

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

BẢN CHÍNH

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề).

Ngày thi: 29/01/2008.

Câu 1 (3 điểm). Hãy xác định số nghiệm của hệ phương trình (ẩn x, y) sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = 29 \\ \log_3 x \cdot \log_2 y = 1. \end{cases}$$

Câu 2 (3 điểm). Cho tam giác ABC có góc \widehat{BEC} là góc nhọn, trong đó E là trung điểm của AB . Trên tia EC lấy điểm M sao cho $\widehat{BME} = \widehat{ECA}$. Kí hiệu α là số đo của góc \widehat{BEC} , hãy tính tỉ số $\frac{MC}{AB}$ theo α .

Câu 3 (2 điểm). Đặt $m = 2007^{2008}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên n mà $n < m$ và $n(2n+1)(5n+2)$ chia hết cho m ?

Câu 4 (3 điểm). Cho dãy số thực (x_n) được xác định như sau:

$$x_1 = 0, x_2 = 2 \text{ và } x_{n+2} = 2^{-x_n} + \frac{1}{2} \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Hãy tìm giới hạn đó.

Câu 5 (3 điểm). Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số gồm tối đa 2008 chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số 9?

Câu 6 (3 điểm). Cho x, y, z là các số thực không âm, đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$(xy + yz + zx) \left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \right) \geq 4.$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi nào?

Câu 7 (3 điểm). Cho tam giác ABC , trung tuyến AD . Cho đường thẳng d vuông góc với đường thẳng AD . Xét điểm M nằm trên d . Gọi E và F lần lượt là trung điểm của MB và MC . Đường thẳng đi qua E và vuông góc với d cắt đường thẳng AB tại P , đường thẳng đi qua F và vuông góc với d cắt đường thẳng AC tại Q . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định, khi điểm M di động trên đường thẳng d .

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
- Giám thị không được giải thích gì thêm.