

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Tìm nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp (với C là hằng số tùy ý)

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$
$\int \sin x dx = -\cos x + C.$	$\int \cos x dx = \sin x + C.$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	$\int e^x dx = e^x + C.$

Một số nguyên tắc tính cơ bản

9 Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\frac{3}{4} \frac{3}{4} \frac{3}{4}$ khai triển.

9 Tích các hàm mũ $\frac{3}{4} \frac{3}{4} \frac{3}{4}$ khai triển theo công thức mũ.

9 Bậc chẵn của sin và cosin $\frac{3}{4} \frac{3}{4} \frac{3}{4}$ Hạ bậc: $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a, \cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a.$

9 Chứa tích các căn thức của $x \frac{3}{4} \frac{3}{4} \frac{3}{4}$ chuyển về lũy thừa.

Câu 1. Tìm:

1) $\int x^5 dx$;	2) $\int x^{\sqrt{2}} dx$	3) $\int x^{-1} dx$.	4) $\int x^6 dx$
5) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.	6) $\int \frac{1}{x^2} dx$;	7) $\int x^{\frac{1}{2}} dx$	8) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.
9) $\int \frac{1}{x^3} dx$;	10) $\int \sqrt{x} dx (x > 0)$;	11) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx (x > 0)$.	12) $\int \frac{(x+2)^2}{x^4} dx$
13) $\int \sqrt{x} (7x^2 + 6) dx$	14) $\int (3x+4) \sqrt[3]{x} dx$	15) $\int \frac{(2x+3)^2}{\sqrt{x}} dx$	16) $\int (2x^2 - 4x^5 + 6) dx$
17) $\int (x+3)(-2-x) dx$	18) $\int \frac{x^6 - 7x^3}{x} dx, (x > 0)$	19) $\int x^{\sqrt{2}} dx$;	20) $\int \frac{4}{x^3} dx$;
21) $\int \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{x^4}} dx$;	22) $\int \left(x^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} x^{-2} \right) dx$	23) $\int \frac{1}{-x} dx$;	24) $\int \frac{4}{11x} dx$;
25) $\int \frac{x^3 - 1}{x} dx$.	26) $\int x^{\frac{1}{3}} dx$	27) $\int \sqrt{\frac{1}{x^7}} dx$;	28) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^4} \sqrt[4]{x^5}} dx$
29) $\int \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 dx$	30) $\int \frac{(x-3)(x+1)}{x} dx$	31) $\int \left(3x^2 - \frac{4}{x} \right) (2x+5) dx$	

--	--	--	--

Lời giải

$$1) \int x^5 dx = \frac{1}{6} x^6 + C$$

$$2) \int x^{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}+1} x^{\sqrt{2}+1} + C$$

$$3) \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$4) \int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7 + C$$

$$5) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

$$6) \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$7) \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$$

$$8) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

$$9) \int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = -\frac{1}{2} x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$10) \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

$$11) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C$$

$$12) \int \frac{(x+2)^2}{x^4} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{4}{x^4} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + 4 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{4}{3x^3} + C$$

$$13) \int \sqrt{x} (7x^2 + 6) dx = \int 7x^{\frac{5}{2}} dx + \int 6x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= 2x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}} + C = 2\sqrt{x} (x^3 + 2x) + C$$

$$14) \int (3x+4)\sqrt[3]{x} dx = \left(\frac{9}{7}x^2 + 3x \right) \sqrt[3]{x} + C$$

$$15) \int \frac{(2x+3)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{4x^2+12x+9}{\sqrt{x}} dx = \left(\frac{8}{5}x^2 + 8x + 18 \right) \sqrt{x} + C$$

$$16) \int (2x^2 - 4x^5 + 6) dx = \int 2x^2 dx - \int 4x^5 dx + \int 6 dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^6 + 6x + C$$

$$17) \int (x+3)(-2-x) dx = \int (-x^2 - 5x - 6) dx = -\int x^2 dx - \int 5x dx - \int 6 dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 6x + C$$

$$18) \int \frac{x^6 - 7x^3}{x} dx, (x > 0) = \int (x^5 - 7x^2) dx = \int x^5 dx - 7 \int x^2 dx = \frac{x^6}{6} - \frac{7x^3}{3} + C$$

$$19) \int x^{\sqrt{2}} dx = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + C$$

$$20) \int \frac{4}{x^3} dx = 4 \int x^{-3} dx = 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + C = -2x^{-2} + C$$

$$21) \int \frac{2}{3} \sqrt{x^{\frac{3}{4}}} dx = \frac{2}{3} \int x^{\frac{3}{8}} dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^{\frac{11}{8}}}{\frac{11}{8}} + C = \frac{16x^{\frac{11}{8}}}{33} + C$$

$$22) \int \left(x^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}x^{-2} \right) dx = \int x^{\frac{1}{4}} dx + \frac{1}{2} \int x^{-2} dx = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2x} + C$$

$$23) \int \frac{1}{-x} dx = - \int \frac{1}{x} dx = -\ln|x| + C$$

$$24) \int \frac{4}{11x} dx = \frac{4}{11} \int \frac{1}{x} dx = \frac{4}{11} \ln|x| + C$$

$$25) \int \frac{x^3 - 1}{x} dx = \int \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) dx = \int x^2 dx - \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + C$$

$$26) \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$$

$$27) \int \sqrt{\frac{1}{x^7}} dx = \int x^{-\frac{7}{2}} dx = -\frac{2}{5}x^{-\frac{5}{2}} + C$$

$$28) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^{\frac{4}{5}}}} dx = \int x^{-\frac{4}{15}} dx = \frac{15}{11}x^{\frac{11}{15}} + C$$

$$\begin{aligned}
 29) \quad & \int \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 dx = \int \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - 2x + C \\
 30) \quad & \int \frac{(x-3)(x+1)}{x} dx = \int \left(x - 2 - \frac{3}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 2x - 3 \ln |x| + C \\
 31) \quad & \int \left(3x^2 - \frac{4}{x} \right) (2x+5) dx = \int \left(6x^3 + 15x^2 - 8 - \frac{20}{x} \right) dx \\
 & = \frac{3}{2}x^4 + 5x^3 - 8x - 20 \ln |x| + C.
 \end{aligned}$$

Câu 2. Tìm:

1) $\int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} dx$;	2) $\int \left(1 + 3 \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx$	3) $\int \frac{2 \cos^3 x + 3}{\cos^2 x} dx$	4) $\int (5 \sin x - 6 \cos x) dx$;
5) $\int \sin^2 2x dx + \int \cos^2 2x dx$	6) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$	7) $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$	8) $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx - \int \sin^4 \frac{x}{2} dx$
9) $\int \tan^2 x dx$	10) $\int (-\cos x) dx$	11) $\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx$	12) $\int (3 \sin x - 4 \cos x) dx$;
13) $\int (7 + 5 \cot^2 x) dx$	14) $\int 2 \sin x dx$	15) $\int (\cos x + x^3) dx$	16) $\int \left(\frac{-x^4}{2} - 3 \cos x \right) dx$
17) $\int \left(2 \cos x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx$	18) $\int (3\sqrt{x} - 4 \sin x) dx$	19) $\int \left(x + \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx$	20) $\int (2 \tan x + \cot x)^2 dx$
21) $\int 3 \cos x dx$	22) $\int (\sin x + \cos x) dx$	23) $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$	24) $\int (1 + \tan^2 x) dx$
25) $\int 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$			

Lời giải

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} dx = \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C ; \\
 2) \quad & \int \left(1 + 3 \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int \left(1 + 3 \cdot \frac{1 - \cos x}{2} \right) dx \\
 & = \frac{1}{2} \int (5 - 3 \cos x) dx = \frac{1}{2} (5x - 3 \sin x) + C \\
 3) \quad & \int \frac{2 \cos^3 x + 3}{\cos^2 x} dx = 2 \int \cos x dx + 3 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \sin x + 3 \tan x + C \\
 4) \quad & \int (5 \sin x - 6 \cos x) dx = -5 \cos x - 6 \sin x + C
 \end{aligned}$$

$$5) \int \sin^2 2x dx + \int \cos^2 2x dx = \int (\sin^2 2x + \cos^2 2x) dx = \int 1 dx = x + C$$

$$6) \int \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) dx = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{x - \sin x}{2} + C$$

$$7) \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \sin x + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C$$

$$8) \int \cos^4 \frac{x}{2} dx - \int \sin^4 \frac{x}{2} dx = \int \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$9) \int \tan^2 x dx = \int [(\tan^2 x + 1) - 1] dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C.$$

$$10) \int (-\cos x) dx = - \int \cos x dx = -\sin x + C$$

$$11) \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1 dx = \tan x - x + C$$

$$12) \int (3 \sin x - 4 \cos x) dx = \int 3 \sin x dx - \int 4 \cos x dx = 3 \int \sin x dx - 4 \int \cos x dx = 3(-\cos x) - 4 \sin x + C = -3 \cos x - 4 \sin x + C$$

$$13) \int (7 + 5 \cot^2 x) dx = \int [2 + 5(1 + \cot^2 x)] dx = \int \left(2 + 5 \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = 2 \int dx + 5 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 2x - 5 \cot x + C$$

$$14) \int 2 \sin x dx = 2 \int \sin x dx = -2 \cos x + C$$

$$15) \int (\cos x + x^3) dx = \int \cos x dx + \int x^3 dx = \sin x + \frac{x^4}{4} + C$$

$$16) \int \left(\frac{-x^4}{2} - 3 \cos x \right) dx = -\frac{1}{2} \int x^4 dx - 3 \int \cos x dx = -\frac{x^5}{10} - 3 \sin x + C$$

$$17) \int \left(2 \cos x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx = 2 \sin x + 6\sqrt{x} + C$$

$$18) \int (3\sqrt{x} - 4 \sin x) dx = 2x\sqrt{x} + 4 \cos x + C$$

$$19) \text{ Ta có: } \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos 2 \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\text{Do đó: } \int \left(x + \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int \left(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x \right) dx = \frac{x^2 + x - \sin x}{2} + C$$

$$(2 \tan x + \cot x)^2 = 4 \tan^2 x + 4 + \cot^2 x = \frac{4}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

20) Ta có:

Do đó:

$$\begin{aligned} \int (2 \tan x + \cot x)^2 dx &= \int \left(\frac{4}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx \\ &= 4 \tan x - \cot x - x + C \end{aligned}$$

$$21) \int 3 \cos x dx = 3 \int \cos x dx = 3 \sin x + C$$

$$22) \int (\sin x + \cos x) dx = \int \sin x dx + \int \cos x dx = -\cos x + \sin x + C.$$

$$23) \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\cot x - \tan x + C$$

$$24) \int (1 + \tan^2 x) dx = \int \left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \tan x + C.$$

$$25) \int 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

Câu 3. Tìm:

1) $\int e^{4x+1} dx$	2) $\int 2^{4x+3} dx$	3) $\int \frac{1}{7^{x+1}} dx$	4) $\int (e^x + x^e) dx$
5) $\int 4^x dx$	6) $\int e^{3x} dx$	7) $\int 2^x \cdot 3^x dx$	8) $\int e^{5x} dx$
9) $\int \frac{1}{2024^x} dx$	10) $\int (2^x + x^2) dx$	11) $\int (2^x \cdot 3^{2x+1}) dx$	12) $\int \frac{3^x + 4^x + 1}{5^x} dx$
13) $\int (5^x + 1)(5^x - 1) dx$	14) $\int e^{-0,5x} dx$	15) $\int 2^{x-1} \cdot 5^{2x+1} dx$	16) $\int \left(2e^x + \frac{1}{3^x} \right) dx$
17) $\int (x^2 + 2^x) dx$	18) $\int (2^x + 3^x)^2 dx$	19) $\int (e^x - e^{-x})^2 dx$	

Lời giải

$$1) \int e^{4x+1} dx = e \int (e^4)^x dx = e \cdot \frac{(e^4)^x}{\ln e^4} + C = \frac{e^{4x+1}}{4} + C$$

$$2) \int 2^{4x+3} dx = 8 \int 2^{4x} dx = 8 \int (2^4)^x dx = 8 \int 16^x dx = 8 \cdot \frac{16^x}{\ln 16} + C = \frac{2^{4x+1}}{\ln 2} + C$$

$$3) \int \frac{1}{7^{x+1}} dx = \frac{1}{7} \int \frac{1}{7^x} dx = \frac{1}{7} \int \left(\frac{1}{7} \right)^x dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{\left(\frac{1}{7} \right)^x}{\ln \frac{1}{7}} + C = \frac{-1}{7^{x+1} \ln 7} + C$$

$$4) \int (e^x + x^e) dx = \int e^x dx + \int x^e dx = e^x + \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$$

$$5) \int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C$$

$$6) \int e^{3x} dx = \int (e^3)^x dx = \frac{(e^3)^x}{\ln e^3} + C = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

$$7) \int 2^x \cdot 3^x dx = \int 6^x dx = \frac{6^x}{\ln 6} + C$$

$$8) \int e^{5x} dx = \int (e^5)^x dx = \frac{(e^5)^x}{\ln e^5} + C = \frac{e^{5x}}{5} + C$$

$$9) \int \frac{1}{2024^x} dx = \int \left(\frac{1}{2024} \right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2024} \right)^x}{\ln \frac{1}{2024}} + C = \frac{-1}{2024^x \ln 2024} + C$$

$$10) \int (2^x + x^2) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^3}{3} + C$$

$$11) \int (2^x \cdot 3^{2x+1}) dx = 3 \int 8^x dx = \frac{3 \cdot 18^x}{\ln 18} + C$$

$$12) \int \frac{3^x + 4^x + 1}{5^x} dx = \int \left[\left(\frac{3}{5} \right)^x + \left(\frac{4}{5} \right)^x + \left(\frac{1}{5} \right)^x \right] dx$$

$$= \frac{3^x}{5^x (\ln 3 - \ln 5)} + \frac{4^x}{5^x (\ln 4 - \ln 5)} - \frac{1}{5^x \ln 5} + C.$$

$$13) \int (5^x + 1)(5^x - 1) dx = \int (25^x - 1) dx = \frac{25^x}{\ln 25} - x + C = \frac{25^x}{2 \ln 5} - x + C$$

$$14) \int e^{-0,5x} dx = \int (e^{-0,5})^x dx = \frac{(e^{-0,5})^x}{\ln e^{-0,5}} + C = \frac{e^{-0,5x}}{-0,5} + C = -2e^{-0,5x} + C ;$$

$$15) \int 2^{x-1} \cdot 5^{2x+1} dx = \int \frac{2^x}{2} \cdot 5 \cdot 25^x dx = \frac{5}{2} \int 50^x dx = \frac{5}{2} \cdot \frac{50^x}{\ln 50} + C$$

$$16) \int \left(2e^x + \frac{1}{3^x} \right) dx = 2e^x - \frac{1}{3^x \ln 3} + C$$

$$17) \int (x^2 + 2^x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$18) \text{Ta có: } (2^x + 3^x)^2 = 4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x$$

$$\text{Do đó: } \int (2^x + 3^x)^2 dx = \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx = \frac{4^x}{2 \ln 2} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{2 \ln 3} + C$$

$$19) \int (e^x - e^{-x})^2 dx = \int (e^{2x} + e^{-2x} - 2) dx = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} - 2x + C$$

Câu 4. Tìm:

1) $\int \frac{2 \sin x}{3} dx$	2) $\int \frac{3^{x-1}}{2} dx$	3) $\int 2^x \ln 2 dx$;	4) $\int 2x \cos(x^2) dx$
5) $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$	6) $\int \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3} dx$ trên (0; +∞)	7) $f(x) = 3 \cos x - \frac{4}{x}$	8) $g(x) = (2x + 1)^3$
9) $\int 6x^3 dx$	10) $\int 4^{x+1} dx$	11) $\int 6(1 + \cot^2 x) dx$	12) $\int (3x^2 - \cos x) dx$;
13) $\int \left(3 \sin x - \frac{2}{\sqrt{x^3}} \right) dx$;	14) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 5^x \right) dx$	15) $\int t(t^2 - 2) dt$;	16) $\int \frac{2t+1}{t} dt$
17) $\int 2x(1 + 3x^3) dx$	18) $\int \frac{x^4 + x + 1}{x^3} dx$	19) $\int (x+2)(x^2 - 2x + 4) dx$	20) $\int \frac{3x^2 - 1}{x^3} dx$
21) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$	22) $\int \frac{\sin^3 x - 2}{\sin^2 x} dx$		

Lời giải

$$1) \int \frac{2 \sin x}{3} dx = \frac{2}{3} \int \sin x dx = -\frac{2}{3} \cos x + C ;$$

$$2) \int \frac{3^{x-1}}{2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{3^x}{3} dx = \frac{1}{6} \int 3^x dx = \frac{3^x}{6 \ln 3} + C$$

$$3) \int 2^x \ln 2 dx = \int (2^x)' dx = 2^x + C$$

$$4) \int 2x \cos(x^2) dx = \int [\sin(x^2)]' dx = \sin(x^2) + C$$

$$5) \int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{x + \sin x}{2} + C$$

$$6) \int \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3} dx = \int \frac{(x+3)(x+4)}{x+3} dx = \int (x+4) dx = \frac{x^2}{2} + 4x + C$$

$$7) \int \left(3 \cos x - \frac{4}{x} \right) dx = 3 \int \cos x dx - 4 \int \frac{1}{x} dx = 3 \sin x - 4 \ln |x| + C ;$$

$$8) \int (2x+1)^3 dx = \int (8x^3 + 12x^2 + 6x + 1) dx = 8 \int x^3 dx + 12 \int x^2 dx + 6 \int x dx + \int 1 dx \\ = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + C.$$

$$9) \int 6x^3 dx = 6 \int x^3 dx = 6 \cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{3}{2}x^4 + C$$

$$10) \int 4^{x+1} dx = \int 4 \cdot 4^x dx = 4 \int 4^x dx = 4 \cdot \frac{4^x}{\ln 4} + C = \frac{4^{x+1}}{\ln 4} + C$$

$$11) \int 6(1 + \cot^2 x) dx = 6 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -6 \cot x + C$$

$$12) \int (3x^2 - \cos x) dx = 3 \int x^2 dx - \int \cos x dx = x^3 - \sin x + C$$

$$13) \int \left(3 \sin x - \frac{2}{\sqrt{x^3}} \right) dx = 3 \int \sin x dx - 2 \int x^{-\frac{3}{2}} dx = -3 \cos x + 4x^{-\frac{1}{2}} + C = -3 \cos x + \frac{4}{\sqrt{x}} + C$$

$$14) \int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 5^x \right) dx = 2 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 5^x dx = 2 \tan x - \frac{5^x}{\ln 5} + C$$

$$15) \int t(t^2 - 2) dt = \int (t^3 - 2t) dt = \int t^3 dt - 2 \int t dt = \frac{t^4}{4} - 2 \cdot \frac{t^2}{2} + C = \frac{t^4}{4} - t^2 + C$$

$$16) \int \frac{2t+1}{t} dt = \int \left(2 + \frac{1}{t} \right) dt = \int 2 dt + \int \frac{1}{t} dt = 2t + \ln |t| + C$$

$$17) \int 2x(1 + 3x^3) dx = \int (2x + 6x^4) dx = x^2 + \frac{6}{5}x^5 + C = x^2 \left(1 + \frac{6x^3}{5} \right) + C$$

$$18) \int \frac{x^4 + x + 1}{x^3} dx = \int \left(x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \left(x + \frac{1}{x^2} + x^{-3} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot x^{-2} + C.$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$$

$$19) \int (x+2)(x^2 - 2x + 4) dx = \int (x^3 + 8) dx = \int x^3 dx + \int 8 dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + 8x + C$$

$$20) \int \frac{3x^2 - 1}{x^3} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx - \int x^{-3} dx = 3 \ln |x| - \frac{1}{-2} x^{-2} + C = 3 \ln |x| + \frac{1}{2x^2} + C$$

$$21) \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \int (e^2)^x dx - \int e^x dx + \int dx$$

$$= \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} - e^x + x + C = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C;$$

$$22) \int \frac{\sin^3 x - 2}{\sin^2 x} dx = \int \sin x dx + 2 \int \frac{-1}{\sin^2 x} dx = -\cos x + 2 \cot x + C$$

Dạng 2. Nguyên hàm có điều kiện

Câu 5. Tìm hàm số $y = f(x)$, biết $f'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \ (x > 0)$ và $f(1) = 1$.

Lời giải

$$f(x) = \int \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + C$$

$$f(1) = 5 + C = 1 \Rightarrow C = -4$$

$$\text{Vậy } f(x) = 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 4$$

Câu 6. Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng $f'(x) = 2x - 6e^{-2x}$ và $f(0) = -2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x - 6e^{-2x}) dx = 2 \int x dx - 6 \int (e^{-2})^x dx$$

$$= x^2 - 6 \cdot \frac{(e^{-2})^x}{\ln e^{-2}} + C = x^2 + 3e^{-2x} + C. \quad f(0) = -2 \text{ suy ra } 3 + C = -2, \text{ suy ra } C = -5.$$

$$\text{Vậy } f(x) = x^2 + 3e^{-2x} - 5$$

Câu 7. Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng:

a) $f'(x) = 2x^3 - 4x + 1, f(1) = 0$,

b) $f'(x) = 5 \cos x - \sin x, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Lời giải

a) $f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x^3 - 4x + 1) dx = \frac{x^4}{2} - 2x^2 + x + C$

$$f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^2 + x + \frac{1}{2}$$

b) $f(x) = \int f'(x) dx = \int (5 \cos x - \sin x) dx = 5 \sin x + \cos x + C$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow 5 + C = 1 \Rightarrow C = -4 \Rightarrow f(x) = 5 \sin x + \cos x - 4$$

Câu 8. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $(1; 2)$ và có hệ số góc của tiếp tuyến tại mỗi điểm $(x; f(x))$ là $\frac{1-x}{x^2}$ với $x > 0$. Tìm hàm số $f(x)$.

Lời giải

Theo giả thiết, ta có $f'(x) = \frac{1-x}{x^2}$ với $x > 0$ và $f(1) = 2$.

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{1-x}{x^2} dx = \int \left(x^{-2} - \frac{1}{x} \right) dx = -\frac{1}{x} - \ln x + C$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow -1 + C = 2 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x} - \ln x + 3$$

Câu 9. Tìm đạo hàm của hàm số $F(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 4} - x)$. Từ đó, tìm $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$.

Lời giải

Ta có $F'(x) = \left[\ln(\sqrt{x^2 + 4} - x) \right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} - x} \cdot (\sqrt{x^2 + 4} - x)'$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} - x} \cdot \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} - 1 \right) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} (x \in \mathbb{R}).$$

Suy ra $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = \int [-F'(x)] dx = -\int F'(x) dx = -F(x) + C$

$$= -\ln(\sqrt{x^2 + 4} - x) + C$$

Câu 10. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + 3x^2$, biết $F(0) = 1$.

Lời giải

Ta có: $\int (2x + 3x^2) dx = \int 2x dx + \int 3x^2 dx = \int (x^2)' dx + \int (x^3)' dx = x^2 + x^3 + C$

Vì $F(0) = 1$ nên $0^2 + 0^3 + C = 1$, suy ra $C = 1$.

Vậy $F(x) = x^2 + x^3 + 1$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ với $x \neq 0$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa mãn $F(-2) = 0$.

Lời giải

Ta có $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ nên $F(x) = \ln|x| + C (x \neq 0)$.

Do $F(-2) = 0$ nên $\ln|-2| + C = 0$ hay $C = -\ln 2$.

Vậy $F(x) = \ln|x| - \ln 2 (x \neq 0)$.

Câu 12. Cho $G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $g(x) = e^x$ thỏa mãn $G(0) = -3$. Tính $G(1)$.

Lời giải

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

$G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $g(x) = e^x$ nên có dạng $G(x) = e^x + C$.

Vì $G(0) = -3$ nên $e^0 + C = -3$ hay $1 + C = -3$, suy ra $C = -4$.

Do đó $G(x) = e^x - 4$. Vậy $G(1) = e - 4$.

Câu 13. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3x^2 - 2x$, biết $F(1) = 5$.

Lời giải

Ta có: $\int (3x^2 - 2x) dx = \int 3x^2 dx - \int 2x dx = x^3 - x^2 + C$.

Vì $F(1) = 5$ nên $1^3 - 1^2 + C = 5$, suy ra $C = 5$. Vậy $F(x) = x^3 - x^2 + 5$.

Câu 14. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 4x^3 + 3x^2$, biết $F(1) - f'(1) = -16$.

Lời giải

Ta có:

$\int (4x^3 + 3x^2) dx = \int 4x^3 dx + \int 3x^2 dx = x^4 + x^3 + C$ và $f'(x) = 12x^2 + 6x$. Vì $F(1) - f'(1) = -16$ nên $1^4 + 1^3 + C - 12 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -16$, suy ra $C = 0$.

Vậy $F(x) = x^4 + x^3$.

Câu 15. a) Tìm $\int (1 + \tan^2 x) dx$

b) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x$, biết $F(2\pi) = 0$.

Lời giải

a) $\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.

b) $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

$F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ nên có dạng $F(x) = -\cos x + C$.

Vì $F(2\pi) = 0$ nên $-\cos 2\pi + C = 0$ hay $-1 + C = 0$, suy ra $C = 1$.

Vậy $F(x) = 1 - \cos x$.

Câu 16. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2^x$ thỏa mãn $F(0) = 1$.

Lời giải

Ta có $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ nên $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Do $F(0) = 1$ nên $\frac{2^0}{\ln 2} + C = \frac{1}{\ln 2} + C = 1$ hay $C = 1 - \frac{1}{\ln 2}$.

Vậy $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + 1 - \frac{1}{\ln 2}$.

Câu 17. (Mã 123 2017) Xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \int (3 - 5\sin x) dx = 3x + 5\cos x + C$

Theo giả thiết $f(0) = 10$ nên $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$.

Câu 18. (Sở Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2019$.

Lời giải

Ta có $\int f(x) dx = \int (2x + e^x) dx = x^2 + e^x + C$.

Có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 2019$.

Suy ra
$$\begin{cases} F(x) = x^2 + e^x + C \\ F(0) = 2019 \end{cases} \Rightarrow 1 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2018$$
.

Vậy $F(x) = x^2 + e^x + 2018$.

Dạng 3. Ứng dụng

1. BÀI TOÁN VỀ VẬN TỐC

Phương pháp giải

- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường: $s(t) = \int v(t) dt$.
- Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 1. Vận tốc của một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng tại thời điểm t là $v(t) = 160 - 9,8t$ (m/s) (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên). Tính quãng đường đi được của viên đạn kể từ khi bắn lên cho đến thời điểm t ?

Bài giải

Quãng đường đi được của viên đạn là
$$s(t) = \int v(t) dt = \int (160 - 9,8t) dt = 160t - 9,8 \frac{t^2}{2} + C.$$

2. BÀI TOÁN VỀ GIA TỐC

Phương pháp giải

- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường: $v(t) = \int a(t) dt$.
- Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 2. Một viên đạn được bắn lên trời (phương thẳng đứng) với vận tốc là 72 m/s bắt đầu từ 2 m. Hãy xác định chiều cao của viên đạn sau thời gian 5 s kể từ lúc bắn.

Bài giải

Ta có vận tốc của viên đạn tại thời điểm t là $v(t) = \int -9,8dt = -9,8t + C_1$.

Do $v(0) = 72$ nên $v(0) = -9,8 \cdot 0 + C_1 = 72 \Leftrightarrow C_1 = 72 \Rightarrow v(t) = -9,8t + 72$.

Độ cao của viên đạn tại thời điểm t là

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (-9,8t + 72)dt = -4,9t^2 + 72t + C_2.$$

Vì $s(0) = 2$ nên $s(0) = -4,9 \cdot 0^2 + 72 \cdot 0 + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2 \Rightarrow s(t) = -4,9t^2 + 72t + 2$

Vậy sau khoảng thời gian $5s$ kể từ lúc bắn, viên đạn ở độ cao

$$s(5) = -4,9 \cdot 5^2 + 72 \cdot 5 + 2 = 239,5(m).$$

3. BÀI TOÁN VỀ KINH TẾ

Phương pháp giải

- Nếu biết $f(x)$ là hàm giá trị biên, thì hàm mục tiêu sẽ là $\int f(x)dx = F(x) + C$.

- Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 3. Một công ti cho biết hàm chi phí biên của việc sản xuất sản phẩm A là $MC = 3x^2 + 2x + 3$.

Hỏi hàm tổng chi phí của việc sản xuất sản phẩm A là gì?

Bài giải

Hàm tổng chi phí là $TC(x) = \int (MC)dx = \int (3x^2 + 2x + 3)dx = x^3 + x^2 + 3x + C_0$.

Khi $x = 0$ thì $TC(x) = C_0$. Giá trị này gọi là định phí của công ti (FC nghĩa là fix cost) không phụ thuộc vào sản lượng sản xuất. Do đó ta có $TC(x) = x^3 + x^2 + 3x + FC$.

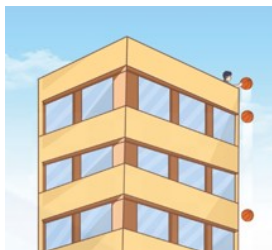
Câu 19. Vận tốc của một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng tại thời điểm t là $v(t) = 180 - 9,8t(m/s)$ (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên). Tính quãng đường đi được của viên đạn kể từ khi bắn lên cho đến thời điểm t .

Lời giải

Quãng đường đi được của viên đạn là

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (180 - 9,8t)dt = 180t - 9,8 \frac{t^2}{2} + C.$$

Câu 20. Khi được thả từ độ cao $20m$, một vật rơi với gia tốc không đổi $a = 10m/s^2$. Sau khi rơi được t giây thì vật có tốc độ bao nhiêu và đi được quãng đường bao nhiêu?



Lời giải

Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của vật, $s(t)$ là quãng đường vật đi được cho đến thời điểm t giây kể từ khi vật bắt đầu rơi.

Vì $a(t) = v'(t)$ nên $v(t) = \int a(t) dt = \int 10 dt = 10t + C.$

Ta có $v(0) = 0$ nên $10.0 + C = 0$ hay $C = 0$. Vậy $v(t) = 10t (m/s)$.

Vì $v(t) = s'(t)$ nên $s(t) = \int v(t) dt = \int 10t dt = 5t^2 + C.$

Ta có $s(0) = 0$ nên $5.0^2 + C = 0$ hay $C = 0$. Vậy $s(t) = 5t^2 (m)$.

Vật rơi từ độ cao $20m$ nên $s(t) \leq 20$, suy ra $0 \leq t \leq 2$.

Vậy sau khi vật rơi được t giây ($0 \leq t \leq 2$) thì vật có tốc độ $v(t) = 10m/s$ và đi được quãng đường $s(t) = 5t^2$ mét.

Câu 21. Một ô tô đang chạy với tốc độ $19m/s$ thì hãm phanh và chuyển động chậm dần với tốc độ $v(t) = 19 - 2t (m/s)$. Kể từ khi hãm phanh, quãng đường ô tô đi được sau 1 giây, 2 giây, 3 giây là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi $s(t)$ là quãng đường ô tô đi được kể từ khi hãm phanh cho đến thời điểm t giây.

Do $s'(t) = v(t)$, nên

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (19 - 2t) dt = 19 \int dt - \int 2t dt = 19t - t^2 + C.$$

Mặt khác, do mốc thời gian được tính kể từ khi hãm phanh, nên $s(0) = 0$.

suy ra $19.0 - 0^2 + C = 0 \Rightarrow C = 0$.

Vậy quãng đường ô tô đi được kể từ khi hãm phanh cho đến thời điểm t giây là $s(t) = 19t - t^2$.

Quãng đường ô tô đi được sau 1 giây hãm phanh là $s(1) = 19.1 - 1^2 = 18(m)$.

Quãng đường ô tô đi được sau 2 giây hãm phanh là $s(2) = 19.2 - 2^2 = 34(m)$.

Quãng đường ô tô đi được sau 3 giây hãm phanh là $s(3) = 19.3 - 3^2 = 48(m)$.

Câu 22. Một quả bóng được ném lên từ độ cao $24,5m$ với vận tốc được tính bởi công thức $v(t) = -9,8t + 19,6 (m/s)$.

a) Viết công thức tính độ cao của quả bóng theo thời gian t .

b) Sau bao nhiêu lâu kể từ khi ném lên thì quả bóng chạm đất?

Lời giải

a) Gọi $h(t)$ là độ cao của quả bóng tại thời điểm $t(h(t))$ tính theo mét, t tính theo giây).

Khi đó, ta có: $h(t) = \int (-9,8t + 19,6) dt = -4,9t^2 + 19,6t + C.$

Mà quả bóng được ném lên từ độ cao $24,5m$ tức là tại thời điểm $t=0$ thì $h=24,5$ hay $h(0)=24,5$. Suy ra $C=24,5$.

Vậy công thức tính độ cao $h(t)$ của quả bóng theo thời gian t là:

$$h(t) = -4,9t^2 + 19,6t + 24,5.$$

b) Khi quả bóng chạm đất thì $h(t)=0$. Ta có: $-4,9t^2 + 19,6t + 24,5 = 0$. Giải phương trình ta được $t = -1; t = 5$. Mà $t > 0$ nên $t = 5$.

Vậy sau 5 giây kể từ khi được ném lên thì quả bóng chạm đất.

Câu 23. Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 6 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng trong suốt 6 năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t) = 1,5t + 5$, trong đó $h(t)(cm)$ là chiều cao của cây khi kết thúc t (năm). Cây con khi được trồng cao $12cm$.

a) Tìm công thức chỉ chiều cao của cây sau t năm.

b) Khi được bán, cây cao bao nhiêu centimét?

Lời giải

a) $\int h'(t)dt = \int (1,5t + 5)dt = 0,75t^2 + 5t + C$

Vậy công thức chỉ chiều cao của cây sau t năm là: $0,75t^2 + 5t + C$

b) Đặt $H(t) = 0,75t^2 + 5t + C$

Tại $t=0$ thì $H(0)=12$ suy ra $C=12$

Khi được bán, tức là sau 6 năm thì cây cao: $H(6) = 0,75.6^2 + 5.6 + 12 = 69cm$

Câu 24. Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$ trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 15$), $B'(t)$ tính bằng khách/giờ.

Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.

a) Viết công thức của hàm số $B(t)$ biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội với $0 \leq t \leq 15$.

b) Sau 3 giờ sẽ có bao nhiêu khách tham dự lễ hội?

c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là bao nhiêu?

d) Tại thời điểm nào thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất?

Lời giải

a) $\int B'(t)dt = \int (20t^3 - 300t^2 + 1000t)dt = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + C$

$B(1) = 500 \Leftrightarrow 5 - 100 + 500 + C = 500 \Leftrightarrow C = 95$

Vậy $B(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + 95$

b) $B(3) = 5.3^4 - 100.3^3 + 500.3^2 + 95 = 2300$

Vậy sau 3h sẽ có 2300 khách tham dự lễ hội

$$B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=5 \\ t=10 \end{cases}$$

c)

Bảng biến thiên:

t	0	5	10	15			
$B'(t)$		+	0	-	0	+	
$B(t)$	95	↗	3220	↘	95	↗	28220

Từ bảng biến thiên ta thấy, $B(t)$ max tại $t=15$

Vậy số lượng khách tham dự lớn nhất là: 28220 khách

$$B''(t) = 60t^2 - 600t + 1000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{15 - 5\sqrt{3}}{3} \\ t = \frac{15 + 5\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

d)

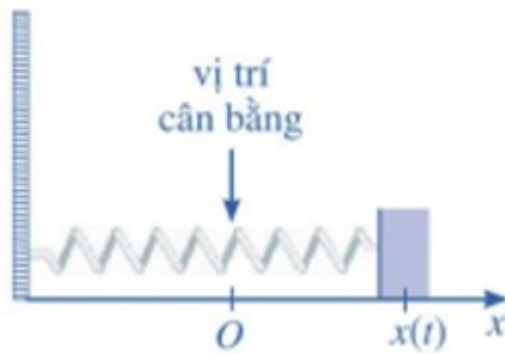
Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{15 - 5 \sqrt{3}}{3}$	$\frac{15 + 5 \sqrt{3}}{3}$	15		
y'		+	0	-	0	+
y	1000			15000		

Từ bảng biến thiên ta thấy, $B'(t)$ max tại $t=15$

Vậy tại thời điểm $t=15$ giờ thì tốc độ thay đổi lượng khách tham gia dự lễ hội là lớn nhất

Câu 25. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như Hình, có vận tốc tức thời cho bởi $v(t) = 4\cos t$, trong đó t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng centimét/giây. Tại thời điểm $t=0$, con lắc đó ở vị trí cân bằng.



Phương trình chuyển động của con lắc đó được xác định bằng cách nào?

Lời giải

Giả sử con lắc chuyển động theo phương trình: $s = s(t)$. Suy ra $s'(t) = v(t)$, do đó $s(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$. Ta có:

$$\int v(t) dt = \int 4 \cos t dt = 4 \int \cos t dt = 4 \sin t + C.$$

Suy ra $s(t) = 4 \sin t + C$.

Tại thời điểm $t = 0$, ta có $s(0) = 0$, tức là $4 \sin 0 + C = 0$, hay $C = 0$.

Vậy phương trình chuyển động của con lắc là: $s(t) = 4 \sin t$.

Câu 26. Một xe ô tô đang chạy với tốc độ 72 km/h thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đó 80 m . Người lái xe phản ứng một giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t + 30 \text{ (m/s)}$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t (giây) kể từ lúc đạp phanh.

a) Lập công thức biểu diễn hàm số $s(t)$.

b) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là bao nhiêu giây?

c) Quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là bao nhiêu mét? Xe ô tô liệu có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật trên đường hay không?

Lời giải

a) Ta đã biết, công thức tính quãng đường $s(t)$ xe ô tô đi được trong t (giây) là một nguyên hàm của hàm $v(t)$. Do $\int (-10t + 30) dt = -5t^2 + 30t + C$ nên ta có: $s(t) = -5t^2 + 30t + C$ với C là hằng số nào đó. Do $s(0) = 0$ nên $C = 0$. Suy ra $s(t) = -5t^2 + 30t$.

b) Xe ô tô dừng hẳn khi $v(t) = 0$, tức là $-10t + 30 = 0$ hay $t = 3$.

Vậy thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 3 giây.

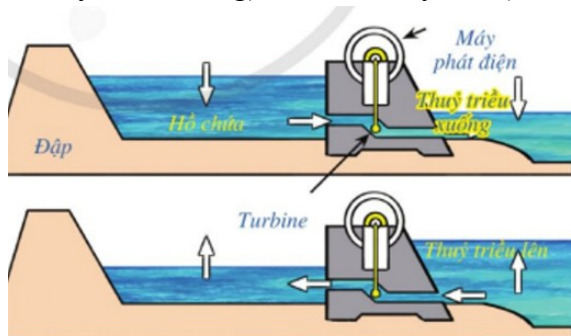
c) Ta có: tốc độ 72 km/h cũng là tốc độ 20 m/s .

Do đó, quãng đường xe ô tô còn di chuyển được kể từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn là: $s(3) = -5 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 = 45 \text{ (m)}$.

Vậy quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là: $20 + 45 = 65(m)$.

Do $65 < 80$ nên xe ô tô đã dừng hẳn trước khi va chạm với chướng ngại vật trên đường. Vì thế, tai nạn đã không xảy ra đối với xe ô tô đó.

Câu 27. Mức nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra (khi thủy triều xuống) và nước chảy vào (khi thủy triều lên).



Tốc độ thay đổi của mực nước trong hồ chứa được cho bởi hàm số $h'(t) = \frac{1}{216}(5t^2 - 120t + 480)$,

trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 24$), $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa là 6 m.

- Viết công thức xác định hàm số $h(t)$.
- Mực nước trong hồ chứa cao nhất và thấp nhất bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét)?
- Mực nước trong hồ chứa thay đổi nhanh nhất khi nào? Tốc độ thay đổi của mực nước trong hồ chứa khi đó là bao nhiêu?

Lời giải

a) Ta có: $\int h'(t) dt = \int \frac{1}{216}(5t^2 - 120t + 480) dt = \frac{1}{216} \int (5t^2 - 120t + 480) dt$

$$= \frac{5}{216} \int t^2 dt - \frac{120}{216} \int t dt + \frac{480}{216} \int dt = \frac{5}{648} t^3 - \frac{5}{18} t^2 + \frac{20}{9} t + C.$$

Suy ra $h(t) = \frac{5}{648} t^3 - \frac{5}{18} t^2 + \frac{20}{9} t + C$.

Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa là 6 m nên $h(0) = 6$, suy ra $C = 6$.

Vậy mực nước trong hồ chứa được cho bởi hàm số:

$$h(t) = \frac{5}{648} t^3 - \frac{5}{18} t^2 + \frac{20}{9} t + 6 (0 \leq t \leq 24).$$

b) Ta tìm $\min_{[0;24]} h(t)$ và $\max_{[0;24]} h(t)$.

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 5t^2 - 120t + 480 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 24t + 96 = 0 \Leftrightarrow t = 12 - 4\sqrt{3} \text{ hoặc } t = 12 + 4\sqrt{3}.$$

- Bảng biến thiên:

t	0	$12 - 4\sqrt{3}$	$12 + 4\sqrt{3}$	24	
$h'(t)$	+	0	-	0	+
$h(t)$	6	$h(12 - 4\sqrt{3}) \approx 11,1$	$h(12 + 4\sqrt{3}) \approx 0,9$	6	

Do đó, ta có: $\min_{[0;24]} h(t) = \min \{h(0); h(12 + 4\sqrt{3})\} = h(12 + 4\sqrt{3}) \approx 0,9$;

$$\max_{[0;24]} h(t) = \max \{h(24); h(12 - 4\sqrt{3})\} = h(12 - 4\sqrt{3}) \approx 11,1$$

Vậy mực nước trong hồ chứa cao nhất khoảng $11,1m$ và thấp nhất khoảng $0,9m$.

c) Ta tìm $\max_{[0;24]} h'(t)$.

$$h''(t) = \frac{1}{216}(10t - 120);$$

$$h''(t) = 0 \text{ khi } t = 12.$$

- Bảng biến thiên của hàm số $h'(t)$:

t	0	12	24
$h''(t)$	-	0	+
$h'(t)$	$\frac{20}{9}$	$-\frac{10}{9}$	$\frac{20}{9}$

Do đó, ta có: $\max_{[0;24]} h'(t) = \max \{h'(0); h'(24)\} = h'(24) = \frac{20}{9}$.

Vậy mực nước trong hồ chứa thay đổi nhanh nhất khi $t = 0$ và $t = 24$. Tốc độ thay đổi của mực nước trong hồ chứa khi đó là $\frac{20}{9} m/h$.

Câu 28. Cây cà chua khi trồng có chiều cao $5cm$. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số

$v(t) = -0,1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ (tính bằng centimét) là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t .

a) Viết công thức xác định hàm số $h(t)(t \geq 0)$.

b) Giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài bao lâu?

c) Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là bao nhiêu?

d) Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua sẽ cao bao nhiêu?

Lời giải

$$a) h(t) = \int v(t) dt = \int (-0,1t^3 + t^2) dt = -0,025t^4 + \frac{t^3}{3} + C (t \geq 0)$$

$$h(0) = -0,025 \cdot 0^4 + \frac{0^3}{3} + C = 5 \Rightarrow C = 5$$

$$\text{Vậy } h(t) = -0,025t^4 + \frac{t^3}{3} + 5$$

$$b) \text{ Xét hàm số } h(t) = -0,025t^4 + \frac{t^3}{3} + 5$$

$$h'(t) = v(t) = -0,1t^3 + t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (nghiệm kép)} \\ t = 10 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	10	$+\infty$
$v(t)$	+	0	-
$h(t)$	5	$265/3$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài 10 tuần

$$c) \text{ Từ bảng biến thiên ta thấy, chiều cao tối đa của cây cà chua đó là } \frac{265}{3} \text{ cm}$$

$$d) \text{ Xét } v(t) = -0,1t^3 + t^2$$

$$v'(t) = -0,3t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{20}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		0		$\frac{20}{3}$		$+\infty$
$v'(t)$		-	0	+	0	-	
$v(t)$	$+\infty$					$\frac{400}{27}$	
			0				$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua sẽ
cao $\frac{400}{27}cm$

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C) . Xét điểm $M(x; f(x))$ thay đổi trên (C) . Biết rằng, hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $k_M = (x - 1)^2$ và điểm M trùng với gốc toạ độ khi nó nằm trên trục tung. Tìm biểu thức $f(x)$.

Lời giải.

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x; f(x)) \in (C)$ là $k_M = f'(x)$. Do đó, hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 1)^2$. Lập luận tương tự Bài 13 và chú ý rằng $f(0) = 0$ ta được $f(x) = \frac{(x - 1)^3 + 1}{3}$ là hàm số cần tìm.

Câu 30. Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 160 - 9,8t(m/s)$. Tìm độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất):

a) Sau $t = 5$ giây;

b) Khi nó đạt độ cao lớn nhất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải.

Từ ý nghĩa cơ học của đạo hàm, ta đã biết độ cao $h(t)$ của viên đạn (tính từ mặt đất) tại thời điểm t thỏa mãn $h'(t) = v(t)$ nên $h(t)$ là nguyên hàm của hàm vận tốc $v(t)$.

Ta có $\int v(t) dt = \int (160 - 9,8t) dt = 160t - 4,9t^2 + C$.

Do đó $h(t) = 160t - 4,9t^2 + C$. Từ giả thiết $h(0) = 0$ suy ra $C = 0$ và $h(t) = 160t - 4,9t^2(m)$.

a) Sau thời gian $t = 5$ (giây), độ cao của viên đạn là

$$h = h(5) = 160 \cdot 5 - 4,9 \cdot 5^2 = 677,5(m).$$

b) Khi viên đạn đạt độ cao cực đại thì $v(t) = 160 - 9,8t = 0$. Từ đó ta có $t = t_m \approx 16,3$ (giây).

Độ cao cực đại của viên đạn là $h_{\max} = h(t_m) \approx 160 \cdot 16,3 - 4,9 \cdot 16,3^2 = 1306,1(m)$.

Câu 31. Trong dược học, chu kỳ bán thải $\frac{T_1}{2}$ của thuốc được cơ thể hấp thụ là thời gian để lượng thuốc giảm đi một nửa so với ban đầu nhờ quá trình hấp thụ và chuyển hoá. Giả sử tốc độ chuyển hoá thuốc được cho bởi $N'(t) = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}$, trong đó N_0 là lượng thuốc ban đầu tại $t = 0$ và $\lambda > 0$ là hằng số (hằng số hấp thụ). Tìm chu kỳ bán thải $\frac{T_1}{2}$.

Lời giải.

Lượng thuốc tại thời điểm t là $N(t) = \int (-\lambda N_0 e^{-\lambda t}) dt = N_0 e^{-\lambda t} + C$.

Từ $N(0) = N_0$ suy ra $C = 0$ và $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

Khi $t = T_{\frac{1}{2}}$, ta có $N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Hằng số bán thải là thông số quan trọng để bác sĩ xác định thời gian chỉ định giữa hai lần dùng thuốc để tăng hiệu quả sử dụng.

Câu 32. Một khinh khí cầu bay với độ cao (so với mực nước biển) tại thời điểm t là $h(t)$, trong đó t tính bằng phút, $h(t)$ tính bằng mét. Tốc độ bay của khinh khí cầu được cho bởi hàm số $v(t) = -0,12t^2 + 1,2t$, với t tính bằng phút, $v(t)$ tính bằng mét/phút. Tại thời điểm xuất phát ($t=0$), khinh khí cầu ở độ cao $520m$ và 5 phút sau khi xuất phát, khinh khí cầu đã ở độ cao $530m$ (Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016).

- Viết công thức xác định hàm số $h(t) (0 \leq t \leq 29)$.
- Độ cao tối đa của khinh khí cầu khi bay là bao nhiêu?
- Khi nào khinh khí cầu sẽ trở lại độ cao khi xuất phát?

Lời giải

a) $h(t) = \int v(t) dt = \int (-0,12t^2 + 1,2t) dt = -0,04t^3 + 0,6t^2 + C$

Tại $t=0$ thì $h(0) = 520 \Rightarrow C = 520$

Vậy $h(t) = -0,04t^3 + 0,6t^2 + 520$

b) Xét $h(t) = -0,04t^3 + 0,6t^2 + 520$

$$h'(t) = v(t) = -0,12t^2 + 1,2t \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=10 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0		10		$+\infty$
$v(t)$			+		-
$h(t)$					
	520			540	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy độ cao tối đa của khinh khí cầu khi bay là $540m$

c) Khinh khí cầu trở lại độ cao xuất phát khi:

$$h(t) = -0,04t^3 + 0,6t^2 + 520 = 520 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=15 \end{cases}$$

Vậy sau 15 phút thì khinh khí cầu trở lại độ cao xuất phát

Dạng 4. Sử dụng tính chất đạo hàm của hàm hợp để tìm nguyên hàm hàm ẩn

Dạng 1. Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$

Suy ra $u(x)f(x) = \int h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 2. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = - \int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = - \int p(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 3. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 33. (THPT Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1) = \frac{1}{2}$. Tính $f(4)$?

Lời giải

Trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có: $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}x^2$

$\Rightarrow (\sqrt{x} \cdot f(x))' = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow \int (\sqrt{x} \cdot f(x))' dx = \int \frac{3}{2}x^2 dx$

$\Rightarrow \sqrt{x} \cdot f(x) = \frac{1}{2}x^3 + C \quad (*)$

Mà $f(1) = \frac{1}{2}$ nên từ $(*)$ có: $\sqrt{1} \cdot f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^3 + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2\sqrt{x}}{2}$

Vậy $f(4) = \frac{4^2\sqrt{4}}{2} = 16$

Câu 34. (Cần Thơ 2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 2x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Tính giá trị của $[f(1)]^2$.

Lời giải

Ta có $[f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)$.

Do đó theo giả thiết ta được $[f(x)f'(x)]' = 2x^2 - x + 1$.

Suy ra $f(x)f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + C$. Hơn nữa $f(0) = f'(0) = 3$ suy ra $C = 9$.

Tương tự vì $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x)$ nên $[f^2(x)]' = 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right)$. Suy ra

$f^2(x) = \int 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right) dx = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + C$, cũng vì $f(0) = 3$ suy ra

$f^2(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + 9$. Do đó $[f(1)]^2 = 28$.

Câu 35. (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính $f(2)$.

Lời giải

Ta có

$$(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x \Leftrightarrow (x+1)f(x) + f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow [(x+1)f(x)]' + f(x) = e^x \Leftrightarrow e^x [(x+1)f(x)] + e^x f(x) = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow [e^x(x+1)f(x)]' = e^{2x} \Rightarrow \int [e^x(x+1)f(x)]' dx = \int e^{2x} dx \Leftrightarrow e^x(x+1)f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$\text{Mà } f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0. \text{ Vậy } f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{x+1}$$

$$\text{Khi đó } f(2) = \frac{e^2}{6}.$$

Câu 36. (Liên Trường - Nghệ An - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2 \ln 2$ và $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}.f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x}{x+1}$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1}.f(x) \right]' = \frac{x}{x+1}, \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}.$$

Suy ra $\frac{x}{x+1}.f(x) = \int \frac{x}{x+1} dx$ hay $\frac{x}{x+1}.f(x) = x - \ln|x+1| + C$.

Mặt khác, ta có $f(1) = -2\ln 2$ nên $C = -1$. Do đó $\frac{x}{x+1}.f(x) = x - \ln|x+1| - 1$.

Với $x=2$ thì $\frac{2}{3}.f(2) = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a = \frac{3}{2}$ và $b = -\frac{3}{2}$.

Vậy $a^2 + b^2 = \frac{9}{2}$.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$.
Tính $f(1)$.

Lời giải

Ta có

$$f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2} f'(x) + 2x.e^{x^2}.f(x) = 1 \Leftrightarrow (e^{x^2}.f(x))' = 1$$

Suy ra $\int (e^{x^2}.f(x))' dx = \int 1 dx \Leftrightarrow e^{x^2}.f(x) = x + C \Rightarrow f(x) = \frac{x+C}{e^{x^2}}$.

Vì $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Do đó $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$. Vậy $f(1) = \frac{1}{e}$.

Câu 38. (Chuyên Đại học Vinh - 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tìm tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$.

Lời giải

$$f(x) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1 \Leftrightarrow f(x)e^x = x + C'$$

Vì $f(0) = 2$ nên $C' = 2$. Do đó $f(x)e^{2x} = (x+2)e^x$. Vậy:

$$\begin{aligned} \int f(x)e^{2x} dx &= \int (x+2)e^x dx = \int (x+2)d(e^x) = (x+2)e^x - \int e^x d(x+2) = (x+2)e^x - \int e^x dx = \\ &= (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C \end{aligned}$$

Câu 39. (Chuyên KHTN - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf'(x) + (x+1)f(x) = e^{-x}$ với mọi x . Tính $f'(0)$.

Lời giải

Ta có: $xf'(x) + (x+1)f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) + xf(x) = e^{-x}$

$$\Leftrightarrow xe^x f'(x) + (x+1)e^x f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow xe^x f'(x) + (xe^x)' f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (xe^x f(x))' = 1$$

$$\Leftrightarrow xe^x f(x) = \int dx = x + C \quad (*)$$

Với $x=0$

+) Thay vào biểu thức ban đầu ta có: $0.f'(0) + (0+1)f(0) = e^{-0} = 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$

+) Thay vào $(*)$, ta có: $C = 0$.

$$\text{Khi đó: } xe^x f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = -1$$

Câu 40. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 4\pi)$?

Lời giải

Ta có $F'(x) = f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ trên $(0; 4\pi)$.

$$F'(x) = f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x \cos x - \sin x = 0 \quad \text{trên } (0; 4\pi)$$

Đặt $g(x) = x \cos x - \sin x$ trên $(0; 4\pi)$.

$$\text{Ta có } g'(x) = -x \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi \\ x = 2\pi \\ x = 3\pi \end{cases} \text{ trên } (0; 4\pi)$$

Từ đó có bảng biến thiên của $g(x)$:

x	0	π	x_1	2π	x_2	3π	x_3	4π
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	0	$-\pi$	0	2π	0	-3π	0	4π

Vì $g(x)$ liên tục và đồng biến trên $[\pi; 2\pi]$ và $g(\pi) \cdot g(2\pi) < 0$ nên tồn tại duy nhất $x_1 \in (\pi; 2\pi)$ sao cho $g(x_1) = 0$.

Tương tự ta có $g(x_2) = 0$, $g(x_3) = 0$ với $x_2 \in (2\pi; 3\pi)$, $x_3 \in (3\pi; 4\pi)$.

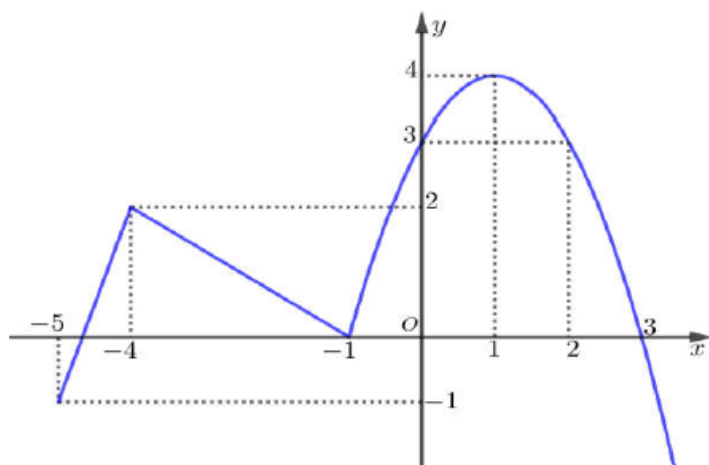
Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta thấy $g(x) < 0$ khi $x \in (0; x_1)$ và $x \in (x_2; x_3)$; $g(x) > 0$ khi $x \in (x_1; x_2)$ và $x \in (x_3; 4\pi)$. Dấu của $f(x)$ là dấu của $g(x)$ trên $(0; 4\pi)$.

Do đó ta có bảng biến thiên của $F(x)$:

x	0	x_1		x_2		x_3		4π
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+	
$F(x)$	CT CD CT							

Vậy hàm số $y = F(x)$ có ba cực trị.

Câu 41. (Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5; 3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).



Biết $f(0) = 0$, giá trị của $2f(-5) + 3f(2)$ bằng

Lời giải

*)Parabol $y = ax^2 + bx + c$ qua các điểm $(2;3), (1;4), (0;3), (-1;0), (3;0)$ nên xác định được

$$y = -x^2 + 2x + 3, \forall x \geq -1 \quad \text{suy ra} \quad f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C_1 \quad \text{Mà}$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x$$

$$\text{Có } f(-1) = -\frac{5}{3}; f(2) = \frac{22}{3} \quad (1)$$

*)Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-4; -1]$ qua các điểm $(-4;2), (-1;0)$ nên

$$f'(x) = \frac{-2}{3}(x+1) \Rightarrow f(x) = \frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + C_2$$

$$\text{Mà } f(-1) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow C_2 = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) - 2, \text{ hay } f(-4) = -\frac{14}{3}$$

*) Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-5; -4]$ qua các điểm $(-4;2), (-5;-1)$ nên

$$f'(x) = 3x + 14 \Rightarrow f(x) = \frac{3x^2}{2} + 14x + C_3$$

$$\text{Mà } f(-4) = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \frac{3 \cdot (-4)^2}{2} + 14 \cdot (-4) + C_3 = -\frac{14}{3} \quad \text{suy ra } C_3 = \frac{82}{3}$$

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{3x^2}{2} + 14x + \frac{82}{3} \Rightarrow f(-5) = -\frac{31}{6} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được } 2f(-5) + 3f(2) = -\frac{31}{3} + 22 = \frac{35}{3}$$

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$ và $f(1) = 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$

Lời giải

$$f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = 4x^3 + 3x^2$$

$$\text{Lấy nguyên hàm hai vế ta được: } xf(x) = \int (4x^3 + 3x^2) dx = x^4 + x^3 + C$$

$$\text{Với } x = 1 \text{ ta có: } f(1) = 2 + C$$

$$\text{Theo bài ra } f(1) = 2 \Leftrightarrow 2 + C = 2 \Leftrightarrow C = 0$$

$$\text{Vậy } xf(x) = x^4 + x^3 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + x^2$$

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 2x$; $f'(2) = 16$; $f(2) = 12$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là:

$$y = 16(x - 2) + 12 \Leftrightarrow y = 16x - 20$$

Câu 43. (Sở Lạng Sơn 2022) Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = e$, $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Tính $f(5)$

Lời giải

Do hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ nên $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C (*)$$

Ta có: $f(1) = e$ nên $(*) \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{3} + C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{3} (**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{1}{3}} \Rightarrow f(5) = e^{\frac{7}{3}} \approx 10,31$.

Câu 44. (Sở Hậu Giang 2022) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) - \frac{f(x)}{x^2 + x} = \frac{x}{x+1}$, $\forall x \in (0; +\infty)$. Tính giá trị $f(7)$

Lời giải

Ta có: $f'(x) - \frac{f(x)}{x^2 + x} = \frac{x}{x+1}$, $\forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow (x^2 + x)f'(x) - f(x) = x^2$

$$\Rightarrow f'(x) + \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 1 \Rightarrow \int f(x) dx + \int \left[\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \right] dx = \int dx$$

$$\Rightarrow f(x) + \frac{f(x)}{x} = x + C$$

Với $x = 1$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + C \Rightarrow C = 0$.

$$\Rightarrow f(x) + \frac{f(x)}{x} = x \Rightarrow f(x) \left[1 + \frac{1}{x} \right] = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

Với $x = 7 \Rightarrow f(7) = \frac{49}{8}$.

Câu 45. (Mã 102-2023) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0; +\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x) = x(f(x) - f'(x)), \forall x \in (0; +\infty)$. Biết $f(1) = 4$, tìm giá trị $f(2)$

Lời giải

Ta có:

$$f(x)\ln f(x) = x(f(x) - f'(x)), \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f(x)\ln f(x) + xf'(x) = xf(x)$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) + x \frac{f'(x)}{f(x)} = x$$

$$\Leftrightarrow [x \ln f(x)]' = x$$

$$\Rightarrow x \ln f(x) = \int x dx \Leftrightarrow x \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 \ln f(4) = 8 + C \\ \ln f(1) = \frac{1}{2} + C \end{cases}$$

$$\bullet f(1) = 4 \Leftrightarrow \frac{C+8}{4} = C + \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = 2$$

$$\text{Ta có: } x \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + 2 \Rightarrow 2 \ln f(2) = 4 \Leftrightarrow \ln f(2) = 2 \Leftrightarrow f(2) = e^2 \approx 7,4$$

Câu 46. (Mã 103 - 2023) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0; +\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x) = x(2f(x) - f'(x)), \forall x \in (0; +\infty)$. Biết $f(1) = f(3)$, tìm giá trị $f(2)$

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x)\ln f(x) = x(2f(x) - f'(x)) \Rightarrow \ln f(x) = 2x - x \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) + x \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \Rightarrow (x \ln f(x))' = 2x$$

$$\Rightarrow x \ln f(x) = \int 2x dx = x^2 + C \Rightarrow \ln f(x) = x + \frac{C}{x}$$

$$\text{Vi } f(1) = f(3) \Leftrightarrow 1 + C = 3 + \frac{C}{3} \Leftrightarrow C = 3$$

$$\text{Vậy } \ln f(x) = x + \frac{3}{x} \Rightarrow f(2) = e^{2+\frac{3}{2}} = e^{\frac{7}{2}} \approx 33,12$$

Câu 47. (Sở Vĩnh Phúc 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = e$. Tìm giá trị của $f(2)$

Lời giải

$$\begin{aligned}(x+2)f(x) &= xf'(x) - x^3, \forall x \in (0; +\infty) \\ \Leftrightarrow x^2 f'(x) - 2xf(x) - x^2 f(x) &= x^4, \forall x \in (0; +\infty) \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} - \frac{f(x)}{x^2} &= 1, \forall x \in (0; +\infty) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' - \frac{f(x)}{x^2} &= 1, \forall x \in (0; +\infty) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' e^{-x} - \frac{f(x)}{x^2} e^{-x} &= e^{-x}, \forall x \in (0; +\infty) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2} e^{-x} \right)' &= e^{-x}, \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} e^{-x} = -e^{-x} + C, \forall x \in (0; +\infty).\end{aligned}$$

Do $f(1) = e$, suy ra $C = 1 + e^{-1}$.

Vậy $f(x) = x^2(-1 + e^x + e^{x-1}), \forall x \in (0; +\infty)$. Suy ra: $f(2) = 4e^2 + 4e - 4$.

Câu 48. (Sở Quảng Trị 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ và $\cos x \cdot f'(x) + \sin x \cdot f(x) = 2 \sin x \cdot \cos^3 x$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Lời giải

$$\begin{aligned}\cos x \cdot f'(x) + \sin x \cdot f(x) &= 2 \sin x \cdot \cos^3 x \Leftrightarrow \frac{\cos x \cdot f'(x) + \sin x \cdot f(x)}{\cos^2 x} = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x \\ \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\cos x} \right)' &= \sin 2x \Rightarrow \frac{f(x)}{\cos x} = -\frac{1}{2} \cos 2x + C. \\ +f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{9\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \frac{9\sqrt{2}}{4} \cdot 2 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + C \Rightarrow C = \frac{9}{2} \\ +f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \cos \frac{\pi}{3} \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{9}{2} \right) = 2,375 \in (1; 3).\end{aligned}$$

Câu 49. (Chuyên KHTN 2023) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $x \cdot f'(x) = f(x) - xf^2(x)$ với mọi $x \in (0; +\infty)$. Biết $f(1) = 1$. Tính giá trị của $f(2)$

Lời giải

Xét $x \in (0; +\infty)$.

Ta có:
$$x \cdot f'(x) = f(x) - xf^2(x) \Leftrightarrow \frac{f(x) - xf^2(x)}{f^2(x)} = x \Leftrightarrow \left(\frac{x}{f(x)} \right)' = x \Rightarrow \frac{x}{f(x)} = \frac{x^2}{2} + C$$

Do $f(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow f(2) = \frac{4}{5}$.

Câu 50. (Đại học Quốc Gia Hà Nội 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(0)=0, f'(0)=1, f''(x)=f(x)+(3x+4)e^{2x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hỏi giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} f''(x) &= f(x) + (3x+4)e^{2x} \Leftrightarrow f''(x) - f(x) = (3x+4)e^{2x} \\ \Leftrightarrow \frac{f''(x) - f(x)}{e^x} &= (3x+4)e^x \Leftrightarrow \frac{f''(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = (3x+4)e^x \\ \Leftrightarrow \frac{f''(x)e^x - f'(x)e^x}{e^{2x}} + \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} &= (3x+4)e^x \\ \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{e^x} \right)' + \left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' &= (3x+4)e^x \end{aligned}$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$\frac{f'(x)}{e^x} + \frac{f(x)}{e^x} = \int (3x+4)e^x dx = (3x+1)e^x + C$$

Khi: $x=0 \Rightarrow C=0$

$$\text{Suy ra: } \frac{f'(x)}{e^x} + \frac{f(x)}{e^x} = (3x+1)e^x \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = (3x+1)e^{2x}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f'(x)e^x + f(x)e^x &= (3x+1)e^{3x} \Leftrightarrow \left[f(x)e^x \right]' = (3x+1)e^{3x} \\ \Rightarrow f(x)e^x &= \int (3x+1)e^{3x} dx = xe^{3x} + C_1 \end{aligned}$$

Lại có: $x=0 \Rightarrow C_1=0$

$$\text{Vậy: } f(x) = xe^{2x} \Rightarrow f(1) = e^2.$$