

Người làm: Trần Thị Thoa
 Zalo: Trần Thị Thoa
 Email: thoatrantb89@gmail.com

- số đt zalo: 0989473255

CD13: HÌNH HỌC

Dạng 1. Tính số góc, chứng minh góc bằng nhau

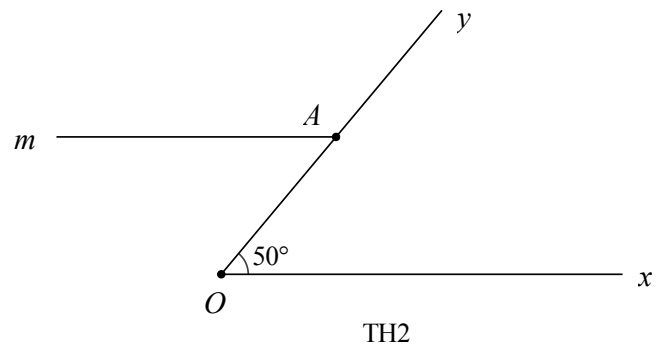
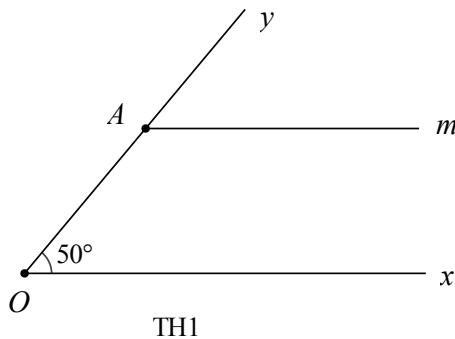
A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho $\hat{xOy} = 50^\circ$, điểm A nằm trên Oy . Qua A vẽ tia Am . Để Am song song với Ox thì số đo của \hat{OAm} là:

- A. 50° B. 130° C. 50° và 130° D. 80°

Lời giải



TH1:

Vì $Am \parallel Ox$ nên $\hat{AOx} + \hat{OAm} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía)

Thay $\hat{AOx} = 50^\circ$, ta có: $50^\circ + \hat{OAm} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \hat{OAm} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

TH2:

Vì $Am \parallel Ox$ nên $\hat{AOx} = \hat{OAm}$ (hai góc so le trong)

mà $\hat{AOx} = 50^\circ$

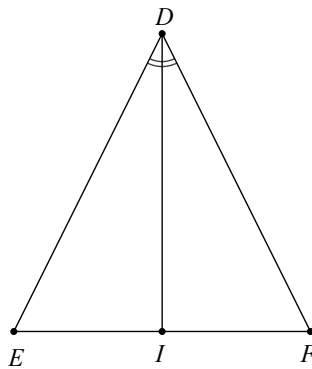
$$\Rightarrow \hat{OAm} = 50^\circ$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác DEF có $\hat{E} = \hat{F}$. Tia phân giác của góc D cắt EF tại I . Ta có:

- A. $\triangle DIE = \triangle DIF$ B. $DE = DF, \hat{IDE} = \hat{IDF}$
 C. $IE = IF, DI = EF$ D. Cả A, B đều đúng

Lời giải



Ta có: $\hat{E} = \hat{F}$ (gt) $\Rightarrow \triangle DEF$ cân tại D

Xét $\triangle DIE$ và $\triangle DIF$ có:

DI : cạnh chung

$DE = DF$ ($\triangle DEF$ cân tại D)

$\widehat{EDI} = \widehat{FDI}$ (DI là tia phân giác)

$\Rightarrow \triangle DIE = \triangle DIF$ (c - g - c)

$\Rightarrow IE = IF$ (hai cạnh tương ứng)

Câu 3. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC cân tại A , $\hat{A} = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Số đo của góc BDC là:

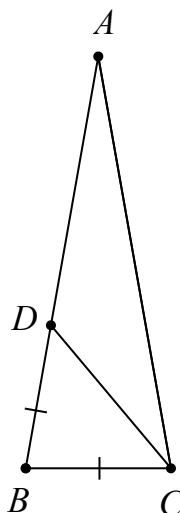
A. 50°

B. 70°

C. 30°

D. 80°

Lời giải



+) Xét $\triangle ABC$ có:

$\hat{BAC} + \hat{ABC} + \hat{ACB} = 180^\circ$ (tổng ba góc trong một tam giác)

$20^\circ + \hat{ABC} + \hat{ACB} = 180^\circ$

$\Rightarrow \hat{ABC} + \hat{ACB} = 160^\circ$

mà $\hat{ABC} = \hat{ACB}$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

$$\Rightarrow \hat{ABC} = \hat{ACB} = 80^\circ$$

+) Ta có: $AD = BC$ (gt)

$\Rightarrow \triangle BDC$ cân tại B .

+) Xét $\triangle BDC$ có:

$$\hat{DBC} + \hat{BDC} + \hat{BCD} = 180^\circ \quad (\text{tổng ba góc trong một tam giác})$$

$$80^\circ + \hat{BDC} + \hat{BCD} = 180^\circ$$

$$\hat{BDC} + \hat{BCD} = 100^\circ$$

mà $\hat{BDC} = \hat{BCD}$ ($\triangle BDC$ cân tại B)

$$\Rightarrow \hat{BDC} = \hat{BCD} = 50^\circ$$

B. Tự luận

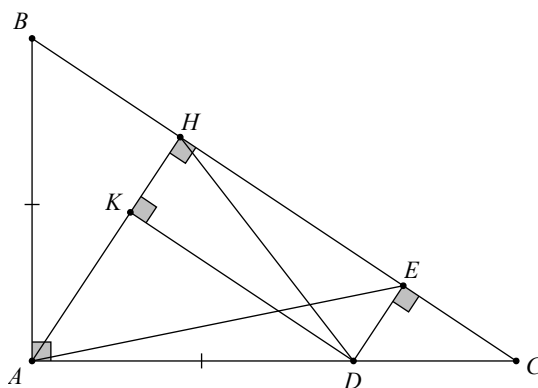
Câu 1. (HSG 7 huyện Xuân Trường 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Lấy điểm D trên AC sao cho $AD = AB$. Kẻ DE và DK lần lượt vuông góc với BC và AH ($E \in BC, K \in AH$).

a) So sánh độ dài BH và AK

b) Tính số đo góc \widehat{HAE}

Lời giải



a) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{ADK}$ (cùng phụ với \widehat{KAD})

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle DAK$ có: $\widehat{AHB} = \widehat{DKA} = 90^\circ$; $BA = DA$ (gt); $\widehat{BAH} = \widehat{ADK}$ (cmt)

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle DAK \text{ (ch - gn)} \Rightarrow BH = AK$$

b) Chứng minh $KD \parallel HE \Rightarrow \widehat{KDH} = \widehat{EHD}$ (hai góc so le trong)

Xét $\triangle KDH$ và $\triangle EHD$ có: $\widehat{DKH} = \widehat{HED} = 90^\circ$; DH chung; $\widehat{KDH} = \widehat{EHD}$ (cmt)

$$\Rightarrow \Delta KDH = \Delta EHD (ch - gn) \Rightarrow KD = EH \quad (\text{hai cạnh tương ứng})$$

Mà $HA = KD (\Delta ABH = \Delta DAK) \Rightarrow HE = HA \Rightarrow \Delta AHE$ vuông cân tại H

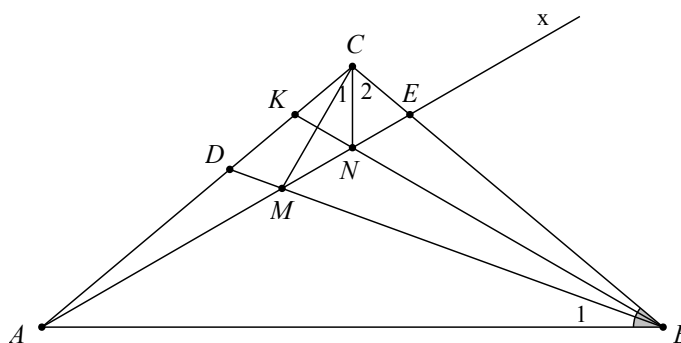
Từ đó tính được $\angle HAE = 45^\circ$

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Chương 2018 - 2019)

Tam giác ABC cân tại C và $\angle C = 100^\circ$; BD là phân giác của $\angle B$. Từ A kẻ tia Ax tạo với AB một góc 30° . Tia Ax cắt BD tại M , cắt BC tại E . Vẽ BK là phân giác $\angle CBD$, BK cắt Ax tại N

- a) Tính số đo $\angle ACM$
- b) So sánh MN và CE .

Lời giải



a) Học sinh chứng minh được: ΔANB cân tại N ($\angle BNA = \angle NBA = 30^\circ$) $\Rightarrow NA = NB$

Nối CN , chứng minh được $\Delta CAN = \Delta CBN (c.c.c)$

$$\Rightarrow \angle NCA = \angle NCB = 50^\circ; \angle NMB \text{ là góc ngoài của } \Delta ABM \Rightarrow \angle NMB = \angle A_1 + \angle B_1 = 50^\circ$$

Từ đó, học sinh chứng minh được: $\Delta BNM = \Delta BNC (g.c.g) \Rightarrow BC = BM \Rightarrow \Delta CBM$ cân tại B , mà lại có góc ở đỉnh $\angle CBM = 20^\circ$ nên tính được $\angle ACM = 20^\circ$

b) Từ chứng minh trên, ta chứng minh được ΔMNC cân tại $N \Rightarrow MN = NC$, so sánh CN với CE

Xét trong tam giác CNE tính được $\angle ENC = 180^\circ - (100^\circ + 10^\circ) = 70^\circ$

Và tính được $\angle CNE = 50^\circ + 10^\circ = 60^\circ$ (góc ngoài của ΔCAN)

$$\Rightarrow \angle ENC > \angle CNE \Rightarrow CN > CE \text{ hay } MN > CE$$

Dạng 2. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau

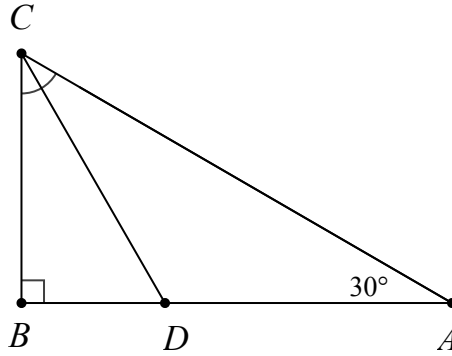
A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại B , $AB = 6$, $\angle C = 30^\circ$. Phân giác góc C cắt AB tại D . Khi đó độ dài đoạn thẳng BD và AD lần lượt là:

- A. 2; 4
- B. 3; 3
- C. 4; 2
- D. 1; 5

Lời giải



Lời giải

+) Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có $\widehat{ABC} = 30^\circ$

$$\Rightarrow CB = \frac{1}{2} AC \quad \text{hay} \quad AC = 2CB$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có $AC^2 = BC^2 + AB^2$ (định lí pythagore)

$$\Rightarrow (2BC)^2 = BC^2 + 6^2$$

$$\Rightarrow 4BC^2 - BC^2 = 36$$

$$\Rightarrow 3BC^2 = 36$$

$$\Rightarrow BC^2 = 12$$

+) Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có: $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 90^\circ$

$$\Rightarrow 30^\circ + \widehat{BCA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BCA} = 60^\circ$$

Vì CD là phân giác của \widehat{BCA} (gt) $\Rightarrow \widehat{BCD} = \frac{1}{2} \widehat{BCA} = 30^\circ$

+) Xét $\triangle DBC$ vuông tại B có: $\widehat{BCD} = 30^\circ$

$$\Rightarrow BD = \frac{1}{2} CD \quad \text{hay} \quad CD = 2BD$$

+) Xét $\triangle DBC$ vuông tại B có: $CD^2 = BC^2 + BD^2$ (định lí pythagore)

$$\Rightarrow (2BD)^2 = 12 + BD^2$$

$$\Rightarrow 4BD^2 - BD^2 = 12$$

$$\Rightarrow 3BD^2 = 12$$

$$\Rightarrow BD^2 = 4$$

$$\Rightarrow BD = 2 \quad (BD > 0)$$

Vì: $BD + DA = AB$

$$\Rightarrow 2 + AD = 6$$

$$\Rightarrow AD = 4$$

Vậy $BD = 2$; $AD = 4$.

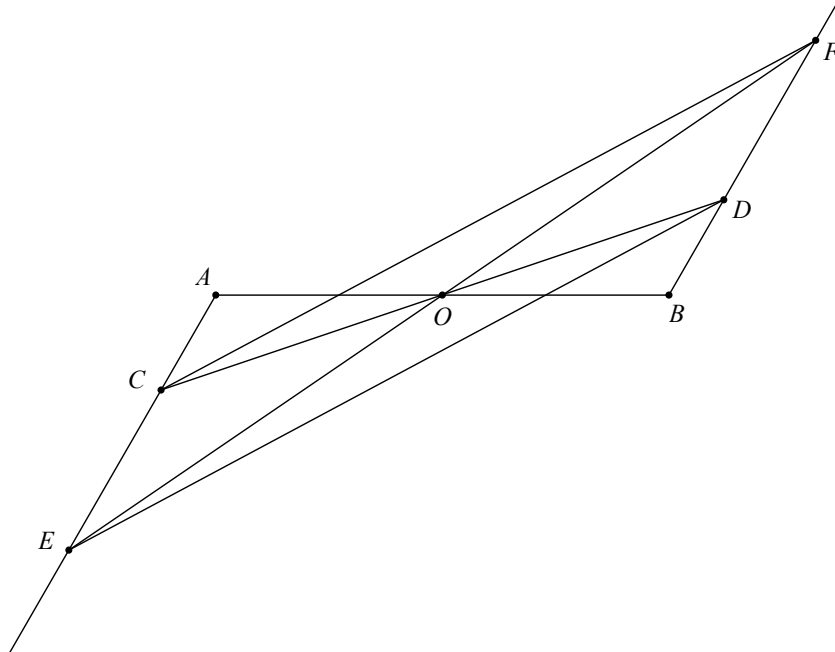
Dạng 3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Chương 2018-2019)

Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm. Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB kẻ hai tia $Ax // By$. Lấy hai điểm C, E và D, F lần lượt trên Ax, By sao cho $AC = BD, CE = DF$. Chứng minh:

- a) Ba điểm C, O, D thẳng hàng, E, O, F thẳng hàng
- b) $ED = CF$

Lời giải



- a) Chứng minh được $\Delta AOE = \Delta BOF (c.g.c) \Rightarrow E, O, F$ thẳng hàng và $OE = OF$ (1)
- Tương tự chứng minh được $\Delta AOC = \Delta BOD (c.g.c) \Rightarrow C, O, D$ thẳng hàng và $OC = OD$ (2)
- b) Từ (1), (2) kết hợp giả thiết chứng minh được $\Delta EOD = \Delta FOC (c.g.c) \Rightarrow ED = CF$

Dạng 4. Bất đẳng thức trong tam giác

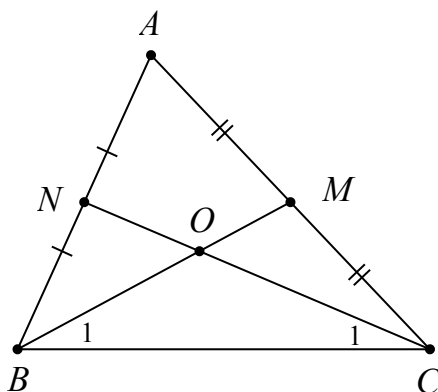
A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , hai đường trung tuyến BM, CN . Biết $AC > AB$. Khi đó độ dài hai đoạn thẳng BM và CN là:

- A. $BM \leq CN$
- B. $BM > CN$
- C. $BM < CN$
- D. $BM = CN$

Lời giải



Gọi O là giao điểm của BM và CN .

Xét $\triangle ABC$ có: $AC > AB$

$\Rightarrow \angle ABC > \angle ACB$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện)

$\Rightarrow \angle B_1 > \angle C_1$

Xét $\triangle OBC$ có: $\angle B_1 > \angle C_1$ (cmt)

$\Rightarrow OC > OB$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện)

mà $OC = \frac{2}{3}CN, OB = \frac{2}{3}BM$ (O là trọng tâm của $\triangle ABC$)

$\Rightarrow \frac{2}{3}CN > \frac{2}{3}BM$

$\Rightarrow CN > BM$

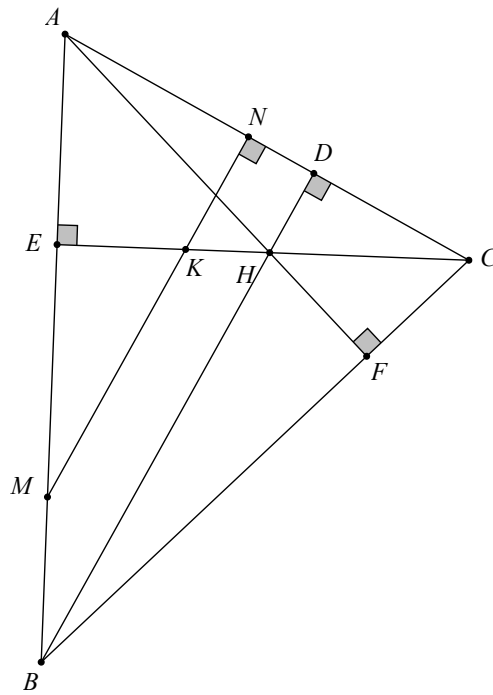
$\Rightarrow BM < CN$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG trường THCS Tôn Đức Thắng 2018 - 2019)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$, ba đường cao BD, CE và AF cắt nhau tại H . Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = AC$. Gọi N là hình chiếu của M trên AC ; K là giao điểm của MN và CE . Chứng minh $AB + CE > AC + BD$

Lời giải



$$CE = MN$$

Chứng minh

Viết được $AB - AC > BD - CE \Rightarrow BM > BD - MN$

$MI \perp BD \Rightarrow BM > BI$

Vậy $AB + CE > AC + BD$

Dạng 4. Chứng minh song song, vuông góc

Dạng 4. Hình khối trong thực tiễn

Dạng 5. Bài toán chứng minh tổng hợp

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Thùy 2018 - 2019)

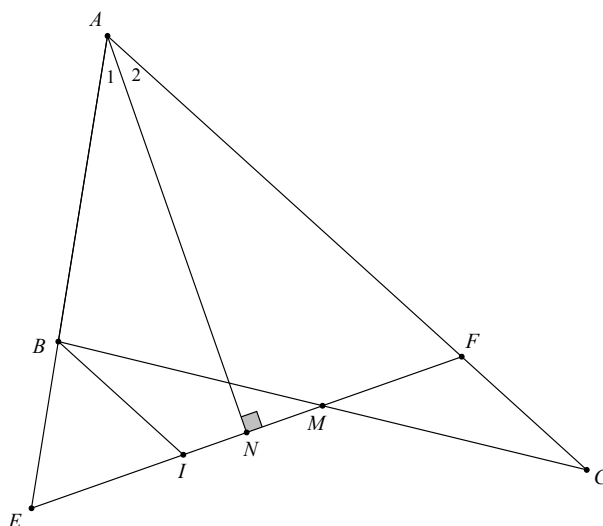
Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , từ M kẻ đường thẳng vuông góc với phân giác của góc A , cắt tia này tại N , cắt tia AB tại E và cắt tia AC tại F . Chứng minh rằng:

a) $BE = CF$

b) $AE = \frac{AB + AC}{2}$

c) Tính AE, BE theo $AC = b, AB = c$

Lời giải



a) Kẻ $BI \parallel AC (I \in EF)$, chứng minh được: $\triangle BIM = \triangle CFM (g.c.g) \Rightarrow BI = CF (1)$

Chứng minh được: $\triangle BEI$ cân tại B $\Rightarrow BE = BI (2)$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh

b) Chứng minh được $\triangle ANE = \triangle ANF (g.c.g) \Rightarrow AE = AF$

Ta có: $AE = AB + BE; AF = AC - CF$

$$\Rightarrow AE + AF = AB + BE + AC - CF$$

hay $2AE = AB + AC$ (do $AE = AF, BE = FC$)

$$\Rightarrow AE = \frac{AB + AC}{2}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{b + c}{2}, \quad BE = \frac{AC - AB}{2}$$

c) Từ câu b chứng minh được:

$$\Rightarrow BE = \frac{b - c}{2}$$

Câu 2. (HSG 7 trường Thanh Mai 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$.

Gọi H là trung điểm của BC .

$$AM = AN \quad AH \perp BC$$

a) Chứng minh: và

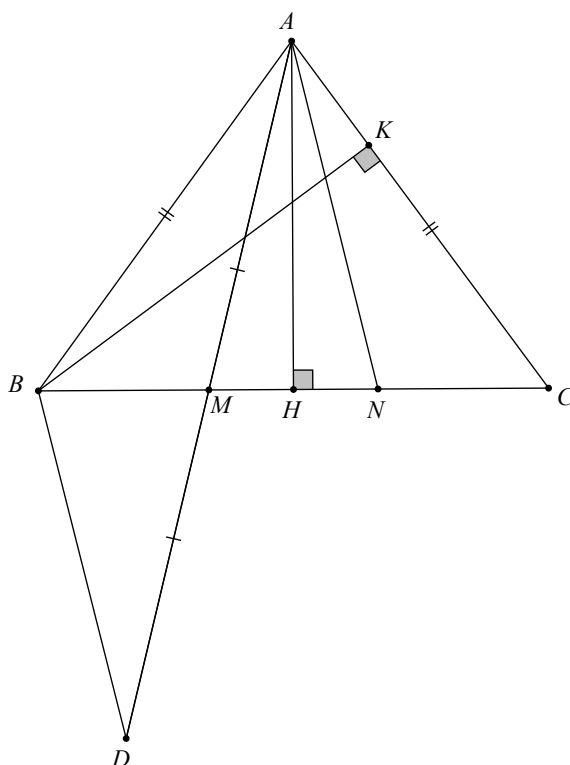
$$\angle MAN > \angle BAM$$

b) Chứng minh:

$$BK. \quad AK = 7cm, AB = 9cm. \quad BC$$

c) Kẻ đường cao Biết Tính độ dài .

Lời giải



a) Chứng minh được $\triangle ABM = \triangle ACN$ (cgc) $\Rightarrow AM = AN$

Chứng minh được $\triangle ABH = \triangle ACH$ (cgc)

$\Rightarrow \sphericalangle AHB = \sphericalangle AHC = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$

b) Trên tia đối tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$

Chứng minh được $\triangle AMN = \triangle DMB$ (cgc) $\Rightarrow \sphericalangle MAN = \sphericalangle BDM$ và $AM = AN = BD$

Chứng minh được: $BA > AM \Rightarrow BA > BD$

Xét $\triangle BAD$ có $BA > BD \Rightarrow \sphericalangle BDA > \sphericalangle BAD$ hay $\sphericalangle MAN < \sphericalangle BAM$

c) Vì $AK \neq 0 \Rightarrow \sphericalangle A \neq 90^\circ$ nên chỉ có hai trường hợp xảy ra :

TH1: $\sphericalangle BAC$ nhọn $\Rightarrow K$ nằm giữa hai điểm A, C mà $AC = AB$

$\Rightarrow AC = 9\text{cm} \Rightarrow KC = AC - AK = 2$

$\triangle AKB$ vuông tại $K \Rightarrow BK^2 = AB^2 - AK^2 = 32$

$\triangle AKC$ vuông tại K nên ta có: $BC = \sqrt{BK^2 + KC^2} = 6\text{cm}$

Th2: $\sphericalangle BAC$ tù $\Rightarrow A$ nằm giữa hai điểm $K, C \Rightarrow KC = AK + AC = 16\text{cm}$

$\triangle ABK$ vuông tại $K \Rightarrow BK^2 = AB^2 - AK^2 = 32$

$\triangle BKC$ vuông tại $K \Rightarrow BC = \sqrt{BK^2 + KC^2} = \sqrt{288}$

Vậy $BC = 6\text{cm}$ hoặc $BC = \sqrt{288}\text{cm}$

Câu 3. (HSG 7 trường Thanh Oai 2018 - 2019)

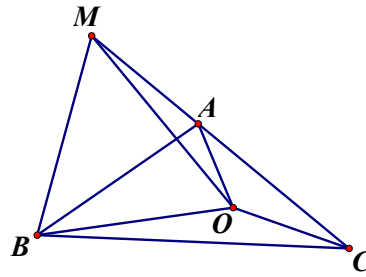
Cho tam giác ABC cân tại A , có $\sphericalangle A = 108^\circ$. Gọi O là một điểm nằm trên tia phân giác của $\sphericalangle C$ sao cho

$\sphericalangle BO = 12^\circ$, vẽ tam giác đều BOM (M và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BO). Chứng minh rằng:

a) Ba điểm C, A, M thẳng hàng

b) Tam giác AOB cân.

Lời giải



a) $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{A} = 108^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 36^\circ, \widehat{OCA} = \widehat{OCB} = 18^\circ$

Xét $\triangle BOC$ có $\widehat{BOC} = 180^\circ - (36^\circ + 18^\circ) = 126^\circ$

$\widehat{BOM} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{MOC} = 360^\circ - (126^\circ + 60^\circ) = 114^\circ$

$\Rightarrow \triangle BOC = \triangle MOC (c.g.c) \Rightarrow \widehat{OCM} = \widehat{OCB} = 18^\circ$

Mà $\widehat{OCA} = 18^\circ$ nên hai tia CM, CA trùng nhau, do đó 3 điểm C, O, M thẳng hàng.

b) $\triangle CBM$ có $CM = CB \Rightarrow \triangle CBM$ cân tại $C; \widehat{C} = 36^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CBM} = \widehat{CMB} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$

$\widehat{BAM} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$

Vậy $\triangle BAM$ cân tại $B \Rightarrow BA = BM = BO \Rightarrow \triangle AOB$ cân tại B .

Câu 4. (HSG 7 trường Phương Trung 2018 - 2019)

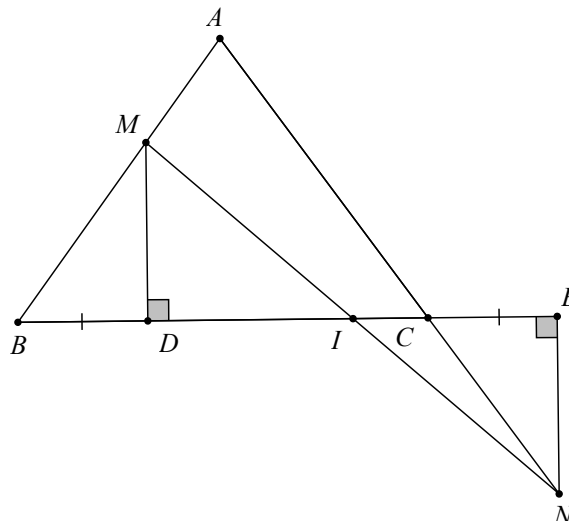
Cho tam giác cân $ABC, AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D . Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = BE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N . Chứng minh:

a) $DM = EN$

b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN .

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên BC .

Lời giải



a) $\triangle MDB = \triangle NEC \Rightarrow DN = EN$

b) $\triangle MDI = \triangle NEI \Rightarrow IM = IN \Rightarrow BC$ cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN .

c) Gọi H là chân đường cao vuông góc kẻ từ A xuống BC .

Ta có: $\triangle AHB = \triangle AHC \Rightarrow \widehat{HAB} = \widehat{HAC}$

Gọi O là giao AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I thì

$$\triangle OAB = \triangle OAC (c.g.c) \Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OCA} \quad (1)$$

$$\text{C\u00f3: } \triangle OIM = \triangle OIN \Rightarrow OM = ON \Rightarrow \triangle OBN = \triangle OCN (c.c.c) \Rightarrow \widehat{OBN} = \widehat{OCN} (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OCA} = \widehat{OCN} = 90^\circ \Rightarrow OC \perp AC$

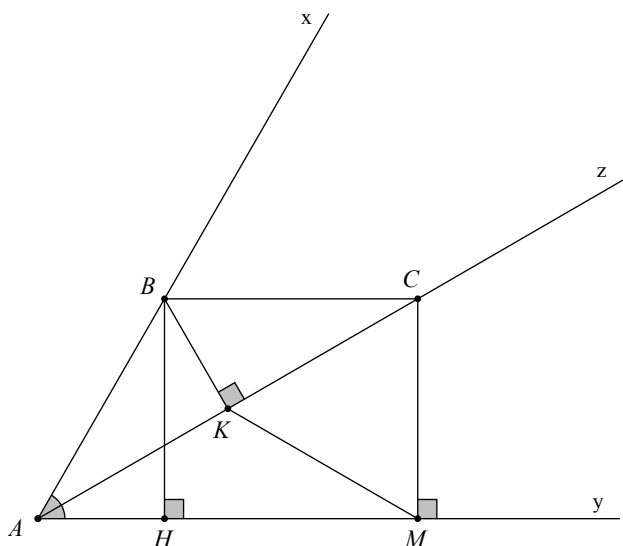
Vậy điểm O cố định.

Câu 5. (HSG 7 trường Phong Đạt 2018 - 2019)

Cho $\widehat{xAy} = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ $BH \perp Ay$ tại H , kẻ $BK \perp Az$ và $Bt \parallel Ay$, Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ $CM \perp Ay$ tại M . Chứng minh:

- a) K là trung điểm của AC
- b) $\triangle KMC$ là tam giác đều
- c) Cho $BK = 2\text{cm}$, Tính các cạnh của $\triangle AKM$

Lời giải



a) $\triangle ABC$ cân tại B do $\widehat{CAB} = \widehat{ACB} (= \widehat{MAC})$ và BK là đường cao
 $\Rightarrow BK$ là đường trung tuyến $\Rightarrow K$ là trung điểm của AC

b) $\triangle ABH = \triangle BAK$ (ch - gn) $\Rightarrow BH = AK$ mà $AK = \frac{1}{2}AC \Rightarrow BH = \frac{1}{2}AC$

Ta có: $BH = CM$ ($\triangle BHM = \triangle MCB$) mà $CK = BH = \frac{1}{2}AC \Rightarrow CM = CK$
 $\Rightarrow \triangle MKC$ là tam giác cân tại C (1)

Mặt khác $\widehat{MCB} = 90^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MCK} = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle MKC$ là tam giác đều

c) Vì $\triangle ABK$ vuông tại K mà $\widehat{KAB} = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BK = 2.2 = 4\text{cm}$
 Vì $\triangle ABK$ vuông tại K nên theo Pitago ta có:

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} \text{ mà } KC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$$

$$\text{Vì } \triangle KCM \text{ đều} \Rightarrow KC = KM = \sqrt{12}$$

Theo phần b, $AB = BC = 4\text{cm}, AH = BK = 2, HM = BC (\triangle BHM = \triangle MCB)$

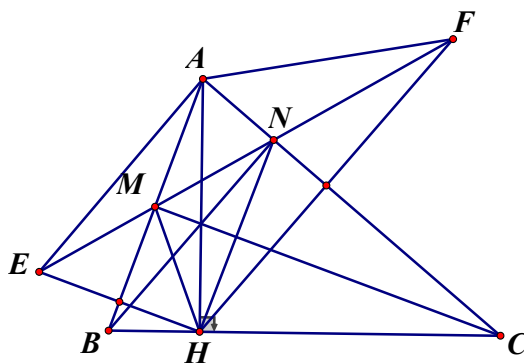
$$\Rightarrow AM = AH + HM = 6\text{cm}$$

Câu 6. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Phú Khánh 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC ($\sphericalangle BAC < 90^\circ$), đường cao AH . Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC , đường thẳng EF cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng:

- a) $AE = AF$
- b) HA là phân giác của $\sphericalangle MHN$
- c) Chứng minh $CM \parallel EH, BN \parallel FH$

Lời giải



a) Vì AB là trung trực của EH nên ta có: $AE = AH$ (1)

Vì AC là trung trực của HF nên ta có: $AH = AF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE = AF$

b) Vì $M \in AB$ nên MB là phân giác $\sphericalangle EMH$
 $\Rightarrow MB$ là phân giác ngoài góc M của tam giác MNH

Vì $N \in AC$ nên NC là phân giác $\sphericalangle FNH \Rightarrow NC$ là phân giác ngoài $\sphericalangle N$ của tam giác MNH

Do MB, NC cắt nhau tại A nên HA là phân giác trong góc H của tam giác HMN hay HA là phân giác của $\sphericalangle MHN$.

c) Ta có: $AH \perp BC(gt)$ mà HM là phân giác $\sphericalangle MHN \Rightarrow HB$ là phân giác ngoài của $\sphericalangle H$ của tam giác HMN

MB là phân giác ngoài của $\sphericalangle M$ của tam giác $HMN(cmt) \Rightarrow NB$ là phân giác trong góc N của tam giác $HMN \Rightarrow BN \perp AC$ (hai đường phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau) $\Rightarrow BN \parallel HF$ (cùng vuông góc với AC)

Chứng minh tương tự ta có: $EH \parallel CM$.

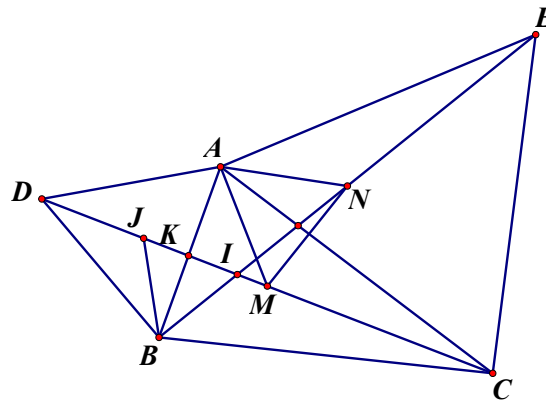
Câu 7. (HSG 7 huyện Kim Thành 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB và DC .

a) Chứng minh rằng $\triangle ADC = \triangle ABE$.

- b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.
 c) Chứng minh rằng IA là phân giác của $\angle DIE$.

Lời giải



$$AD = AB; \angle DAC = \angle BDE \quad AC = AE$$

a) Ta có: và

Suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c)

$$\triangle ADC = \triangle ABE \Rightarrow \angle ABE = \angle ADC \quad \angle BKC = \angle AKD$$

b) Từ mà (đối đỉnh)

Khi đó xét $\triangle BIK$ và $\triangle DAK \Rightarrow \angle BIK = \angle DAK = 60^\circ$ (dfcm)

Từ $\triangle ADC = \triangle ABE \Rightarrow CM = EN$ và $\angle ACM = \angle AEN$

$$\Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$$
 (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN, \angle CAM = \angle EAN$

Có: $\angle MAN = \angle CAE = 60^\circ$. Do đó $\triangle AMN$ đều.

c) Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB \Rightarrow \triangle BIJ$ đều.

$$\Rightarrow BJ = BI \text{ và } \angle JBI = \angle DBA = 60^\circ$$

Suy ra $\angle JBA = \angle JBD$, kết hợp $BA = BD$

$$\Rightarrow \triangle IBA = \triangle JBD$$
 (c.g.c) $\Rightarrow \angle AIB = \angle JDB = 120^\circ$ mà $\angle BID = 60^\circ \Rightarrow \angle DIA = 60^\circ$

Từ đó suy ra IA là phân giác của $\angle DIE$

Câu 8. (HSG 7 đề thi vòng 4 - 2018 - 2019)

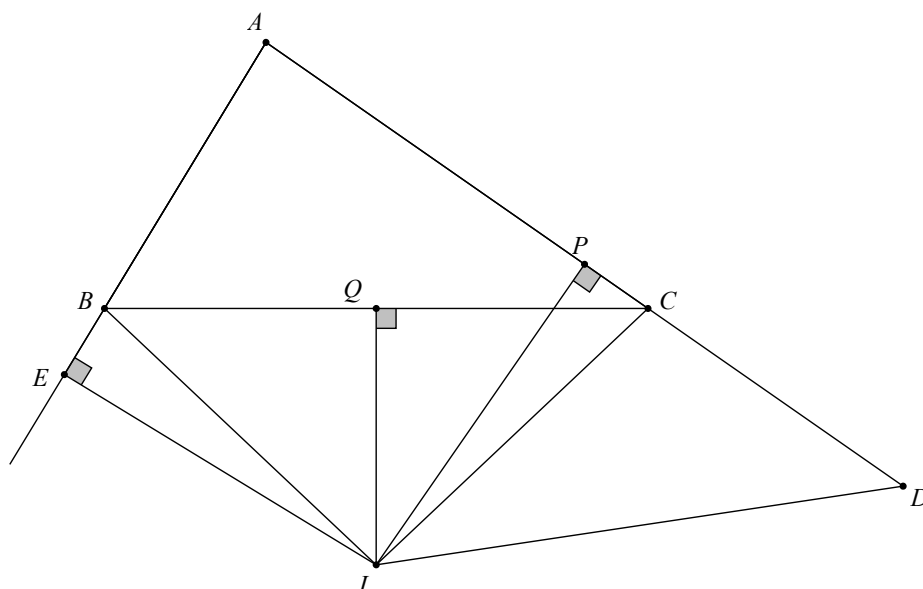
Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Gọi P, Q là trung điểm của AD, BC và I là giao điểm các đường vuông góc với AD và BC tại P và Q .

a) Chứng minh $\triangle AIB = \triangle DIC$

b) Chứng minh AI là tia phân giác của góc BAC .

c) Kẻ IE vuông góc với AB , chứng minh $AE = \frac{1}{2} AD$.

Lời giải



a) Ta có $IB = IC, IA = ID$

Lại có $AB = CD$ (gt)

Do đó $\triangle AIB = \triangle DIC$ (c.c.c)

b) CM: $\widehat{DAI} = \widehat{DBI}$

$\triangle AIB = \triangle DIC$ (câu a), suy ra $\widehat{BAI} = \widehat{DCI}$

Do đó $\widehat{DAI} = \widehat{DBI}$.

Vậy AI là tia phân giác của góc BAC .

c) Vì $IE \perp AB$, ta có $\triangle AIE = \triangle AIP \Rightarrow AE = AP$

Mà $AP = \frac{1}{2}AD$ (vì P là trung điểm AD)

Suy ra $AE = \frac{1}{2}AD$

Câu 9. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

1. Cho đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax và By lần lượt vuông góc với AB tại A và B . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên tia Ax lấy điểm C và trên tia By lấy điểm D sao cho góc COD bằng 90° .

a) Chứng minh rằng: $AC + BD = CD$.

$$AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$$

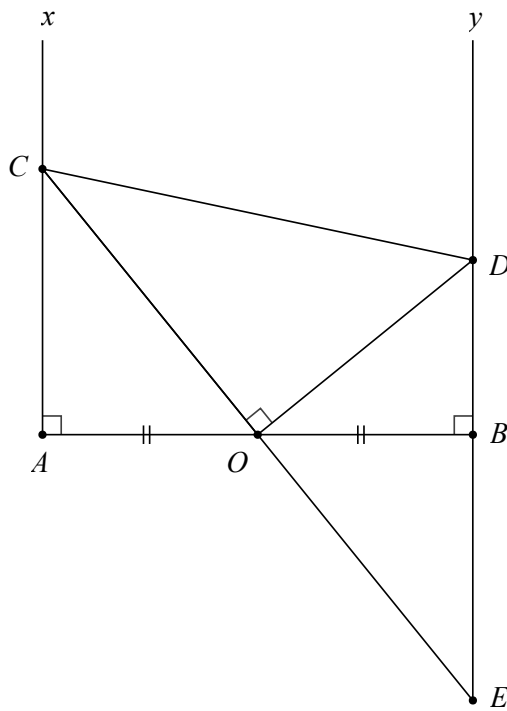
b) Chứng minh rằng:

2. Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H .

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

Chứng minh rằng:

Lời giải



1.

a) Vẽ tia CO cắt tia đối của tia By tại điểm E .

Chứng minh $\Delta AOC = \Delta BOE (g - c - g) \Rightarrow AC = BE; CO = EO$

Chứng minh $\Delta DOC = \Delta DOE (c - g - c) \Rightarrow CD = ED$

mà $ED = EB + BD = AC + BD$

Từ đó: $CD = AC + BD$ (đpcm).

b) Áp dụng định lí Pytago vào các tam giác vuông BOE và BOD ta có:

$$\begin{cases} OE^2 = OB^2 + EB^2 \\ OD^2 = OB^2 + DB^2 \end{cases} \Rightarrow OE^2 + OD^2 = 2OB^2 + EB^2 + DB^2$$

mà $OE^2 + OD^2 = DE^2$

nên $DE^2 = 2OB^2 + EB^2 + DB^2$

$$= 2OB^2 + EB \cdot (DE - BD) + DB \cdot (DE - BE)$$

$$= 2OB^2 + EB \cdot DE - EB \cdot BD + DB \cdot DE - DB \cdot BE$$

$$= 2OB^2 + (EB \cdot DE + DB \cdot DE) - 2BD \cdot BE$$

$$= 2OB^2 + DE \cdot (EB + DB) - 2BD \cdot BE$$

$$= 2OB^2 + DE^2 - 2BD \cdot BE$$

Suy ra: $2OB^2 - 2BD \cdot BE = 0 \Rightarrow BD \cdot BE = OB^2$

mà $BE = AC; OB = \frac{AB}{2}$

$$AC \cdot BD = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4}$$

Vậy (đpcm)

2. Qua H kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại D , kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại E .

Ta có: $\triangle AHD = \triangle HAE$ (g - c - g)

$$\Rightarrow AD = HE; AE = HD$$

$\triangle AHD$ có $HA < HD + AD$ nên $HA < AE + AD$ (1)

Từ đó: $HE \perp BH$

$\triangle HBE$ vuông nên $HB < BE$ (2)

Tương tự ta có: $HC < DC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $HA + HB + HC < AB + AC$ (4)

Tương tự: $HA + HB + HC < AB + BC$ (5)

$HA + HB + HC < BC + AC$ (6)

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

Từ (4), (5) và (6) suy ra: (đpcm)

Câu 10. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Hoàng Hóa 2018 - 2019)

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, $AB < AC$, trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C , vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B , vẽ đoạn thẳng AD vuông góc với AC và $AD = AC$.

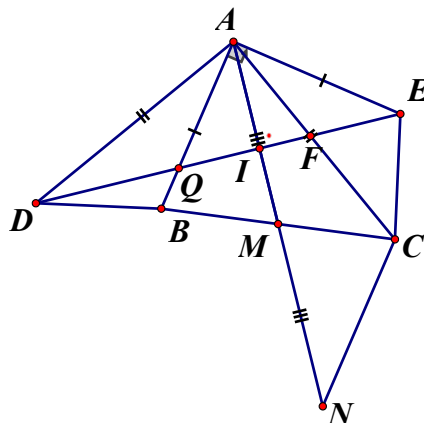
a) Chứng minh $BD = CE$

b) Trên tia đối của tia MA lấy N sao cho $MN = MA$. Chứng minh: $\angle CN = 180^\circ - \angle BAC$ và $\triangle ADE = \triangle CAN$

c) Chứng minh: $AP < AQ$

d) Gọi I là giao điểm của DE và AM . Chứng minh: $\frac{AD^2 + IE^2}{DI^2 + AE^2} = 1$

Lời giải



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có: $AD = AC(gt)$ và $AE = AB(gt)$; $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ (cùng phụ với \widehat{BAC}) $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AEC(c.g.c) \Rightarrow BD = CE$ (2 cạnh tương ứng)

b) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle NCM$ có: $AM = MN(gt)$; $BM = CM(gt)$; $\widehat{AMB} = \widehat{NMC}$ (đ đ)
 $\Rightarrow \triangle ABM = \triangle NCM(c.g.c) \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{NCM}$ (hai góc tương ứng)

Do đó: $\widehat{ACN} = \widehat{ACB} + \widehat{BCN} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$

+Ta có: $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} - \widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{ACN}$

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle ACN$ có: $CN = AE$ (cùng bằng AB), $AC = AD(gt)$; $\widehat{BAE} = \widehat{ACN}(cmt)$
 $\Rightarrow \triangle ADE = \triangle CAN(cgc)$

c) Theo tính chất góc ngoài, ta có: $\widehat{AQP} = \widehat{QAD} + \widehat{QDA}$; $\widehat{APQ} = \widehat{PAE} + \widehat{PEA}$

Mà $AB < AC$ nên $AE < AD \Rightarrow \widehat{ADE} < \widehat{AED}$

Theo chứng minh trên ta có: $\widehat{QAD} = \widehat{PAE}$

Từ đó suy ra $\widehat{QAD} + \widehat{QDA} < \widehat{PAE} + \widehat{PEA}$

Hay $\widehat{AQP} < \widehat{APQ} \Rightarrow AP < AQ$

d) Vì $\triangle ADE = \triangle CAN(cmt) \Rightarrow \widehat{NAC} = \widehat{ADE}$ (hai góc tương ứng)

Xét $\triangle ADP$ vuông tại $A \Rightarrow \widehat{ADE} + \widehat{APD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NAC} + \widehat{APD} = 90^\circ \Rightarrow AI \perp DE$

Xét $\triangle ADI$ vuông tại I , theo định lý pytago có: $AD^2 = DI^2 + AI^2 \Rightarrow AI^2 = AD^2 - DI^2$

Xét $\triangle AIE$ vuông tại I , theo định lý Pytago ta có: $AE^2 = AI^2 + IE^2 \Rightarrow AI^2 = AE^2 - IE^2$

$$\Rightarrow AD^2 - DI^2 = AE^2 - IE^2 \Rightarrow AD^2 + IE^2 = DI^2 + AE^2 \Rightarrow \frac{AD^2 + IE^2}{DI^2 + AE^2} = 1$$

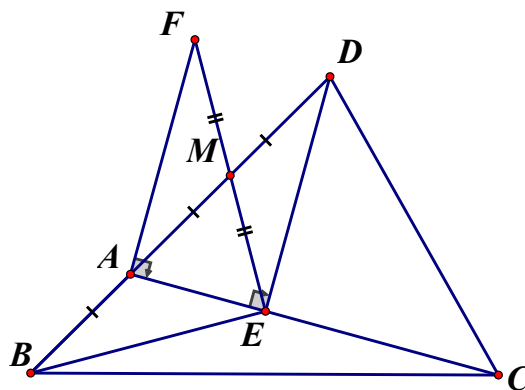
Câu 11. (HSG 7 Huyện Xuân Trường 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^\circ, \widehat{C} = 15^\circ$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M, D sao cho $BA = AM = MD$. Kẻ DE vuông góc với AC tại E

a) Chứng minh rằng $\triangle AME$ đều

b) Chứng minh rằng $EC = ED$

Lời giải



a) $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ(1)$
 (tính chất góc ngoài tam giác)

Lấy điểm F thuộc tia đối của tia ME sao cho: $MF = ME$

$$\Delta AMF = \Delta DME(c.g.c) \Rightarrow \begin{cases} AF = DE \\ \sphericalangle AFM = \sphericalangle DEM \end{cases}$$

Chứng minh được

Vì $\sphericalangle AFM = \sphericalangle DEM(cmt) \Rightarrow AF // DE$

Vì $AF // DE(cmt)$, mà $DE \perp AC(gt) \Rightarrow AF \perp AC \Rightarrow \sphericalangle FAE = 90^\circ$

Chứng minh được: $\Delta AFE = \Delta EDA(c.g.c) \Rightarrow EF = AD \Rightarrow ME = MA$

$\Rightarrow \Delta AME$ cân tại M (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta AME$ đều

b) Nối E với B

Ta có ΔAME đều (câu a) $\Rightarrow AM = AE$, mà $AM = AB(gt)$

Từ đó ta có $AB = AE \Rightarrow \Delta ABE$ cân tại A

$\sphericalangle BAC = 180^\circ - (45^\circ + 15^\circ) = 120^\circ \Rightarrow \sphericalangle ABE = \sphericalangle AEB = 30^\circ$

ΔADE vuông tại E , $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ (câu a) $\Rightarrow \sphericalangle ADE = 30^\circ$

ΔBED có: $\sphericalangle BEB = \sphericalangle BDE (= 30^\circ) \Rightarrow \Delta BED$ cân tại $E \Rightarrow ED = EB(3)$

Ta có: $\sphericalangle ECB = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABE = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ \Rightarrow \Delta BEC$ cân tại $E \Rightarrow EB = EC(4)$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow EC = ED$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vn-teach.com>