|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHUYÊN BIÊN HÒA**  **TỈNH HÀ NAM**  ĐỀ GIỚI THIỆU | **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI**  **CỤM DUYÊN HẢI ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ XIV - NĂM 2023**  **MÔN THI: TOÁN - LỚP 10**  ***Thời gian làm bài: 180 phút*** |

**Bài 1** (*5 điểm*). Giải hệ phương trình: 

(với ).

**Bài 2** (*5 điểm*). Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp đường tròn tâm *O*, *H* là trực tâm. Gọi *B*­­­1 là điểm đối xứng của *B* qua *AC*, *C*1 là điểm đối xứng của *C* qua *AB*, *O*1 là điểm đối xứng của *O* qua *BC*. Gọi *P* là giao điểm của  và , *Q* là giao điểm của  và , *K* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác . Chứng minh rằng:

1. *PQ* vuông góc với .
2.  thẳng hàng.

**Bài 3** (*3 điểm*). Giả sử  là các số nguyên dương, sao cho  đều là các số nguyên tố. Chứng minh rằng  và  đều không chia hết cho 

**Bài 4** (*4 điểm*). Cho *x,y, z* là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức



**Bài 5** (*3 điểm*). Cho *n* và *k* là các số nguyên dương thỏa mãn tính chất: Tồn tại một tập *T* gồm n điểm trên mặt phẳng thỏa mãn:

1. Không có 3 điểm nào thẳng hàng.
2. Cho một điểm *P* bất kì trong *T*, có ít nhất *k* điểm trong *T* có cùng khoảng cách với *P*.

Chứng minh: .

**---------- HẾT ----------**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHUYÊN**  **BIÊN HÒA**  **TỈNH HÀ NAM** | | **HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CỤM DUYÊN HẢI ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM 2023**  **MÔN THI: TOÁN - LỚP 10** | | |
| **Bài** | **Nội dung** | | **Điểm** |
| **Bài 1**  **5đ** | Giải hệ phương trình: | |  |
| Điều kiện : .  Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành :  .  Sử dụng đánh giá : , ta có :  ; . | | 1 |
| Cộng vế theo vế các đánh giá này ta thu được :    Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : . | | 1 |
| Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình : | | 1 |
| Xét hàm số .    Ta chứng minh được hàm số  đồng biến trên . Do đó từ | | 1 |
| .  Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là . | | 1 |
| **Bài 2**  **5đ** | Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp đường tròn tâm *O*, *H* là trực tâm. Gọi *B*­­­1 là điểm đối xứng của *B* qua *AC*, *C*1 là điểm đối xứng của *C* qua *AB*, *O*1 là điểm đối xứng của *O* qua *BC*. Gọi *P* là giao điểm của  và , *Q* là giao điểm của  và , *K* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác . Chứng minh rằng:  a) *PQ* vuông góc với .  b)  thẳng hàng. | |  |
|  | |  |
| **2a**  **(3đ)** | a)  Chứng minh *O1* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *HBC*  Chỉ ra được , do đó tứ giác nội tiếp, suy ra , suy ra . | | 1 |
| \* Tương tự . | | 1 |
| Do đó PQ là trục đẳng phương của hai đường tròn (*K*) và (*O1* ), dẫn đến *PQ*vuông góc *O1K*. | | 1 |
| **2b**  **(2đ)** | b) \* Chỉ ra được , do đó tứ giác  nội tiếp.  \* Từ  nội tiếp suy ra .  Xét trong đường tròn (*K*) có . | |  |
| Do tam giác  cân tại *K* nên , suy ra , dẫn đến  vuông góc với .  \* *AK* và  cùng vuông góc với *PQ* nên ba điểm *A, K, O1* thẳng hàng. | | 1 |
| **Bài 3**  **3** | Giả sử  là các số nguyên dương, sao cho  đều là các số nguyên tố. Chứng minh rằng  và  đều không chia hết cho | |  |
| Có là nguyên tố nên  mà nguyên tố, do đó  là số lẻ, .  Giả sử chẵn, *b* lẻ. Vì *b* lẻ nên  (1)  +) Nếu  (2)  Từ (1), (2) suy ra , nếu  (\*)  hoặc  nếu  Nếu  do  nguyên tố, vô lý vì  Nếu  do nguyên tố, vô lý vì | | 1 |
| Từ (\*) có Gọi  Mà  Do  là số nguyên tố nên  vô lý vì | | 1 |
| +) Tương tự, nếu  mà  nếu  hoặc  nếu  (\*\*)  Nếu  do nguyên tố, vô lý vì  Nếu  do nguyên tố, vô lý vì  Từ (\*\*) có  Gọi  Mà  Do  là số nguyên tố  vô lý vì  Vậy  đều không chia hết cho | | 1 |
| **Bài 4 4đ** | Cho *x,y, z* là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức | |  |
| Ta có    Đặt ta có .  Ta cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  với .  Ta chọn các hằng số m,n,p dương sao cho | | 1 |
|  | | 1 |
| Khi đó | | 1 |
| Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  . | | 1 |
| **Bài 5**  **3** | Cho *n* và *k* là các số nguyên dương thỏa mãn tính chất: Tồn tại một tập *T* gồm n điểm trên mặt phẳng thỏa mãn:   1. Không có 3 điểm nào thẳng hàng. 2. Cho một điểm *P* bất kì trong *T*, có ít nhất *k* điểm trong *T* có cùng khoảng cách với *P*.   Chứng minh: . | |  |
| Xét tập *A = T =*  và tập *B =*  với lij là đường trung trực của đoạn *PiPj*. Ta có .  Xét tập *S =* . Ta đếm số phần tử của S. | | 1 |
| **Cách 1:** Với mỗi đường trung trực *ljk* có tối đa 2 điểm *Pi* nằm trên nên | | 1 |
| **Cách 2:** Với mỗi điểm *Pi* có ít nhất k điểm khác cách đều *Pi* nên *Pi*nằm trên các đường trung trực của 2 trong k điểm đó, mà có n điểm *Pi* nên .  Vậy ta có: | | 1 |

***Học sinh có cách giải đúng khác và lập luận chặt chẽ được điểm tối đa.  
HẾT***