

3. Tổ chức kiểm tra để thu thập thông tin về khả năng nắm vững kiến thức của học sinh.

4. Trong mỗi bài học SGK, mỗi nội dung, mỗi bài toán đều yêu cầu học sinh khai thác mở rộng, giải thích suy luận logic cho quá trình giải toán.

5. Cung cấp hệ thống các bài tập mở rộng để học sinh tự rèn luyện.

II. CÁC BIỆN PHÁP TỔ CHỨC THỰC HIỆN

Nội dung này được triển khai thông qua 3 buổi học (mỗi buổi học 3 tiết):

- Buổi học thứ nhất: Tổ chức thực hiện hình thành kỹ năng giải toán.
- Buổi học thứ hai: Tổ chức cho học sinh rèn luyện kỹ năng giải toán.
- Buổi học thứ ba: Tổ chức kiểm tra để lấy kết quả nội dung triển khai và kỹ năng mà học sinh đạt được.

B.1: Buổi học thứ nhất

Giáo viên nêu vấn đề và định hướng cách suy nghĩ giải toán, giáo viên hướng dẫn làm các ví dụ mẫu 1, 2. Qua đó, bằng nhiều cách giải khác nhau, giáo viên phân tích lợi ích của việc “suy nghĩ có định hướng” cũng như phân tích cho học sinh thấy rằng việc lựa chọn phương pháp giải không phải là ngẫu nhiên mà luôn chứa đựng những nguyên nhân sâu xa rất bản chất. Đó chính là cấu trúc của bài toán, hình thức của bài toán và các mối quan hệ “tất yếu” giữa các yếu tố tạo nên bài toán. Cũng chính vì điều đó mà việc thực hiện nhiều lời giải khác nhau cho một bài toán một mặt cho học sinh thấy được sự đa dạng của lời giải, mặt khác giúp học sinh có định hướng trong việc tìm lời giải “tối ưu”. Tuy nhiên chúng ta cũng cần nhìn nhận được rằng đôi khi lời giải “phổ dụng” mới là thích hợp hơn trong các kì thi với thời gian hạn chế. Vì vậy việc chỉ ra “lời giải tối ưu” là rất tốt nhưng việc hoàn thành lời giải trong thời gian suy nghĩ hạn chế là quan trọng hơn trong các kì thi

Để buổi học này đạt hiệu quả, tôi đã cung cấp cho học sinh một hệ thống các bài tập để học sinh chuẩn bị. Yêu cầu học sinh về nhà chuẩn bị lời giải với gợi ý “cách giải nào tối ưu, cách giải nào phổ dụng, cơ sở logic của các suy luận ấy”.

Sau đây là sơ lược của buổi học về nội dung này

*Giáo viên: Việc tìm ra lời giải cho bài toán là mục đích của việc giải toán. Tuy nhiên việc giải thích cơ sở logic để đi đến lời giải ấy mới thể hiện bản chất của quá trình giải toán. Buổi học hôm nay sẽ hướng dẫn các em giải quyết bài toán theo bản chất logic của quá trình suy luận

Vấn đề 1: Cơ sở logic của quá trình suy luận đi đến lời giải tối ưu

* HOẠT ĐỘNG 1:

Bài toán 1: “Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(m;n), m > 0, n > 0$ và cắt các trục toạ độ theo đoạn thẳng có độ dài ngắn nhất”

Bằng một số thao tác cơ bản ta chuyển bài toán về dạng sau:

Bài toán 1.1: “Cho $m, n > 0$ và a, b thay đổi thoả mãn: $\frac{m}{a} + \frac{n}{b} = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = a^2 + b^2$ ”

Suy nghĩ đầu tiên là tìm kiếm dấu bằng xảy ra để có thể đánh giá BĐT, từ đó đánh giá cho F . Tuy nhiên việc chỉ ra dấu bằng thật không đơn giản.

Nhận thấy bài toán có thể đưa về khảo sát một biến, do đó **suy nghĩ tiếp theo** là sử dụng khảo sát hàm số. Và ta có lời giải sơ lược sau:

Lời giải 1:

Giả thiết ta có: $\frac{m}{a} + \frac{n}{b} = 1 \Rightarrow b = \frac{an}{a-m}$ (1)

Khi đó: $F = a^2 + \left(\frac{an}{a-m}\right)^2$ có $F' = 2a + \left(\frac{an}{a-m}\right)^2 = \frac{2a[(a-m)^3 - mn^2]}{(a-m)^3}$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	-	0	m	+
F'	-	0	+	-
F	+		+	

Căn cứ bảng biến thiên ta có nhận xét:

Nếu bài toán yêu cầu là cắt trục toạ độ thì đoạn thẳng có độ dài dần về 0 (Bằng 0 khi đường thẳng đi qua O) và bài toán không có ý nghĩa toán học

Nếu bài toán yêu cầu là cắt các tia Ox, Oy không trùng O thì đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất là $F_0 = (\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2})^3$ khi $a = m + \sqrt[3]{mn^2}$; $b = n + \sqrt[3]{m^2n}$

Bài toán 1 được sửa lại cho hợp lí như sau:

Bài toán 2: “Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(m;n), m > 0, n > 0$ và cắt các tia Ox, Oy (không trùng O) theo đoạn thẳng có độ dài ngắn nhất”

Bài toán 2.1: “Cho $m, n > 0$ và $a, b > 0$ thay đổi thoả mãn: $\frac{m}{a} + \frac{n}{b} = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = a^2 + b^2$ ”

Nhận thấy dấu bằng xảy ra khi $a = m + \sqrt[3]{mn^2}$; $b = n + \sqrt[3]{m^2n}$ là khá phức tạp khi đánh giá bằng BĐT. Do đó ta định hướng đổi biến để dấu bằng xảy ra tại các giá trị đơn giản hơn. Vì vậy **suy nghĩ tiếp theo** sẽ là đổi biến cho bài toán.

Có nhiều thao tác đổi biến, ở đây sẽ đổi biến làm đơn giản hoá giả thiết để tập trung giải BĐT cho F.

$$\text{Đặt: } u = \frac{m}{a} \Leftrightarrow a = \frac{m}{u}; \quad v = \frac{n}{b} \Leftrightarrow b = \frac{n}{v}$$

Bài toán trở thành:

Bài toán 2.2: “Cho $m, n > 0$ và $u, v > 0$ thay đổi thoả mãn $u + v = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = \left(\frac{m}{u}\right)^2 + \left(\frac{n}{v}\right)^2$ ”

Lúc này dấu bằng đạt được khi: $u = \frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2}}$; $v = \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2}}$. Và để hữu tỉ hoá dấu bằng ta tiếp tục đổi biến: $x^3 = m^2$; $y^3 = n^2$. Ta chuyển bài toán về dạng sau:

Bài toán 2.3: “Cho $x, y > 0$ và $u, v > 0$ thay đổi thoả mãn $u + v = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = \frac{x^3}{u^2} + \frac{y^3}{v^2}$ ”

Lời giải 2:

Lúc này dấu bằng đạt được khi: $u = \frac{x}{x+y}$; $v = \frac{y}{x+y}$. Bằng cách chọn điểm rơi trong BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{x^3}{u^2} + u(x+y)^3 + u(x+y)^3 \geq 3x(x+y)^2 \quad \forall x, y > 0. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow u = \frac{x}{x+y}$$

.

$$\frac{y^3}{v^2} + v(x+y)^3 + v(x+y)^3 \geq 3y(x+y)^2 \quad \forall x, y > 0. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow v = \frac{y}{x+y}$$

Vậy: $F \geq (x+y)^3 \quad \forall x, y > 0$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow u = \frac{x}{x+y}, v = \frac{y}{x+y}$

Bây giờ ta sẽ trình bày ***lời giải tối ưu*** cho bài toán 2 sau một quá trình suy luận như sau :

Lời giải 3

Ta có:

$$a^2 + \frac{m}{a}(\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2})^3 + \frac{m}{a}(\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2})^3 \geq 3\sqrt[3]{m^2}(\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2}) \quad \forall m, n, a > 0$$

Dấu bằng xảy ra $a = m + \sqrt[3]{mn^2}$.

$$b^2 + \frac{m}{b}(\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2})^3 + \frac{m}{b}(\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2})^3 \geq 3\sqrt[3]{m^2}(\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2}) \quad \forall m, n, a > 0$$

Dấu bằng xảy ra $b = n + \sqrt[3]{m^2n}$.

Vậy : $F_0 = (\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2})^3 \quad \forall m, n, a, b > 0$. Dấu bằng xảy ra $a = m + \sqrt[3]{mn^2}; b = n + \sqrt[3]{m^2n}$

Nếu trình bày lời giải 3 cho HS thì chắc chắn câu hỏi mà GV phải trả lời là: “Tại sao nghĩ ra được cách tách khó như thế”. Rõ ràng lời giải tối ưu này phải trải qua quá trình suy luận như trên.

Việc HS đã được tập dượt quá trình suy luận như trên nên lời giải tối ưu được học sinh tiếp nhận có bản chất và suy luận logic

*** HOẠT ĐỘNG 2:**

Bài toán 3: (Câu V- Đề thi HSG tỉnh năm học 2010 - 2011)

“ Cho các số thực a, b, c thoả mãn
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 6 \\ ab + bc + ca = -3 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = a^6 + b^6 + c^6$ ”.

*Nhìn vào bài toán ta thấy giả thiết là hai biểu thức đối xứng của a, b, c và biểu thức P cũng là biểu thức đối xứng của a, b, c . Do đó **suy nghĩ đầu tiên** là đưa về sử dụng định lý Viet cho phương trình bậc ba*

Lời giải 1

Ta có:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 6 + 2(-3) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$$

$$9 = (ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 2abc(a + b + c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$P = a^6 + b^6 + c^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 + (c^2)^3$$

$$P = (a^2 + b^2 + c^2) \left[(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \right] + 3a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2c^2 = \frac{P}{3} - 18$$

Để đơn giản bài toán ta thực hiện đổi biến:

$$\text{Đặt : } x = a^2; y = b^2; z = c^2; m = 54 - \frac{P}{3} \Rightarrow 0 \leq x, y, z \leq 4$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 9 \\ xyz = m \end{cases}$$

Theo định lý Viet cho phương trình bậc 3 ta có: x, y, z là các nghiệm của phương trình:

$$t^3 - 6t^2 + 9t - m = 0 \quad (1)$$

$$\text{Pt(1) có nghiệm } t \in [0; 4] \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4 \Leftrightarrow 54 \leq P \leq 66$$

Giá trị lớn nhất của P là 66, xảy ra khi và chỉ khi a, b, c là hoán vị bộ ba số $\{1; 1; -2\}; \{-1; -1; 2\}$

Đến đây việc đưa ra lời giải như đáp án là hoàn toàn có logic và HS nhận thấy đó là cách tối ưu hoá cho lời giải bài toán

Lời giải 2 (Đáp án)

Ta có:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 6 + 2(-3) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$$

a, b, c là ba nghiệm của pt: $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x - abc = 0 \quad (*)$$

Pt(*) có 3 nghiệm khi và chỉ khi: $-2 \leq abc \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq (abc)^2 \leq 4$

$$\text{Vậy: } P = a^6 + b^6 + c^6 = 54 + 3a^2b^2c^2 \leq 66$$

Giá trị lớn nhất của P là 66, xảy ra khi và chỉ khi a, b, c là hoán vị bộ ba số $\{1; 1; -2\}; \{-1; -1; 2\}$

*Tuy nhiên vấn đề đặt ra là trong chương trình phổ thông HS không học định lý Viet cho phương trình bậc 3, nên việc vận dụng trong kì thi đại học là không hợp lý. Vậy có một **lời giải phổ dụng** nào cho bài toán không?. Việc xem giá*

thiết là đối xứng với a, b và xem c là tham số thì biểu thức P có thể quy về một biến của c . Đó chính là định hướng cho lời giải 3

Lời giải 3

Ta thực hiện đổi biến như lời giải 1, ta có:

$$\text{Giả thiết: } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 - z \\ xy = 9 - 6z + z^2 \end{cases}$$

$$\text{Tồn tại } x, y \Leftrightarrow (6 - z)^2 \geq 4(9 - 6z + z^2) \Leftrightarrow 0 \leq z \leq 4$$

$$\text{Biểu thức: } P = x^3 + y^3 + z^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3$$

$$P = (6 - z)^3 - 3(9 - 6z + z^2)(6 - z) + z^3$$

Hàm số: $P = z^3 - 6z^2 + 9z$ trên $[0; 4]$ có giá trị lớn nhất là 66, xảy ra khi và chỉ khi $z = 1; z = 4$

Giá trị lớn nhất của P là 66, xảy ra khi và chỉ khi a, b, c là hoán vị bộ ba số $\{1; 1; -2\}; \{-1; -1; 2\}$

Vấn đề 2: Lựa chọn hướng suy luận trong quá trình làm bài thi

*Giáo viên phát tài liệu (có cả các đáp án) cho HS chuẩn bị trước, yêu cầu học sinh chỉ ra lời giải tối ưu và lời giải phổ dụng. Từ đó trả lời câu hỏi: "Nếu đi thi em sẽ suy luận và làm theo cách giải nào?"

*** HOẠT ĐỘNG 3:**

Bài toán 4: (Câu V- ĐH – A.2009)

“Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn $x(x + y + z) = 3yz$, ta có: $(x + y)^3 + (x + z)^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z) \leq 5(y + z)^3$ ” (1)

1. Nhận xét chung về bài toán:

- BĐT không đối xứng theo các biến và chứa các biểu thức $x+y, y+z, z+x$ nên HS cảm giác “phức tạp” và “ngại biến đổi”. Tuy nhiên, nếu để ý BĐT này không khó vì đã có đường lối giải toán rất rõ ràng, đó là sử dụng “**đổi biến tam giác**”, “**đổi biến đối xứng**” hoặc “**đổi biến phần dư**”

- Với bài toán này có thể tìm kiếm lời giải theo 3 hướng chính sau:

H1. Biến đổi, kết hợp sử dụng BCS, AM-GM

H2. Đổi biến, kết hợp đánh giá

H3. Sử dụng công cụ toán học hiện đại

Mặc dù BĐT không đối xứng theo các biến, tuy nhiên lại đối xứng theo y và z. Do đó đối với **H2** ta chú ý tới đại lượng đối xứng sau:
 $x+y, x+z, y+z; yz; \frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}; x+y, x+z; \frac{x}{y}, \frac{x}{z}; \frac{x+y}{y+z}, \frac{x+z}{y+z}; \dots$

2. Lời giải sơ lược cho bài toán:

Đặt $a=x+y, b=y+z, c=z+x$, bài toán trở thành:

“ Cho tam giác ABC thỏa $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + 3abc \leq 5c^3$ ”
 (2)

Lời giải sau đây chỉ mang tính định hướng, cần phải giải thích rõ hơn nếu làm bài thi

Cách1(H2- ĐABGD)

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab \geq \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow a+b \leq 2c$$

$$(2) \Leftrightarrow (a+b)c + 3ab \leq 5c^2 : \text{BĐT này đúng do } (a+b)c \leq 2c^2, 3ab \leq \frac{3(a+b)^2}{4} \leq 3c^2$$

Cách2(H1)

$$VT(1) \leq 8x^3 + 4(y^3 + z^3) + 3(x+y)(x+z)(y+z) = 8x^3 + 4(y+z)^3 \leq VP(1) \text{ (Giải thích ?)}$$

Cách3(H2)

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ. (2) \Leftrightarrow \sin^3 A + \sin^3 B + \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin A \sin B \leq \frac{15\sqrt{3}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4} \left[\cos \frac{A-B}{2} + \cos(A+B) \right] \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} : \text{Luôn đúng}$$

Cách4(H3)

Đặt $x+y+z=3t, t \geq 0$, chọn m, n, p sao cho $x=mt, y=nt, z=pt \Rightarrow m+n+p=3$.

Giả thiết trở thành: $m = np$

$$(1) \Leftrightarrow (m+n)^3 + (m+p)^3 + 3(m+n)(m+p)(n+p) \leq 5(n+p)^3$$

$$\Leftrightarrow (m+3)^3 - 24m^2 \leq 5(3-m)^3 : \text{BĐT đúng do } m=np \leq \frac{(n+p)^2}{4} = \frac{(3-m)^2}{4} \Rightarrow 0 \leq m \leq 1$$

Cách5(H1)

$$gt \Rightarrow (x+y)(x+z) = 4yz \Rightarrow 3(x+y)(x+z)(y+z) = 12yz(y+z) \leq 3(y+z)^3$$

$$gt \Rightarrow x \leq \sqrt{yz} \Rightarrow (x+y)^3 + (x+z)^3 = (x+y)(x+z)(2x+y+z) + (y-z)^2(2x+y+z) \leq$$

$$\leq (y+z)^2(\sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \leq 2(y+z)^3. \text{ Kết hợp có ĐPCM}$$

Cách6(H2)

Đặt $t=y+z$, ta có $t=y+z \geq 2x$

$$(1) \Leftrightarrow (2x+t)^3 - 6x(x+y)(x+z) \leq 5t^3 \Leftrightarrow 2t(2x^2 + 3xt - 2t^2) \leq 0 : \text{ luôn đúng với } 0 \leq x \leq \frac{t}{2}$$

Cách7(H1)

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2(y+z) + 3x(y^2 + z^2 + yz) \leq 2(y+z)^3 \quad (*)$$

$$gt \Rightarrow y+z \geq 2x \Rightarrow VT(*) \leq \frac{13}{8}(y+z)^3 + \frac{3}{2}yz(y+z) \leq VP(*)$$

Cách8(H2)

$$\text{Đặt } u = \frac{x+y}{y+z}, v = \frac{x+z}{y+z} \Rightarrow uv+1=u^2+v^2 \Rightarrow u^3+v^3=u+v. \text{ Khi đó (1) trở thành:}$$

$$u+v+3uv \leq 5. \text{ BĐT đúng do cm được } u+v \leq 2$$

Cách9(H2)

$$\text{Đặt } u = \frac{y}{x}, v = \frac{z}{x}. \text{ Giả thiết } \Rightarrow u+v+1=3uv \Rightarrow u+v \geq 2$$

$$(1) \Leftrightarrow (2+u+v)^3 - 6(1+u)(1+v) - 5(u+v)^3 \leq 0 \Leftrightarrow g(u+v) \geq 0,$$

$$g(u+v) = 4(u+v)^3 - 6(u+v)^2 - 4(u+v). \text{ Biến đổi } g(u+v) \text{ thành tích ta có đpcm}$$

Cách10(H3)

$$\text{Chuẩn hoá } x+y+z=1 \Rightarrow y+z=1-x, yz = \frac{x}{3}.$$

$$VT(1) - VP(1) = 6x^3 - \frac{52}{3}x^2 + \frac{62}{3}x - 4 = F(x) \leq F\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

Cách11(H3)

$$\text{Chuẩn hoá } x+y+z=1, \text{ Đặt } A=VT(1) - VP(1), B = \frac{(y+z)^3 + 3(1-x)(y+z)^2}{4} - 5(1-x)^3$$

(Vì ? chọn B?!)

$$A \leq B = -36t^3 - 12t^2 + 2 = g(t) \leq g\left(\frac{1}{3}\right) = 0, t = \frac{1-x}{2} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

Cách12(H3- Dựa theo cách giải BT6 thi HSG Quốc Gia, VN'08)

$$gt \Rightarrow 2x \leq y+z \Rightarrow x \text{ không là số lớn nhất}$$

Do tính đối xứng của y và z nên có thể giả sử $z \leq x \leq y$ (giải thích tại sao?)

$$\text{Đặt } y=x+a, x=z+b, a, b \geq 0. \text{ Gt} \Rightarrow 2x(a-b) = 3ab$$

$$a > b, (1) \Leftrightarrow (2x+a)^3 + (2x-b)^3 + 3(2x+a)(2x-b)(2x+a-b) \leq 5(2x+a-b)^3$$

$$\Leftrightarrow (2x+t)^3 - 6x(4x^2 + 2ab) - 5t^3 \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0, g(x) = 8x^3 - 6tx^2 - 3t^2x + 12abx + 2t^3, 0 \leq x \leq \frac{t}{2}$$

Cách13 (H2)

$$\text{Đặt } u = \frac{y}{x}, v = \frac{z}{x}. \text{ Giả thiết } \Rightarrow u+v+1=3uv \Rightarrow uv \geq 1$$

$(1) \Leftrightarrow (2+u+v)^3 - 6(1+u)(1+v) - 5(u+v)^3 \leq 0 \Leftrightarrow (1+3uv)^3 - 24uv \leq 5(3uv-1)^3$: Đúng do $uv \geq 1$

Cách14(H2)

Đặt $2^t = y + z$, ta có $2^t = y + z \geq 2x \Rightarrow t \geq x$. $(1) \Leftrightarrow 4t(x-t)(x+4t) \leq 0$: luôn đúng với $0 \leq x \leq t$

Cách15 (H123- Đây là một mở rộng mạnh hơn cho bài toán)

Đề: “Cmr với mọi tam giác ABC, ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 9abc \leq 2[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)]”$$

Hãy chứng minh BĐT trên, sau đó áp dụng để chứng minh bài toán.

Cách16(H3 - Xem xét cách cm sau đúng hay sai?Giải thích kết luận?)

Chuẩn hoá $a+b+c=1$ (Giải thích ?????)

Đặt $A = a^3 + b^3 + 3abc - 5c^3$, $B = \frac{(a+b)^3 + 3c(a+b)^2}{4} - 5c^3$ (Giải thích tại sao chọn B như thế ?!)

Ta có:

$$A \leq B = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + 3(1-a-b)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 5(1-a-b)^3 = 2t^3 + 3(1-2t)t^2 - 5(1-2t)^3 = g(t)$$

Hàm $g(t)$ trên $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$ có $g(t) \leq g\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ nên $A \leq B = g(t) = 0$

Với bài toán 4 sau khi phát tài liệu như trên cho HS, trong buổi học này GV lấy ý kiến và cùng HS giải thích các suy luận logic trong mỗi cách giải

Vấn đề 3: So sánh "lời giải tối ưu" và "lời giải phổ dụng"

Lời giải tối ưu được hiểu đơn giản là: Lời giải sắc sảo cả về mặt suy luận lẫn trình bày lời giải, khai thác tối ưu được mọi góc cạnh của bài toán.

Lời giải phổ dụng được hiểu đơn giản là: Lời giải có hướng suy luận quen thuộc theo suy nghĩ của đa số học sinh khi giải toán. Lời giải ấy mang nét suy luận thuần túy và đôi khi chấp nhận quá trình trình bày dài.

Vì vậy việc lựa chọn lời giải nào là phụ thuộc vào năng lực của HS và tình huống toán học mà HS gặp phải. (Nếu là bài tập trong quá trình học thì cần khuyến khích tìm lời giải tối ưu, nhưng nếu là trong kì thi thì phải tùy thuộc vào hoàn cảnh, tốt nhất là suy nghĩ theo hướng tìm lời giải phổ dụng)

* HOẠT ĐỘNG 4:

Bài toán 5: (Câu IV.2- Đề thi HSG tỉnh năm học 2010 - 2011)

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: x - y + 5 = 0$ và hai elíp $(E_1): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $(E_2): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) có cùng tiêu điểm. Biết rằng (E_2) đi qua điểm M thuộc đường thẳng Δ . Tìm toạ độ điểm M sao cho (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất

Lời giải 1 (HS giải theo suy nghĩ thông thường)

(E_2) có cùng tiêu điểm với (E_1) nên: $a^2 = b^2 + 9$

Toạ độ điểm M là nghiệm hệ pt:
$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 5 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{(x+5)^2}{a^2 - 9} = 1 \end{cases}$$

Đặt $m = a^2$. Đk: $m > 9$, ta có pt:

$$\frac{x^2}{m} + \frac{(x+5)^2}{m-9} = 1 \Leftrightarrow (2m-9)x^2 + 10mx - m^2 + 34m = 0 \quad (1)$$

Pt(1) có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq 17 \Leftrightarrow a^2 \geq 17 \Leftrightarrow a \geq \sqrt{17}, \forall a > 0$

Vậy: Elíp (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất là $a = \sqrt{17}$, khi $M(-\frac{17}{5}; \frac{8}{5})$

Lời giải 2 (Đáp án)

Tiêu điểm của hai elíp: $F_1(-3;0); F_2(3;0)$. Ta có: $M \in (E_2) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a$

Elíp (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất $\Leftrightarrow MF_1 + MF_2$ nhỏ nhất

Gọi N là điểm đối xứng với F_1 qua $\Delta \Rightarrow N(-5;2)$

Ta có: $MF_1 + MF_2 = NM + MF_2 \geq NF_2$. Dấu bằng xảy ra khi $M = NF_2 \cap \Delta$

Vậy: Elíp (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất là $a = \sqrt{17}$, khi $M(-\frac{17}{5}; \frac{8}{5})$

Rõ ràng lời giải của đáp án là tối ưu nhưng đa số HS đi thi sẽ làm theo lời giải phổ dụng (Lời giải 1). Điều này dễ hiểu vì người ra đề thi có thời gian suy nghĩ và nghiên cứu bài toán nên mới cho lời giải tối ưu. Còn HS đi thi phải làm và suy nghĩ trong thời gian hạn chế nên việc giải theo lời giải phổ dụng là hợp lí. Đó đều là các lựa chọn hợp logic suy luận.

B.2: Buổi học thứ hai

Với sự chuẩn bị của học sinh, giáo viên yêu cầu học sinh trình bày lời giải của một số bài toán. Khuyến khích HS giải thích quá trình suy luận và tìm lời giải tối ưu.

Sau đây là sơ lược về hệ thống các bài toán rèn luyện và lời giải sơ lược theo logic suy luận

1. Bài toán 1 (Đề thi HSG lớp 10)

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{abc} \geq 81$

Hs suy luận

HS1:

+ Suy luận: Bài toán chứa biểu thức đối xứng nên sẽ chuyển về xét hàm số của $t = abc$ vì $a^2 + b^2 + c^2$ chuyển đánh giá về $t = abc$

+ Lời giải sơ lược:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 1 - 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 - 2.3.\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{9}{1 - 2.3.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$$

$$\text{Xét } VT - VP = \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{abc} - 81 \geq \frac{9}{1 - 2.3.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} + \frac{2}{abc} - 81 = F$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{abc} . \text{ Đk: } 0 < t \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Xét hàm số: } F = \frac{9}{1 - 6t^2} + \frac{2}{t^3} - 81 \text{ trên } \left(0; \frac{1}{3}\right] \text{ ta có Đpcm}$$

HS2:

+ Suy luận: Bài toán chứa biểu thức đối xứng nên sẽ chuyển về xét hàm số của $t = ab + bc + ca$ vì abc chuyển đánh giá về $t = ab + bc + ca$

+ Lời giải sơ lược:

$$\text{Ta có: } \frac{1}{abc} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab + bc + ca}$$

$$\text{và } a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 1 - 2(ab + bc + ca)$$

$$VT - VP = \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{abc} - 81 \geq \frac{9}{1 - 2(ab + bc + ca)} + \frac{18}{ab + bc + ca} - 81 = 9F$$

$$\text{Đặt } t = ab + bc + ca. \text{ Đk: } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Xét hàm số: } F = \frac{1}{1 - 2t} + \frac{2}{t} - 9 \text{ trên } \left[0; \frac{1}{3}\right] \text{ ta có Đpcm}$$

HS3:

+ Suy luận: Có thể giải được bằng kiến thức lớp 10 nhờ đánh giá BĐT theo BĐT dạng Svac vì BĐT bài toán có dạng phân số.

+ Lời giải sơ lược:

$$\text{CM: } \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x + y)^2}{a + b}, \forall a, b > 0, x, y \in R. \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

Áp dụng BĐT (1), ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{abc} &= \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{4}{ab + bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab + bc + ca} \\ \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{abc} &\geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{36}{2(ab + bc + ca)} \geq \frac{9^2}{(a + b + c)^2} = 81 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

2. Bài toán 2

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{xy}{xy + z}} + \sqrt{\frac{yz}{yz + x}} + \sqrt{\frac{zx}{zx + y}} \leq \frac{3}{2} \quad (2)$$

Hs suy luận

HS1:

+ Suy luận: Cần thực hiện biến đổi để đơn giản bài toán.

Do: $\sqrt{\frac{xy}{xy+z}} = \sqrt{\frac{\frac{xy}{z}}{\frac{xy}{z}+1}}$; $x = \sqrt{\frac{xy}{z}} \cdot \sqrt{\frac{xz}{y}}$ nên nghĩ tới việc đổi biến theo $\sqrt{\frac{xy}{z}}$; $\sqrt{\frac{yz}{x}}$; $\sqrt{\frac{zx}{y}}$

+ Lời giải sơ lược:

Đặt: $a = \sqrt{\frac{xy}{z}}$; $b = \sqrt{\frac{yz}{x}}$; $c = \sqrt{\frac{zx}{y}}$

Bài toán trở thành: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+1}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+1}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2+1}} \leq \frac{3}{2} \quad (2a)$$

Từ gt: $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = 1$

$\Rightarrow$ tồn tại tam giác ABC sao cho: $a = \tan \frac{A}{2}$; $b = \tan \frac{B}{2}$; $c = \tan \frac{C}{2}$

$$(2a) \text{ trở thành: } \sqrt{\frac{\tan^2 \frac{A}{2}}{\tan^2 \frac{A}{2} + 1}} + \sqrt{\frac{\tan^2 \frac{B}{2}}{\tan^2 \frac{B}{2} + 1}} + \sqrt{\frac{\tan^2 \frac{C}{2}}{\tan^2 \frac{C}{2} + 1}} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} : \text{CM theo lượng giác.}$$

HS2:

+ Suy luận: Nhận thấy: $xy + z = (x+z)(y+z)$ nên có thể chứng minh trực tiếp nhờ BĐT Cauchy

+ Lời giải sơ lược:

$$\text{Ta có: } \sqrt{\frac{xy}{xy+z}} = \sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z} \right)$$

$$\sqrt{\frac{yz}{yz+x}} = \sqrt{\frac{yz}{(y+x)(z+x)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{y+x} + \frac{z}{z+x} \right)$$

$$\sqrt{\frac{zx}{zx+y}} = \sqrt{\frac{zx}{(z+y)(x+y)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z+y} + \frac{x}{x+y} \right)$$

Cộng lại ta có Đpcm

3. Bài toán 3

“Cho hai đường tròn: $(C_1): x^2 + y^2 = 5$; $(C_2): (x - 3)^2 + y^2 = 8$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Dây cung AC của đường tròn (C_1) cắt đường tròn (C_2) tại giao điểm thứ 2 là E sao cho E là trung điểm AC. Tính độ dài AC”

Hs suy luận

HS1:

+ Suy luận: Do AC và hai đường tròn luôn có điểm chung A nên việc xác định tọa độ giao điểm A theo hệ số góc k của đường thẳng là đơn giản. Do vậy ta có thể giải bài toán như sau:

+ Lời giải sơ lược:

Tìm giao điểm của hai đường tròn, do tính chất đối xứng nên ta chọn $A(1; -2)$.

Đường thẳng qua A với hệ số góc k có pt: $y = k(x - 1) + 2$

$$E = AC \cap (C_2) \Rightarrow x_E = \frac{k^2 - 4k + 5}{k^2 + 1}; \quad C = AC \cap (C_1) \Rightarrow x_C = \frac{k^2 - 4k - 1}{k^2 + 1}$$

E là trung điểm AC nên:

$$2x_E = x_C + x_A \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{k^2 - 4k + 5}{k^2 + 1} = \frac{k^2 - 4k - 1}{k^2 + 1} + 1 \Leftrightarrow k = \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy } C\left(\frac{-19}{29}; \frac{62}{29}\right) \Rightarrow AC = \frac{24}{\sqrt{29}}$$

HS2:

+ Suy luận: Gọi tọa độ C trên (C_1) , ta tính được tọa độ E theo tọa độ C. Thay tọa độ E vào (C_2) ta tìm được E, từ đó tính được AC.

+ Lời giải sơ lược:

$$\text{Gọi } C(x_0; y_0) \in (C_1) \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = 5. \text{ Khi đó } E\left(\frac{1+x_0}{2}; \frac{y_0-2}{2}\right)$$

$$E \in (C_2) \Leftrightarrow \left(\frac{1+x_0}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{y_0-2}{2}\right)^2 = 8 \Leftrightarrow (x_0 - 5)^2 + (y_0 - 2)^2 = 32$$

$$\text{Hệ: } \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 5 \\ (x_0 - 5)^2 + (y_0 - 2)^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 5 \\ x_0 = \frac{1-2y_0}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0; y_0) = (1; -2) \\ (x_0; y_0) = \left(\frac{-19}{29}; \frac{62}{29}\right) \end{cases}$$

$$\text{Nghiem}(\frac{-19}{29}; \frac{62}{29}) \text{ thoả mãn} \Rightarrow C(\frac{-19}{29}; \frac{62}{29}) \Rightarrow AC = \frac{24}{\sqrt{29}}$$

GV Bài toán này có một lời giải hình học thật đẹp, tuy nhiên HS không suy luận để tìm được lời giải ấy. GV đã hướng dẫn cho HS đồng thời chỉ ra rằng: "**đôi khi lời giải đã xuất hiện từ giả thiết bài toán**"

B.3: Buổi học thứ ba

Đây là buổi học mà giáo viên tổ chức cho học sinh kiểm tra để thu thập thông tin. Đề kiểm tra sau đây được thực hiện trong thời gian 90 phút.

1. Đề thi

Câu 1: Tìm ít nhất hai lời giải cho bài toán sau:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho tam giác ABC có phương trình AB, AC lần lượt là: $3x + 4y - 7 = 0$; $3x - 4y + 1 = 0$. Tổng khoảng cách từ mỗi đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện là $\frac{58}{5}$. Lập phương trình đường thẳng BC biết $M(-3;1)$ là trung điểm cạnh BC

Câu 2: Cho $x, y, z > 0$, chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq 1$$

Chỉ rõ quá trình suy luận logic dẫn tới lời giải bài toán?

2. Một vài kết quả sau bài kiểm tra

* Đối với câu 1 học sinh thực theo hai hướng: Sử dụng giả thiết khoảng cách hoặc sử dụng giả thiết trung điểm. Cuối cùng nhận xét đây là một bài toán thừa giả thiết do đó cần kiểm tra lại giả thiết không sử dụng.

* Đối với câu 2 học sinh thực hiện theo 4 cách :

- Cách 1: Dùng BĐT Cauchy với việc đánh giá ngược mẫu số
- Cách 2: Đánh giá trực tiếp mẫu số theo BĐT Bunhiacopski
- Cách 3: .Đổi biến đưa về BDT với a, b, c sao cho $abc = 1$.
- Cách 4: Đổi biến đưa về BDT với a, b, c sao cho $ab + bc + ca = 1$

Đây là một bài toán khó tuy nhiên HS vẫn tìm được lời giải và giải thích được cơ sở suy luận để đi đến lời giải ấy.

Đa số học sinh cho lời giải cách 1,2. Đây là những lời giải phổ dụng, dùng kiến thức SGK và có suy luận sắc sảo.

Một số ít HS cho lời giải cách 3,4. Đây là những lời giải hay và khó vì HS đã vận dụng việc đổi biến hợp lý mà bản chất toán học đó chính là thao tác chuẩn hoá trong BDT

C. KẾT LUẬN

I. Kết quả thu được

Sau đây là bảng số liệu thu được trong buổi học thứ nhất của lớp 12A (năm học 2014 - 2015) khi thực hiện HĐ3.

Cách giải	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Đối tượng1	45	30	46	10	31	15	15	40	40	10	10	10	45	9	9	9
Đối tượng2	05	20	04	40	19	35	35	10	10	40	40	40	05	41	41	41
LG tối ưu	50	20	48	20	18	21	24	48	46	19	17	18	45	10	12	15
LG phổ dụng	50	5	48	6	11	9	6	48	46	8	10	10	45	8	10	8

Ghi chú:

Đối tượng1: HS giải thích được quá trình suy luận logic để đi đến lời giải

Đối tượng2: HS **không** giải thích được quá trình suy luận logic để đi đến lời giải

Qua bảng số liệu ta thấy rằng khi HS chưa chú trọng đến bản chất của quá trình suy luận thì việc hiểu rõ quá trình giải toán cũng rất kém. Điều này ảnh hưởng rất nhiều tới hiệu quả giải toán.

Sau khi được học buổi học thứ nhất, buổi học thứ hai HS đã có nhận thức rõ ràng về sự cần thiết của quá trình suy luận logic. Kết quả thu được như sau:

Bài toán	1	2	3
Đối tượng 1	48	50	46
Đối tượng 2	02	0	04
LG tối ưu	50	20	1
LG phổ dụng	50	30	49

Có một lớp đối chứng của năm học trước đó lớp 12A năm học 2014 - 2015. Tôi cũng thực hiện với hệ thống bài tập tương tự nhưng không đề cập tới cấu trúc lý thuyết của quá trình suy luận. Kết quả so sánh về kết quả giải toán và kết quả bài thi thể hiện ở các bảng sau:

Lớp	BT1	BT2	BT3
12A(13 - 14)	40%	50%	50%
12A (14 - 15)	85%	95%	90%

Điểm kiểm tra	9	$7 \div 8$	$5 \div 6$	Dưới 5
Lớp	$\div 10$			
12A (13 - 14)	2	20	23	5
12A(14 - 15)	10	26	9	5

Thông qua bảng số liệu có thể khẳng định một điều: Việc triển khai các buổi học mở rộng mang lại hiệu quả rất nhiều. Đó cũng là điều mong mỏi của tôi khi viết SKKN này. Mong muốn dạy cho HS không những kiến thức mà cả quá trình tư duy để vừa có thể cung cấp cho các em kiến thức vừa có thể cung cấp cho các em một hệ thống các tri thức suy luận.

Không những giúp học sinh trong việc định hướng giải toán với một nội dung cụ thể mà thông qua đó để học sinh thấy được rằng việc đi theo “con đường” này là rất tốt và có kết quả. Từ đó thôi thúc học sinh tìm tòi sáng tạo để trang bị cho mình những quy trình và lượng kiến thức cần thiết.

Nhìn chung vì quá trình suy luận logic phụ thuộc vào bài toán nên đa số học sinh có định hướng trong quá trình giải toán sẽ cho lời giải rất nhanh. Tuy nhiên đối với một số học sinh trung bình và trung bình khá thì khả năng vận dụng vào giải toán còn đang lúng túng, khi gặp bế tắc trong giải toán học sinh thường không chuyển hướng được cách suy nghĩ để giải bài toán (thể hiện sức “ỳ” tư duy vẫn còn lớn). Vì vậy khi dạy cho học sinh nội dung này, giáo viên cần tạo ra cho học sinh cách suy nghĩ linh hoạt và sáng tạo trong khi vận dụng quy trình.

II. Kiến nghị

Qua sự thành công bước đầu của việc áp dụng nội dung này thiết nghĩ rằng chúng ta cần thiết phải có sự đổi mới trong cách dạy và học. Khi dạy toán nên chỉ ra cho học sinh những suy luận logic để học sinh tự mình tư duy tìm ra con đường giải toán.

Sáng kiến kinh nghiệm này chỉ là một phần rất nhỏ nó là kinh nghiệm bản thân thu được qua quá trình dạy một phạm vi học sinh nhỏ hẹp. Vì vậy sự phát hiện những ưu nhược điểm chưa được đầy đủ và sâu sắc. Mong rằng qua báo cáo kinh nghiệm này các đồng nghiệp cho tôi thêm những ý kiến và phản hồi những ưu nhược điểm của cách dạy nội dung này. Cuối cùng tôi mong rằng nội dung này sẽ được các đồng nghiệp nghiên cứu và áp dụng vào thực tiễn dạy học để rút ra những điều bổ ích.

Bài viết chắc chắn còn nhiều thiếu sót rất mong được sự đóng góp ý kiến, phê bình, phản hồi của các đồng nghiệp.

<i>Xác nhận của thủ trưởng đơn vị</i>	<i>Hoàng Hoá, ngày 16 tháng 05 năm 2015</i> CAM KẾT KHÔNG COPY Người thực hiện Lê Thị Thu Huyền
---------------------------------------	--