PHÒNG GD & ĐT QUẬN ĐỐNG ĐA
TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRƯỜNG TỘ

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI

NĂM HỌC 2023-2024
Môn: Toán 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I. (5.0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2+x+2=2\sqrt{x+1}.$
2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $b\neq c; a+b\neq c$ và $a^2+b^2=(a+b-c)^2$. Chứng minh $\dfrac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\dfrac{a-c}{b-c}.$

Bài II. (5,0 điểm)

1. Chứng minh với mọi số tự nhiên lẻ n, số $A=7^{2n-1}-7$ luôn chia hết cho 600
2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^2+4xy+7y=6y^2+3x+8.$
3. Cho ba số nguyên dương m, n, p thỏa mãn: $(m+n!)(n+m!)=5^p$. Chứng minh rằng mn là số chính phương

Bài III. (3,0 điểm)

Với các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}=4$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2.$

Bài IV. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân (AB < AC), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại trực tâm H. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AH. Đường thẳng qua I vuông góc với AM, cắt EF tại S.

1. Chứng minh IE vuông góc với ME.
2. Chứng minh SA song song với BC
3. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của SI với BE, CF. Chứng inh I là trung điểm của PQ.

Bài V. (1,0 điểm)

Cho 2023 điểm phan biệt được phủ lên bởi một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng 24. Chứng minh luôn tồn tại một hình tròn có đường kính bằng 1, phủ lên ít nhất 7 điểm đã cho.

----------- HẾT -----------

Họ và tên thí sinh: ………………………………..…Số báo danh: ……………..……..

HƯỚNG DẪN

Bài I. (5.0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2 + x + 2 = 2\sqrt{x+1}.$
2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $b \neq c; a + b \neq c$ và $a^2 + b^2 = (a+b-c)^2$. Chứng minh $\dfrac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2} = \dfrac{a-c}{b-c}.$

Hướng dẫn:

1. ĐKXĐ: $x \geq -1$

   $x^2 + x + 2 = 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2 + (\sqrt{x+1} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

   Vậy x = 0.

2. Từ $a^2 + b^2 = (a+b-c)^2$. suy ra $c^2 + 2ab - 2bc - 2ca = 0 \Rightarrow 2(c-a)(c-b) = c^2.$

   $\dfrac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2} = \dfrac{a-c}{b-c} \Leftrightarrow \dfrac{2a(a-c) + c^2}{2b(b-c) + c^2} = \dfrac{a-c}{b-c}$

   $\Leftrightarrow 2a(a-c)(b-c) + c^2(b-c) = 2b(b-c)(a-c) + c^2(a-c)$

   $\Leftrightarrow ac^2 + c^2(b-c) = bc^2 + c^2(a-c) \Leftrightarrow c^2(a-b) + c^2(b-a) = 0$, luôn đúng nên ta có đpcm.

Bài II. (5,0 điểm)

1. Chứng minh với mọi số tự nhiên lẻ n, số $A = 7^{2n-1} - 7$ luôn chia hết cho 600
2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^2 + 4xy + 7y = 6y^2 + 3x + 8.$
3. Cho ba số nguyên dương m, n, p thỏa mãn: $(m + n!)(n + m!) = 5^p$. Chứng minh rằng mn là số chính phương

Hướng dẫn:

1. Có $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2.$

   Vì n là số tự nhiên lẻ, đặt n = 2k + 1 ($k \in N^*$), khi đó $7^{2n-1} - 7 = 7^{4k+1} - 7.$

   Ta có $7^{4k+1} - 7 \equiv (-1)^{4k+1} - 7 \equiv 0 \pmod 8$ nên $A \vdots 8.$

   Ta có $7^{4k+1} - 7 \equiv (1)^{4k+1} - 7 \equiv 0 \pmod 3$ nên $A \vdots 3.$

   Ta có $7^{4k+1} - 7 = 7\left(49^{2k} - 1\right) \equiv 7\left[(-1)^{2k} - 1\right] \equiv 0 \pmod{25}$ nên $A \vdots 25.$

   Lại có 8; 3; 25 đôi một nguyên tố cùng nhau nên $A \vdots 600.$

2. $2x^2 + 4xy + 7y = 6y^2 + 3x + 8 \Leftrightarrow 2(x-y)(x+3y) - (3x-7y) + 8 = 0.$

Đặt x – y = a, x + 3y = b ($a,b\in Z$) thì ta được:

$$2ab-4a+b+8=0\Leftrightarrow (b-2)(2a+1)=-10.$$

Tới đây ta dễ dàng tìm được a, b và từ đó tìm ra x, y.

3. Không giảm tính tổng quát, giả sử m/geqn.

   Vì $(m+n!)(n+m!)=5^p$ và $m,n,p\in \mathbb{N}^*$ nên tồn tại các số tự nhiên x, y ($y\ge x$) để $m+n!=5^x, n+m!=5^y.$

   Nếu $m\le 4$, thử trực tiếp các trường hợp m = 4; 3; 2; 1 thì chỉ có trường hợp m = 4, n = 1 thỏa mãn. Khi đó mn = 4 là số chính phương.

   Ta có $5^y=n+m!=n(1+1.2\cdots.(n-1)\cdot(n+1)\cdots m).$

   Nếu $m\ge 10$ thì 1.2…(n-1).(n+1)…m chia hết cho 5 nên 1 + 1.2…(n-1).(n+1) …m không chia hết cho 5, mâu thuẫn vì n(1 + 1.2…(n-1).(n+1)…m) = 5^y.

   Với $5\le m\le 9$ thì $m!\vdots 5$, khi đó $n\le 9$ và để ý rằng n + m = 5^y nên $n\vdots 5$ nên n chỉ có thể bằng 5.

   Lại có $n!+m\vdots 5$ nên m = 5.

   Khi đó m.n = 25 là số chính phương.

   Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài III. (3,0 điểm)

Với các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}=4$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2.$

Hướng dẫn:

1. Tìm giá trị nhỏ nhất:

   Từ điều kiện, sử dụng BĐT Cauchy – Schwarz ta có:

   $$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}=4\Rightarrow 4^2\le(1+1+1)(a+1+b+1+c+1)$$

   Suy ra $a+b+c\ge\frac{7}{3}$

   Ta lại có: $a^2+b^2+c^2\ge\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{49}{27}$ nên $P\ge\frac{49}{27}$

   Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{7}{9}$. Vậy GTNN của P là $\frac{7}{9}$.

2. Tìm giá trị lớn nhất:

   Vì $a,b,c\ge 0$ và $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}=4$ nên $0\le a,b,c\le 3$.

   Với $0\le a\le 3$ ta có bất đẳng thức sau: $a^2\le 9\sqrt{a+1}-9.$

Thật vậy, $a^2 \le 9\sqrt{a+1} - 9 \Leftrightarrow a^2 + 9 \le 9\sqrt{a+1} \Leftrightarrow a^4 + 18a^2 + 81 \le 81(a+1)$

$\Leftrightarrow a(a-3)\left(a^2+3a+27\right) \le 0$ luôn đúng với mọi số thực a thỏa mãn $0 \le a \le 3$

Tương tự thì ta có $b^2 \le 9\sqrt{b+1} - 9, c^2 \le 9\sqrt{c+1} - 9$

Cộng theo vế ta được $P \le 9.4 - 9.3 = 9$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi a = 3, b = c = 0.

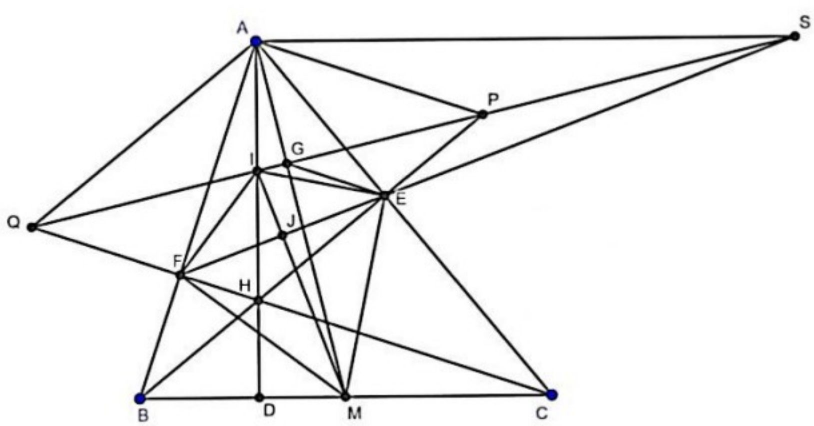
Vậy giá trị lớn nhất của P là 9.

Bài IV. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân (AB < AC), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại trực tâm H. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AH. Đường thẳng qua I vuông góc với AM, cắt EF tại S.

1. Chứng minh IE vuông góc với ME.
2. Chứng minh SA song song với BC
3. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của SI với BE, CF. Chứng inh I là trung điểm của PQ.

Hướng dẫn:



1. Vì I, M lần lượt là trung điểm của AH, BC nên ta có IE = IA = IH và EM = MC = MB.

   Dễ dàng suy ra $\widehat{IEA} = \widehat{IAE} = \widehat{MBE} = \widehat{MEB}$, mà $\widehat{IEA} + \widehat{IEH} = 90^0$ nên $\widehat{MEB} + \widehat{IEH} = 90^0$ hay IE vuông góc với ME.
2. Gọi G, J lần lượt là giao điểm của IS với AM và IM với EF.

   Dễ dàng chỉ ra IM là trung trực của EF nên IM $\perp$ EF, lại có IG $\perp$ AM nên ΔIGM đồng dạng với $\Delta IJS \Rightarrow IG.IM = IJ.IM = IE^2 = IA^2$ từ đây suy ra tam giác IAS vuông tại A với AG là đường cao, suy ra AS song song với BC.

3. Ta sẽ chứng minh APHQ là hình bình hành.
   Để ý tứ giác AGEP có $\widehat{AGP} = \widehat{AEP} = 90^0$ nên dễ dàng suy ra được $\widehat{PAE} = \widehat{PGE}$
   Để ý tứ giác IGEM có $\widehat{IGM} = \widehat{IEM} = 90^0$ nên $\widehat{PGE} = \widehat{IME}$, mà
   $\widehat{IME} = \frac{1}{2}\widehat{EMF} = \widehat{ACF}$, từ đây suy ra $\widehat{PGE} = \widehat{ACF}$.
   Lại có $\widehat{ACF} + \widehat{CAF} = 90^0$ nên $\widehat{PAE} + \widehat{CAF} = 90^0$ suy ra PA $\perp$ BA $\Rightarrow$ PA // HQ.
   Tương tự ta chứng minh được QA // HP suy ra APHQ là hình bình hành, suy ra I là trung điểm PQ.

Bài V. (1,0 điểm)

Cho 2023 điểm phan biệt được phủ lên bởi một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng 24. Chứng minh luôn tồn tại một hình tròn có đường kính bằng 1, phủ lên ít nhất 7 điểm đã cho.

Hướng dẫn:

Ta xét hình vuông có cạnh bằng $12\sqrt{2}$ thì hình vuông này có đường chéo bằng 24.

Chia hình vuông đó thành 576 ô vuông có cạnh $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (đường chéo bằng 1). Ta kẻ đường chéo của hình vuông lớn như hình vẽ (đi qua 24 hình vuông nhỏ) thế thì nửa dưới của hình vuông lớn được bao phủ bởi $\frac{576-24}{2}+24=300$ hình vuông nhỏ. Mỗi hình vuông nhỏ này lại được bao phủ bởi hình tròn có đường kính bằng 1.
Lại có $2023 = 300.6 + 223$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một hình tròn có đường kính bằng 1, phủ lên ít nhất 7 điểm trong số 2023 điểm đã cho.