|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHUYÊN BIÊN HÒA****TỈNH HÀ NAM**ĐỀ GIỚI THIỆU | **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI****CỤM DUYÊN HẢI ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ XIV - NĂM 2023** **MÔN THI: TOÁN - LỚP 10*****Thời gian làm bài: 180 phút*** |

**Bài 1** (*5 điểm*). Giải hệ phương trình: 

(với ).

**Bài 2** (*5 điểm*). Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp đường tròn tâm *O*, *H* là trực tâm. Gọi *B*­­­1 là điểm đối xứng của *B* qua *AC*, *C*1 là điểm đối xứng của *C* qua *AB*, *O*1 là điểm đối xứng của *O* qua *BC*. Gọi *P* là giao điểm của  và , *Q* là giao điểm của  và , *K* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác . Chứng minh rằng:

1. *PQ* vuông góc với .
2.  thẳng hàng.

**Bài 3** (*3 điểm*). Giả sử  là các số nguyên dương, sao cho  đều là các số nguyên tố. Chứng minh rằng  và  đều không chia hết cho 

**Bài 4** (*4 điểm*). Cho *x,y, z* là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

 

**Bài 5** (*3 điểm*). Cho *n* và *k* là các số nguyên dương thỏa mãn tính chất: Tồn tại một tập *T* gồm n điểm trên mặt phẳng thỏa mãn:

1. Không có 3 điểm nào thẳng hàng.
2. Cho một điểm *P* bất kì trong *T*, có ít nhất *k* điểm trong *T* có cùng khoảng cách với *P*.

Chứng minh: .

**---------- HẾT ----------**

|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHUYÊN****BIÊN HÒA****TỈNH HÀ NAM** | **HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CỤM DUYÊN HẢI ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM 2023****MÔN THI: TOÁN - LỚP 10** |
| **Bài** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **Bài 1****5đ** | Giải hệ phương trình:  |  |
| Điều kiện : . Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành :  . Sử dụng đánh giá : , ta có :  ; . | 1 |
|   Cộng vế theo vế các đánh giá này ta thu được :  Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : . | 1 |
|  Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :    | 1 |
| Xét hàm số .  Ta chứng minh được hàm số  đồng biến trên . Do đó từ  | 1 |
| . Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là . | 1 |
| **Bài 2****5đ** | Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp đường tròn tâm *O*, *H* là trực tâm. Gọi *B*­­­1 là điểm đối xứng của *B* qua *AC*, *C*1 là điểm đối xứng của *C* qua *AB*, *O*1 là điểm đối xứng của *O* qua *BC*. Gọi *P* là giao điểm của  và , *Q* là giao điểm của  và , *K* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác . Chứng minh rằng:a) *PQ* vuông góc với . b)  thẳng hàng. |  |
|  |  |
| **2a****(3đ)** | a)Chứng minh *O1* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *HBC*Chỉ ra được , do đó tứ giác nội tiếp, suy ra , suy ra . | 1 |
| \* Tương tự . | 1 |
| Do đó PQ là trục đẳng phương của hai đường tròn (*K*) và (*O1* ), dẫn đến *PQ*vuông góc *O1K*.  | 1 |
| **2b****(2đ)** | b) \* Chỉ ra được , do đó tứ giác  nội tiếp.\* Từ  nội tiếp suy ra .Xét trong đường tròn (*K*) có . |  |
| Do tam giác  cân tại *K* nên , suy ra , dẫn đến  vuông góc với .\* *AK* và  cùng vuông góc với *PQ* nên ba điểm *A, K, O1* thẳng hàng.  | 1 |
| **Bài 3****3** | Giả sử  là các số nguyên dương, sao cho  đều là các số nguyên tố. Chứng minh rằng  và  đều không chia hết cho  |  |
| Có là nguyên tố nên  mà nguyên tố, do đó  là số lẻ, . Giả sử chẵn, *b* lẻ. Vì *b* lẻ nên  (1)+) Nếu  (2)Từ (1), (2) suy ra , nếu  (\*)hoặc  nếu Nếu  do  nguyên tố, vô lý vì Nếu  do nguyên tố, vô lý vì  | 1 |
| Từ (\*) có Gọi  Mà  Do  là số nguyên tố nên vô lý vì  | 1 |
| +) Tương tự, nếu  mà  nếu  hoặc  nếu  (\*\*)Nếu  do nguyên tố, vô lý vì Nếu  do nguyên tố, vô lý vì Từ (\*\*) có  Gọi  Mà  Do  là số nguyên tố  vô lý vì Vậy  đều không chia hết cho  | 1 |
| **Bài 4 4đ** | Cho *x,y, z* là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức   |  |
|  Ta có Đặt ta có . Ta cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thức với . Ta chọn các hằng số m,n,p dương sao cho  | 1 |
|  | 1 |
|  Khi đó   | 1 |
|  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  . | 1 |
| **Bài 5****3** | Cho *n* và *k* là các số nguyên dương thỏa mãn tính chất: Tồn tại một tập *T* gồm n điểm trên mặt phẳng thỏa mãn:1. Không có 3 điểm nào thẳng hàng.
2. Cho một điểm *P* bất kì trong *T*, có ít nhất *k* điểm trong *T* có cùng khoảng cách với *P*.

Chứng minh: . |  |
| Xét tập *A = T =*  và tập *B =*  với lij là đường trung trực của đoạn *PiPj*. Ta có .Xét tập *S =* . Ta đếm số phần tử của S. | 1 |
| **Cách 1:** Với mỗi đường trung trực *ljk* có tối đa 2 điểm *Pi* nằm trên nên  | 1 |
| **Cách 2:** Với mỗi điểm *Pi* có ít nhất k điểm khác cách đều *Pi* nên *Pi*nằm trên các đường trung trực của 2 trong k điểm đó, mà có n điểm *Pi* nên .Vậy ta có:   | 1 |

***Học sinh có cách giải đúng khác và lập luận chặt chẽ được điểm tối đa.
HẾT***