SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH

CHUYÊN ĐỀ VẬN DỤNG, VẬN DỤNG CAO
KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2023
Môn: Toán

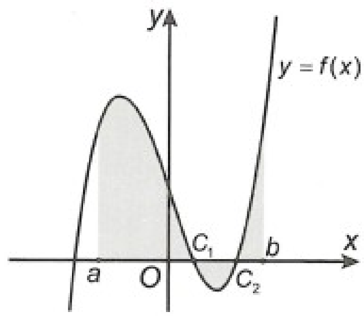
# TÊN CHUYÊN ĐỀ: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

**Người biên soạn: Vũ Sỹ Minh**
**Đơn vị công tác: Trường THPT Tiên Du Số 1**

## I. Hệ thống kiến thức liên quan.

### 1) Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành

Hình phẳng $(H)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$




Diện tích hình phẳng được xác định theo công thức: $S=\int\limits_a^b |f(x)|dx$

**Chú ý**

Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a;b]$ thì $\boxed{S=\int\limits_a^b |f(x)|dx=\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|}$

• Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=c$ thuộc khoảng $(a;b)$ thì

$$S=\int\limits_a^b |f(x)|dx=\int\limits_a^c |f(x)|dx+\int\limits_c^b |f(x)|dx=\left|\int\limits_a^c f(x)dx\right|+\left|\int\limits_c^b f(x)dx\right|$$

• Nếu phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm $c_1<c_2$ thuộc khoảng $(a;b)$ thì

$$S=\int\limits_a^b |f(x)|dx=\left|\int\limits_c^{c_1} f(x)dx\right|+\left|\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right|+\left|\int\limits_{c_2}^b f(x)dx\right|$$

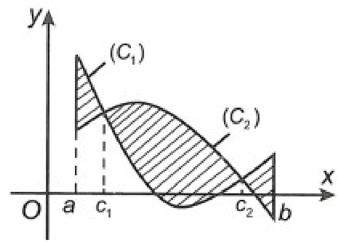
***Đặc biệt:***

• *Nếu* $f(x)\ge 0, \forall x\in[a;b]$ *thì* $S=\int\limits_a^b |f(x)|dx=\int\limits_a^b f(x)dx$

• *Nếu* $f(x)\le 0, \forall x\in[a;b]$ *thì* $S=\int\limits_a^b |f(x)|dx=-\int\limits_a^b f(x)dx$

### 2) Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Cho hình phẳng $(H)$ giới hạn bởi đồ thị $(C_1)$: $y=f(x)$ và $(C_2)$: $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$




Diện tích hình phẳng là: $S=\int_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx$

**Chú ý**

• Nếu phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ vô nghiệm trên khoảng $\left(a;b\right)$ thì $S=\int_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx=\left|\int_a^b\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]dx\right|$.

• Nếu phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ có nghiệm duy nhất $x=c$ thuộc $\left(a;b\right)$ thì $S=\int_a^c\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx+\int_c^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx=\left|\int_a^c\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]dx\right|+\left|\int_c^b\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]dx\right|$

• Nếu phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ có hai nghiệm $c_1<c_2$ thuộc khoảng $\left(a;b\right)$ thì

$S=\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx=\left|\int_c^{c_1}\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]dx\right|+\left|\int_{c_1}^{c_2}\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]dx\right|+\left|\int_{c_2}^{b}\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]dx\right|$

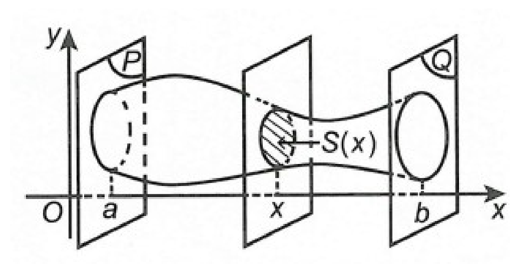
***Đặc biệt:***

° Nếu $f\left(x\right)\geq g\left(x\right),\ \forall x\in\left[a;b\right]$ thì $S=\int_a^b\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]dx$

• Nếu $f\left(x\right)\leq g\left(x\right),\ \forall x\in\left[a;b\right]$

**3) Thể tích vật thể**

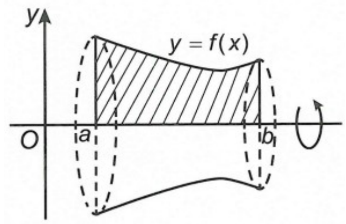
Cắt một vật thể B bởi hai mặt phẳng $\left(P\right)$ và $\left(Q\right)$ vuông góc với trục *Ox* lần lượt tại $x=a$ và $x=b$, với $a<b$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với *Ox* tại điểm có hoành độ $x$ cắt *B* theo thiết diện có diện tích $S\left(x\right)$ như hình vẽ bên.




Khi đó thể tích vật thể *B* là $V=\int_a^b S\left(x\right)dx$.

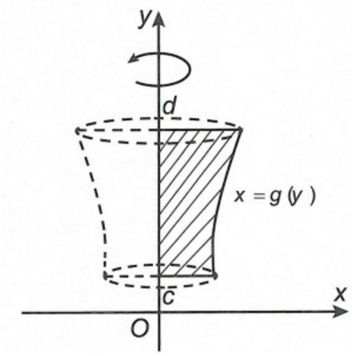
**4) Thể tích khối tròn xoay**

Cho hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$, trục *Ox* và hai đường thẳng $x=a$ và $x=b$ . Quay $\left(H\right)$ xung quanh trục *Ox* ta thu được một khối tròn xoay như hình vẽ bên.



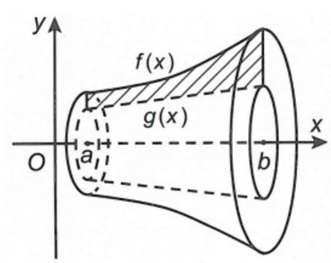

Thể tích khối tròn xoay thu được là $V = \pi \int_a^b \left[ f\left( x \right) \right]^2 dx$

Nếu đổi vai trò của $x$ và $y$ cho nhau, ta được hình phẳng $\left( H \right)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = g\left( y \right)$ liên tục trên đoạn $\left[ c;d \right]$, trục $Oy$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ . Quay $\left( H \right)$ xung quanh trục $Oy$ ta thu được một khối tròn xoay như hình vẽ bên.




Thể tích khối tròn xoay thu được là $V_{Oy} = \pi \int_c^d g^2\left( y \right) dy$

Cho hình phẳng $\left( H \right)$ giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $\left( C_1 \right)$: $y = f\left( x \right)$, $\left( C_2 \right)$: $y = g\left( x \right)$ liên tục trên đoạn $\left[ a;b \right]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ . Quay $\left( H \right)$ xung quanh trục $Ox$ ta thu được một khối tròn xoay như hình vẽ bên.




Khi đó, thể tích khối tròn xoay thu được là $V = \pi \int_a^b \left| f^2\left( x \right) - g^2\left( x \right) \right| dx$

***Chú ý:*** *Trong trường hợp này, ta phải có* $f\left( x \right).g\left( x \right) \ge 0$ *với* $\forall x \in \left[ a;b \right]$ *thì mới áp dụng được công thức.*

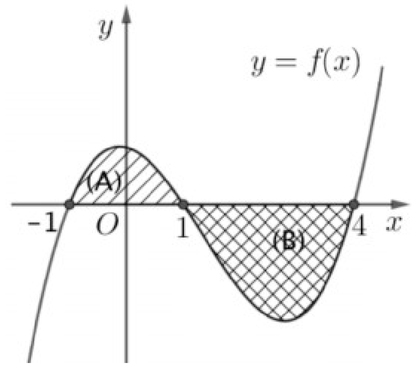
**II. Các dạng bài/câu thường gặp**

**Dạng 1: Tính tích phân khi cho trước diện tích của hình phẳng.**

**Phương pháp giải**

Ta biến đổi tích phân theo một số tích phân sao cho mỗi tích phân xác định tương ứng bằng diện tích của các hình phẳng cho trước. Ta thường sử dụng công thức đổi cận tích phân và kết hợp với phương pháp đổi biến số.

**Ví dụ 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích các hình $(A),(B)$ lần lượt bằng $3$ và $7$ . Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f(5\sin x - 1)dx$ bằng




**A.** $I=-\frac{4}{5}$. **B.** $I=2$. **C.** $I=\frac{4}{5}$. **D.** $I=-2$.

**Lời giải**

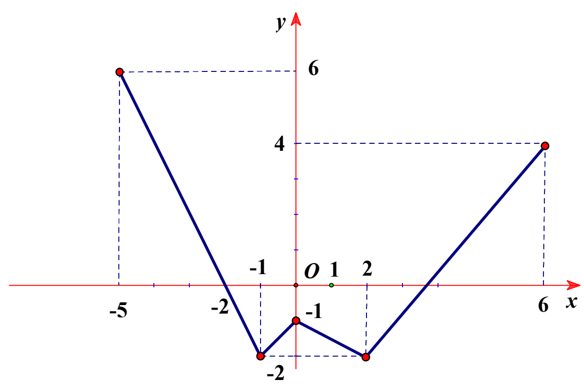
**Chọn A**

Theo đề $\int_{-1}^{1} f(x)dx=3, \int_{1}^{4} f(x)dx=-7$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f(5\sin x-1)dx=\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(5\sin x-1)d(5\sin x-1)=\frac{1}{5}\int_{-1}^{4} f(t)dt$$

$$=\frac{1}{5}\left[\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{4} f(x)dx\right]=-\frac{4}{5}$$

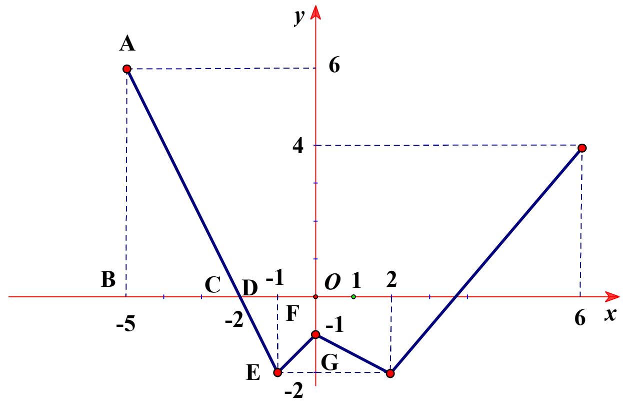
**Ví dụ 2:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-5;6\right]$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int\limits_{-5}^{-\frac{10}{3}} f\left(3x+10\right)dx$ bằng.




**A.** $\frac{25}{6}$. **B.** $\frac{19}{6}$. **C.** $\frac{11}{6}$. **D.** $\frac{13}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Ta có

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BC.AB=\dfrac{1}{2}.6.3=9.$

$S_{DEE}=\dfrac{1}{2}DF.EF=\dfrac{1}{2}.1.2=1.$

$S_{FEGO}=\dfrac{1}{2}\left(GO+EF\right)DO=\dfrac{1}{2}.3.1=\dfrac{3}{2}.$

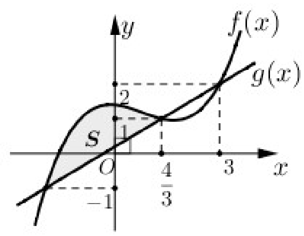
Khi đó

$\int\limits_{-5}^{0}f\left(x\right)\mathrm{dx}=\int\limits_{-5}^{-2}f\left(x\right)\mathrm{dx}-\int\limits_{-2}^{-1}f\left(x\right)\mathrm{dx}-\int\limits_{-1}^{0}f\left(x\right)\mathrm{dx}$

$=S_{ABC}-S_{DEE}-S_{FEGO}=9-1-\dfrac{3}{2}=\dfrac{13}{2}.$

Vậy $\int\limits_{-5}^{-\frac{10}{3}}f\left(3x+10\right)dx=\dfrac{1}{3}\int\limits_{-5}^{-\frac{10}{3}}f\left(3x+10\right)d\left(3x+10\right)=\dfrac{1}{3}\int\limits_{-5}^{0}f\left(t\right)dt=\dfrac{13}{6}$

**Ví dụ 3:** Cho $f\left(x\right),g\left(x\right)$ lần lượt là các hàm đa thức bậc ba và bậc nhất có đồ thị như hình vẽ.




Biết diện tích hình $S$ bằng $\dfrac{250}{81}$. Tính $\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)dx$.

**A.** $\dfrac{7}{3}$. **B.** $\dfrac{38}{15}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{34}{15}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $g\left(x\right)$ là hàm số bậc nhất đi qua $A\left(\dfrac{4}{3};1\right)$ và $B\left(3;2\right)$ nên $g\left(x\right)=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{1}{5}$.

Với $y=-1\Rightarrow\dfrac{3}{5}x+\dfrac{1}{5}=-1\Leftrightarrow x=-2\Rightarrow C\left(-2;-1\right)$ là giao điểm của hai đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$.

Do đó $f(x)-g(x)=a(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)$.

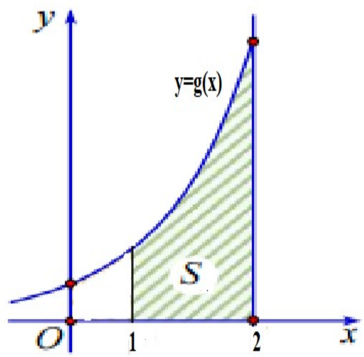
Lại có $S=\int_{-2}^{\frac{4}{3}}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{250}{81}=\int_{-2}^{\frac{4}{3}}\left[a(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)\right]\mathrm{d}x \Leftrightarrow a=\frac{3}{20}$.

Suy ra

$f(x)-g(x)=\frac{3}{20}(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3) \Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{20}(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)+\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$.

Vậy $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left[\frac{3}{20}(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)+\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\right]dx=\frac{34}{15}$.

**Ví dụ 4:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y=g(x)=xf\left(x^2\right)$ có đồ thị trên $[0;2]$ như hình vẽ.

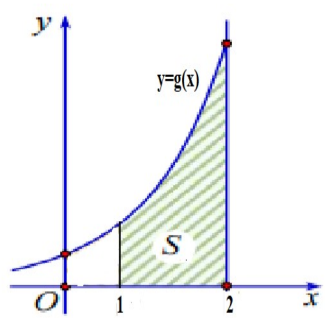



Biết diện tích miền tô đậm là $S=\frac{5}{2}$. Khi đó tích phân $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $10$. **B.** $5$. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Ta có: $S=\int_1^2\left|g(x)\right|\mathrm{dx}=\int_1^2 g(x)\mathrm{dx}=\int_1^2 xf\left(x^2\right)\mathrm{dx}$.

Đặt $t=x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{dx} \Rightarrow x\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $\begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline t & 1 & 4 \end{array}$

$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int_1^4 f(t)\mathrm{d}t=2S=2.\frac{5}{2}=5$.

Hay $\int_1^4 f(x)\,dx = 5$.

**Dạng 2: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi một số đồ thị hàm số và đường thẳng thỏa mãn điều kiện cho trước.**

**Phương pháp giải**

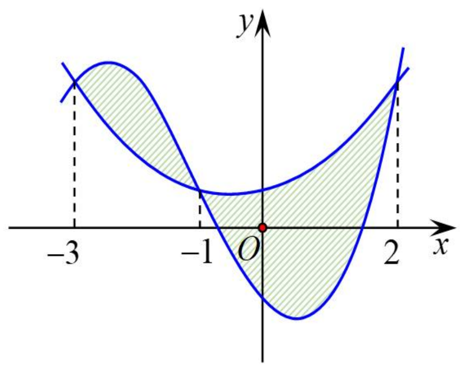
Từ điều kiện cho trước ta đi xác định công thức của đồ thị hàm số và phương trình của đường thẳng (nếu cần)

Xác định hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số và đường thẳng (nếu cần)

Áp dụng công thức tính diện tích của hình phẳng

***+ Bài toán cho điều kiện đối với các đồ thị hàm số giới hạn hình phẳng***

**Ví dụ 5:** Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex + \frac{1}{2}$ $(a,b,c,d,e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ .




Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

**A.** $\frac{253}{12}$. **B.** $\frac{125}{12}$. **<u>C</u>.** $\frac{253}{48}$. **D.** $\frac{125}{48}$.

**Lời giải:**

**Chọn C**

**Cách 1**.

Theo giả thiết hai đồ thị hàm số cắt nhau tại các điểm $-3;1;2$ nên ta có:

$$\begin{cases} -27a + 9b - 3c - 1 = 9d - 3e + \frac{1}{2} \\ -a + b - c - 1 = d - e + \frac{1}{2} \\ 8a + 4b + 2c - 1 = 4d + 2e + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -27a + 9(b-d) - 3(c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ -a + (b-d) - (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ 8a + 4(b-d) + 2(c-e) - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b - d = \frac{1}{2} \\ c - e = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Vậy diện tích cần tính là:

$$S = \left| \int_{-3}^{-1} \left[ ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} \right] dx \right| + \left| \int_{-1}^{2} \left[ ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} \right] dx \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4}.(-20) + \frac{1}{2}.\frac{26}{3} - \frac{5}{4}(-4) - \frac{3}{2}.2 \right| + \left| \frac{1}{4}.\frac{15}{4} + \frac{1}{2}.3 - \frac{5}{4}.\frac{3}{2} - \frac{3}{2}.3 \right| = \frac{4}{3} + \frac{63}{16} = \frac{253}{48}$$

**Cách 2**.

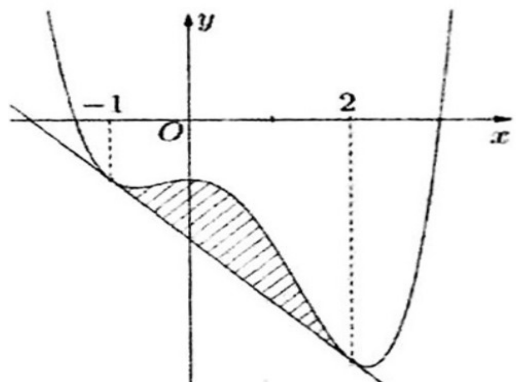
Ta có: $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow a(x+3)(x-2)(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

Đồng nhất hệ số với phương trình $ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=0$ ta có: $\frac{a}{1}=\frac{-\frac{3}{2}}{-6}\Rightarrow a=\frac{1}{4}\Rightarrow f(x)-g(x)=\frac{1}{4}\left(x^3+2x^2-5x-6\right)$

Do đó $S=\int_{-3}^{2}\left|\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2)\right|dx=\frac{253}{48}$.

**Ví dụ 6:** Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+5$ và $g(x)=ex+1$ . Biết rằng đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ tiếp xúc nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-1;2$.




Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

**A.** $\frac{81}{20}$. **B.** $\frac{81}{10}$. **C.** $\frac{81}{4}$. **D.** $\frac{81}{40}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hình phẳng $(H):\begin{cases}y=f(x),y=g(x)\\x=-1,x=2\end{cases}$.

Dựa vào hình vẽ trên diện tích hình phẳng $(H)$ là: $S=\int_{-1}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)dx$.

Ta có: $f(x)-g(x)=ax^4+bx^3+cx^2+(d-e)x+4$

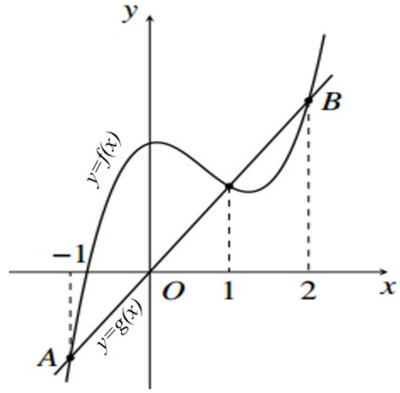
Do đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ tiếp xúc nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-1;2$ nên $x=-1,x=2$ là hai nghiệm bội chẵn của phương trình $f(x)-g(x)=0$.

Suy ra $f(x)-g(x)=ax^4+bx^3+cx^2+(d-e)x+4=a(x+1)^2(x-2)^2$.

Đồng nhất hệ số tự do ta được: $4=4a\Rightarrow a=1$.

Do đó $f(x)-g(x)=(x+1)^2(x-2)^2$ hay $S=\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)^2\,dx=\frac{81}{10}$.

**Ví dụ 7:** Cho đồ thị hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+\frac{1}{3}x+c$ và đường thẳng $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:




Biết $AB=5$, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ bằng

**A.** $\frac{17}{11}$. **B.** $\frac{19}{12}$. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{7}{11}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $g\left(x\right)=mx\ \left(m>0\right)$. Ta có $A\left(-1;-m\right)$; $B\left(2;2m\right)$.

Khi đó $AB=\sqrt{9+9m^2}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{4}{3}\ \left(tm\right)\\ m=-\frac{4}{3}\ \left(l\right)\end{array}\right.$.

Ta có $f\left(x\right)=g\left(x\right)\Leftrightarrow ax^3+bx^2-x+c=0$.

Mặt khác $ax^3+bx^2-x+c=a\left(x^2-1\right)\left(x-2\right)$

$\Leftrightarrow ax^3+bx^2-x+c=ax^3-2ax^2-ax+2a$,

Đồng nhất hệ số ta đươc $a=1$, $b=-2$, $c=2$. Vậy $y=f\left(x\right)=x^3-2x^2+\frac{1}{3}x+2$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ bằng $S=\int_1^2\left(x^3-2x^2+\frac{1}{3}x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{19}{12}$.

**Ví dụ 8:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=6x^4+ax^3+bx^2+cx+d\ \ \left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị có hoành độ lần lượt là $-2;1;2$ và hàm số $y=g\left(x\right)$ là hàm bậc hai có đồ thị đi ba điểm cực trị đó. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $\left(71;72\right)$. **B.** $\left(72;73\right)$.

**C.** $\left(73;74\right)$. **D.** $\left(74;75\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y'=f'\left(x\right)=24x^3+3ax^2+2bx+c$.

Do đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị có hoành độ $-2;1;2$ nên phương trình $f'\left(x\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt $-2;1;2$.

Suy ra $f'\left(x\right)=24\left(x+2\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)\Leftrightarrow f'\left(x\right)=24x^3-24x^2-96x+96$

$\Rightarrow f\left(x\right)=6x^4-8x^3-48x^2+96x+d$.

Ta có

$f(x)=\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{12}\right)f'(x)-26x^2+64x+d+8 \Rightarrow g(x)=-26x^2+64x+d+8$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là

$S=\int_{-2}^{2}\left|f(x)-g(x)\right|dx$

$=\int_{-2}^{2}\left|\left(6x^4-8x^3-48x^2+96x+d\right)-\left(-26x^2+64x+d+8\right)\right|dx \approx 74,63.$

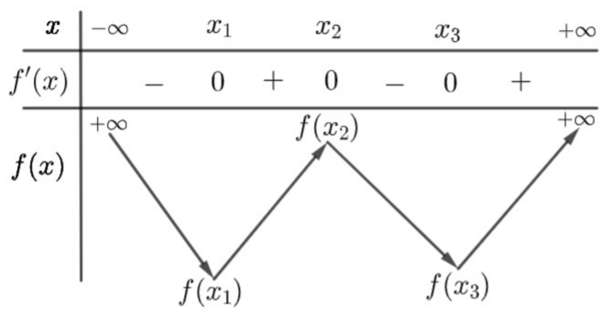
**Ví dụ 9:** Cho hàm số $f(x)=x^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(b,c,d,e\in\mathbb{R})$ có các giá trị cực trị là $1,4$ và $9$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ và trục hoành bằng

**A.** 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 8.

**Lời giải**

**Chọn B**

+) Gọi $x_1<x_2<x_3$ là ba điểm cực trị của hàm số $f(x)$. Ta có bảng biến thiên:




+) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)$ và trục hoành là:

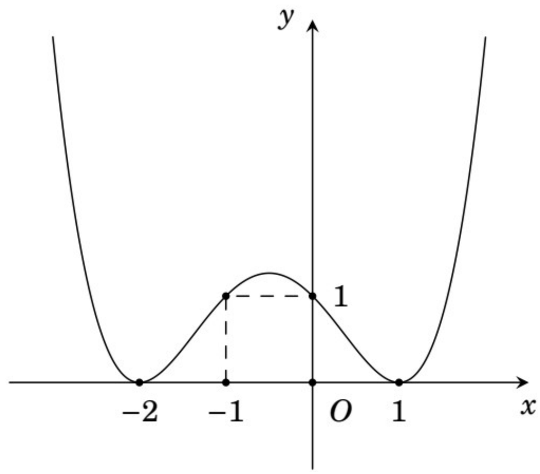
$g(x)=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)=0 \\ f(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_i \quad (i=1,2,3) \\ f(x_i)>0 \text{ (TM)} \end{cases}$

+) Diện tích cần tìm là

$S=\int_{x_1}^{x_2}\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x-\int_{x_2}^{x_3}\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=2\sqrt{f(x)}\Big|_{x_1}^{x_2}-2\sqrt{f(x)}\Big|_{x_2}^{x_3}$

$=4\sqrt{f(x_2)}-2\sqrt{f(x_1)}-2\sqrt{f(x_3)}=6.$

**Ví dụ 10:** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ bên. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ có diện tích bằng




**A.** $\dfrac{127}{40}$. **B.** $\dfrac{107}{5}$. **C.** $\dfrac{87}{40}$. **D.** $\dfrac{127}{10}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm có hoành độ bằng $-2$ và 1 nên hàm số có dạng $f(x)=a(x+2)^2(x-1)^2$.

Mà đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $A(0;1)\Rightarrow 4a=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^2$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}(x+2)(x-1)(2x+1)$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x)$ và $y=f'(x)$:

$$\frac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^2=\frac{1}{2}(x+2)(x-1)(2x+1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\\x=-1\\x=4\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ có diện tích là $S=\int\limits_{-2}^{4}\left|\dfrac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^2-\dfrac{1}{2}(x+2)(x-1)(2x+1)\right|=\dfrac{107}{5}$.

**+ *Bài toán cho điều kiện đối với hàm số có đồ thị giới hạn hình phẳng***

**Ví dụ 11:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $R$ thỏa mãn điều kiện $f(x)+x\left(f^{'}(x)-2\sin x\right)=x^2\cos x, x\in\mathbb{R}$ và $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục $Ox$, $x=\dfrac{\pi}{2}, x=\pi$ thuộc thuộc tập hợp nào trong các tập hợp dưới đây?

**A.** $(0;1)$. **B.** $[1;3]$. **C.** $[3;4)$. **D.** $[4;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn** B

Từ giả thiết $f(x)+x\left(f^{'}(x)-2\sin x\right)=x^2\cos x$

$\Leftrightarrow f(x)+xf^{'}(x)=x^2\cos x+2x\sin x$

$\Leftrightarrow \left(xf\left(x\right)\right)' \quad =\left(x^2\sin x\right)'$

$\Leftrightarrow xf\left(x\right) \qquad =x^2\sin x+C$

Mặt khác: $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow f\left(x\right)=x\sin x.$

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục $Ox$, $x=\dfrac{\pi}{2},x=\pi$ bằng

$S=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|x\sin x\right|dx=2,14$

**Ví dụ 12:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2\left(x\right)+\left(2x-1\right)f\left(x\right)=xf^{'}\left(x\right)-1$, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục $Ox$ và các đường thẳng $x=1,x=2$ bằng

**A.** $\dfrac{\ln 2}{2}+1$.

**<u>B</u>.** $\ln 2+\dfrac{1}{2}$.

**C.** $\ln 2+\dfrac{3}{2}$.

**D.** $\dfrac{\ln 2}{2}+\dfrac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $x^2f^2\left(x\right)+2xf\left(x\right)+1=xf^{'}\left(x\right)+f\left(x\right)\Leftrightarrow\left(xf\left(x\right)+1\right)^2=\left(xf\left(x\right)+1\right)^{'}$

Do đó $\dfrac{\left(xf\left(x\right)+1\right)^{'}}{\left(xf\left(x\right)+1\right)^2}=1\Rightarrow\int\dfrac{\left(xf\left(x\right)+1\right)^{'}}{\left(xf\left(x\right)+1\right)^2}dx=\int 1dx\Rightarrow-\dfrac{1}{xf\left(x\right)+1}=x+c$

$\Rightarrow xf\left(x\right)+1=-\dfrac{1}{x+c}$

$\Rightarrow xf\left(x\right)=-\dfrac{1}{x+c}-1=\dfrac{-x-c-1}{x+c}\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{-x-c-1}{\left(x+c\right)x}$

Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nên $c=0\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{-x-1}{x^2}$

Vậy $\int\limits_1^2\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left|\left(-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)\right|dx=\left|\left(-\ln x+\dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2\right|=\ln 2+\dfrac{1}{2}$.

**Ví dụ 13:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[2;4\right]$ và $f'\left(x\right)>0,\forall x\in\left[2;4\right]$. Biết $4x^3f\left(x\right)=\left[f'\left(x\right)\right]^3-x^3,\forall x\in\left[2;4\right],f\left(2\right)=\dfrac{7}{4}$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục $Ox$ và các đường thẳng $x=2,x=4$ bằng

**A.** $\dfrac{-9+80\sqrt{5}}{4}$.

**B.** $-2+5\sqrt{5}$.

**C.** $\dfrac{-9+40\sqrt{5}}{4}$.

**<u>D</u>.** $-2+10\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $f'(x)>0, \forall x\in[2;4]$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[2;4]$ $\Rightarrow f(x)\ge f(2)$ mà $f(2)=\dfrac{7}{4}$. Do đó: $f(x)>0, \forall x\in[2;4]$.

Từ giả thiết ta có: $4x^3f(x)=\left[f'(x)\right]^3-x^3 \Leftrightarrow x^3\left[4f(x)+1\right]=\left[f'(x)\right]^3$

$\Leftrightarrow x.\sqrt[3]{4f(x)+1}=f'(x)\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}=x$.

Suy ra:

$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x\Leftrightarrow \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left[4f(x)+1\right]}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}=\frac{x^2}{2}+C\Leftrightarrow \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left[4f(x)+1\right]^2}=\frac{x^2}{2}+C$ mà

$f(2)=\dfrac{7}{4}\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}=2+C\Leftrightarrow C=-\dfrac{1}{2}$

Suy ra $f(x)=\dfrac{\sqrt{\left[\frac{4}{3}\left(x^2-1\right)\right]^3}-1}{4}$ $\Rightarrow f(4)=\dfrac{40\sqrt{5}-1}{4}$

Vậy $S=\displaystyle\int_2^4|f'(x)|dx=\int_2^4 f'(x)dx=f(4)-f(2)=-2+10\sqrt{5}$

**Ví dụ 14:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2+4f(x)=8x^2-32x+28$ với mọi $x$ thuộc $[0;2]$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục $Ox$ và trục $Oy$ bằng

**A.** 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 14.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có

$\left(f'(x)\right)^2+4f(x)=8x^2-32x+28\Rightarrow \displaystyle\int_1^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x+2\int_1^2 2f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\left(8x^2-32x+28\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_1^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x-2\int_1^2(2x-4)f'(x)\mathrm{d}x+\int_1^2(2x-4)^2\mathrm{d}x$

$=\displaystyle\int_1^2\left(8x^2-32x+28\right)\mathrm{d}x+\int_1^2(2x-4)^2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_1^2\left[f'(x)-(2x-4)\right]^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f'(x)=2x-4$.

Xét $f'(x)=2x-4=0\Leftrightarrow x=2$

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$, trục $Ox$, trục $Oy$ bằng

$S=\displaystyle\int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^2|2x-4|\mathrm{d}x=4$.

**Ví dụ 15:** Cho hàm số $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ với $b$, $c$, $d$ là các số thự **C**. Biết hàm số $g(x)=f(x)+2f'(x)+3f''(x)$ có hai giá trị cực trị là $-6$ và $42$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\dfrac{f(x)+f'(x)+f''(x)}{g(x)+18}$ và $y=1$

**A.** $\ln 5$ **B.** $\ln 7$ **C.** $2\ln 6$ **D.** $2\ln 5$

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số $f\left(x\right)$ là hàm số bậc 3 nên $g\left(x\right)$ là hàm số bậc 3 suy ra $g'\left(x\right)$ là hàm số bậc hai. Ta có $3f^{(3)}\left(x\right)=3.3!=18$;

$g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+2f''\left(x\right)+18$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ và $g\left(x_1\right)=42$, $g\left(x_2\right)=-6$.

Xét phương trình tìm cận của tích phân để tính diện tích:

$$\frac{f\left(x\right)+f'\left(x\right)+f''\left(x\right)}{g\left(x\right)+18}=1\Leftrightarrow\frac{f'\left(x\right)+2f''\left(x\right)+18}{g\left(x\right)+18}=0.$$

Suy ra $f'\left(x\right)+2f''\left(x\right)+18=0\Leftrightarrow g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng

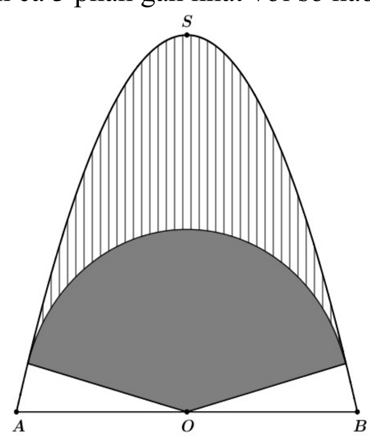
$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{f\left(x\right)+f'\left(x\right)+f''\left(x\right)}{g\left(x\right)+18}-1\right|dx=\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{g'\left(x\right)}{g\left(x\right)+18}\right|dx=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{g'\left(x\right)}{g\left(x\right)+18}dx\right|.$$

Đặt $t=g\left(x\right)+18\Rightarrow dt=g'\left(x\right)dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=x_1\Rightarrow t_1=g\left(x_1\right)+18\\x=x_2\Rightarrow t_2=g\left(x_2\right)+18\end{cases}$.

Do đó $S=\left|\int_{60}^{12}\frac{dt}{t}\right|=\left|\ln t\Big|_{60}^{12}\right|=\left|\ln 12-\ln 60\right|=\left|\ln\frac{12}{60}\right|=\left|-\ln 5\right|=\ln 5$.

***+ Bài toán cho hình phẳng dạng elip, parabol,…***

**Ví dụ 16:** Trên bức tường cần trang trí một hình phẳng dạng paranol đỉnh $S$ như hình vẽ, biết $OS=AB=4$ m, $O$ là trung điểm của $AB$. Parabol trên được chia thành ba phần để sơn ba màu khác nhau với mức chi phí: phần trên là phần kẻ sọc 140000 đồng/ $\text{m}^2$, phần giữa là hình quạt tâm $O$, bán kính $2$ m được tô đậm 150000 đồng/ $\text{m}^2$, phần còn lại 160000 đồng/ $\text{m}^2$. Tổng chi phí để sơn cả 3 phần gần nhất với số nào sau đây?

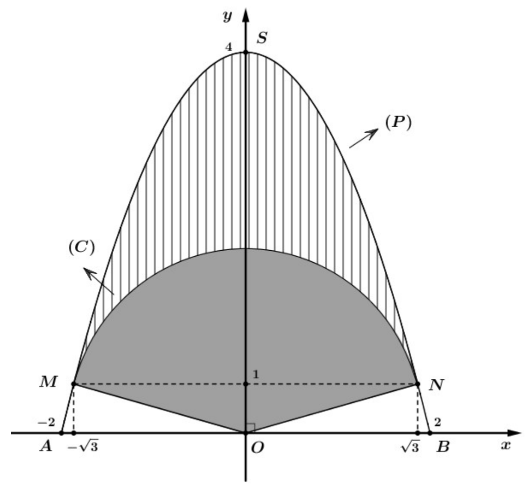



**A.** 1.597.000 đồng. **B.** 1.625.000 đồng.

**<u>C</u>.** 1.575.000 đồng. **D.** 1.600.000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn C**




Dựng hệ trục $Oxy$ như hình vẽ.

Gọi parabol $(P)$ có phương trình: $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$. Khi đó $(P)$ đi qua các điểm $S(0,4)$, $A(-2;0)$ và $B(2;0)$.

Suy ra ta có $\begin{cases}c=4\\4a-2b+c=0\\4a+2b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=0\\c=4\end{cases}$. Vậy parabol $(P)$: $y=-x^2+4$.

Đường tròn $(C)$ có tâm $O(0;0)$ và bán kính $OA=2$.

Khi đó phương trình $(C)$ là: $x^2+y^2=4$. Suy ra phương trình nửa đường tròn là $y=\sqrt{4-x^2}$.

Gọi $M$, $N$ là giao điểm của $(C)$ và $(P)$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ và $(P)$ ta có:

$\sqrt{4-x^2}=-x^2+4$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+4\geq 0\\\sqrt{4-x^2}=\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+4\geq 0\\\left[\begin{array}{l}\sqrt{4-x^2}=0\\\sqrt{4-x^2}=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+4\geq 0\\\left[\begin{array}{l}x^2=4\\x^2=3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 2\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Suy ra điểm $M\left(-\sqrt{3};1\right)$ và điểm $N\left(\sqrt{3};1\right)$.

Phương trình đường thẳng $ON$ là: $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$.

Chi phí sơn phần kẻ sọc là: $T_1=\left[2\int_0^{\sqrt{3}}\left(-x^2+4-\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x\right].140000$.

Chi phí sơn phần hình quạt là: $T_2=\left[2\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x\right)\mathrm{d}x\right].150000$.

Chi phí sơn phần còn lại là: $T_3=\left[2\int_0^{\sqrt{3}}\dfrac{1}{\sqrt{3}}x\mathrm{d}x+2\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(-x^2+4\right)\mathrm{d}x\right].160000$.

Vậy tổng chi phí sơn là: $T=T_1+T_2+T_3\approx 1575349,5$.

**Dạng 4: Tìm điều kiện của tham số để diện tích hình phẳng thỏa mãn điều kiện cho trước.**

**Phương pháp giải**

Từ điều kiện cho trước ta đi xác định công thức đồ thị hàm số và phương trình đường thẳng (nếu cần)

Xác định hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số và đường thẳng (nếu cần)

Áp dụng công thức tính diện tích của hình phẳng theo tham số.

Từ điều kiện cho trước về diện tích hình phẳng từ đó tìm được điều kiện của tham số

**Ví dụ 17:** Gọi $m_0$ là giá trị của tham số $m$ để diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + m$ và trục hoành bằng $\dfrac{32}{3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng** ?

**A.** $m_0 \in (-5;-1)$. | **B.** $m_0 > 1$.

**C.** $m_0 \in [-1;1]$. | **D.** $m_0 \le -5$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ (1)

Để có hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + m$ và trục hoành thì có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$

Khi đó, diện tích của hình phẳng là

Ta có $S = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left| x^2 - 2x + m \right| \mathrm{d}x = \left. \left( \dfrac{x^3}{3} - x^2 + mx \right) \right|_{x_1}^{x_2}$

Mặt khác

$x_1^2 - 2x_1 + m = 0 \Rightarrow \dfrac{x_1^3}{3} - x_1^2 + mx_1 = \dfrac{1}{3}\left(x_1^3 - 3x_1^2 + 3mx\right) = \dfrac{1}{3}\left(2x_1^2 - mx_1 - 3x_1^2 + 3mx_1\right)$

$= \dfrac{1}{3}\left(-x_1^2 + 2mx_1\right) = \dfrac{1}{3}\left(-2x_1 + m + 2mx_1\right)$

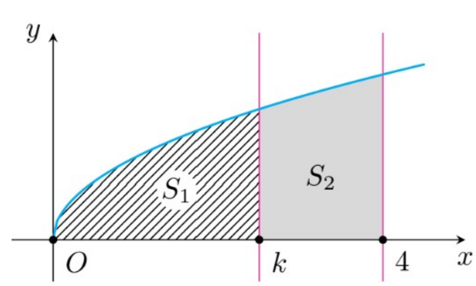
Tương tự $\dfrac{x_2^3}{3} - x_2^2 + mx_2 = \dfrac{1}{3}\left(-2x_2 + m + 2mx_2\right)$

$\Rightarrow S = \dfrac{1}{3}\left|\left(-2x_2 + m + 2mx_2\right) - \left(-2x_1 + m + 2mx_1\right)\right| = \dfrac{1}{3}\left|\left(x_2 - x_1\right)\left(-2 + 2m\right)\right| = \dfrac{32}{3}$

$\Leftrightarrow \left(x_2 - x_1\right)^2\left(-1 + m\right)^2 = 16^2 \Leftrightarrow \left(2^2 - 4m\right)\left(m-1\right)^2 = 16^2 \Leftrightarrow \left(1 - m\right)^3 = 4^3 \Leftrightarrow m = -3$

Vậy $m = -3$ thỏa mãn bài toán.

**Ví dụ 18:** Cho hình thang cong $(H)$ giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4$. Đường thẳng $x = k\,(0 < k < 4)$ chia hình $(H)$ thành hai phần có diện tích là $S_1$ và $S_2$ như hình vẽ. Để $S_1 = 4S_2$ thì giá trị $k$ thuộc khoảng nào sau đây?




**A.** $(3,1;3,3)\cdot$ | **B.** $(3,7;3,9)\cdot$

**C.** $(3,3;3,5)\cdot$ | **D.** $(3,5;3,7)\cdot$

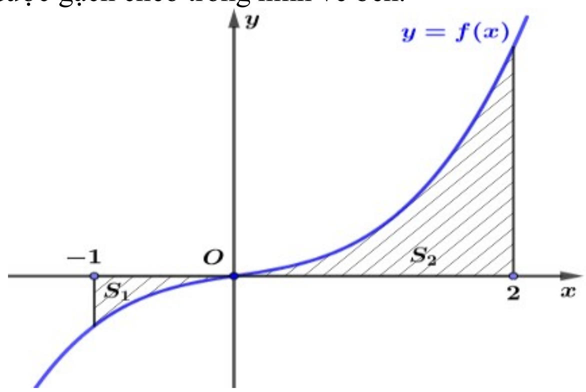
**Lời giải**

**Chọn C**

$$S_1=\int_0^k\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^k=\frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}.\quad S_2=\int_k^4\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_k^4=\frac{2}{3}.4^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}.k^{\frac{3}{2}}.$$

Suy ra $S_1=4S_2\Leftrightarrow\frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}=4\left[\frac{2}{3}.4^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}.k^{\frac{3}{2}}\right]\Leftrightarrow k\approx 3.447$.

**Ví dụ 19:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3+ax$ có đồ thị như hình bên. Gọi $S_1$, $S_2$ lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên.

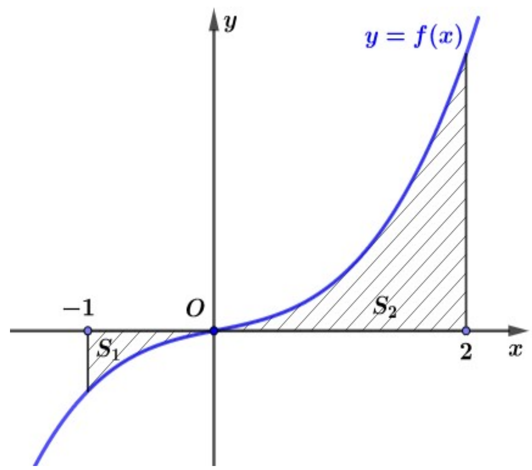



Khi $\frac{S_1}{S_2}=\frac{7}{40}$ thì $a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$. B. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$. C. $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. D. $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Dựa vào đồ thị suy ra: $\begin{cases}f\left(-1\right)<0\\ f\left(2\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{1}{3}-a<0\\ \frac{8}{3}+2a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>-\frac{1}{3}\\ a>-\frac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow a>-\frac{1}{3}$.

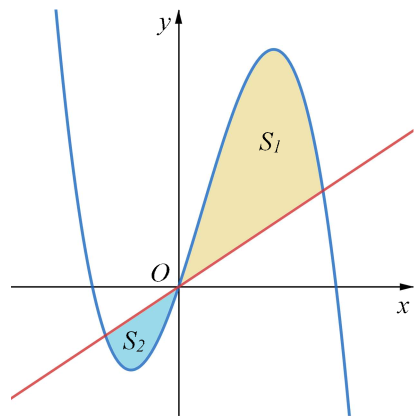
Ta có:

$$S_1=\int_{-1}^0\left|\frac{1}{3}x^3+ax\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^0\left(\frac{1}{3}x^3+ax\right)\mathrm{d}x\right|=-\int_{-1}^0\left(\frac{1}{3}x^3+ax\right)\mathrm{d}x=-\left.\left(\frac{x^4}{12}+\frac{ax^2}{2}\right)\right|_{-1}^0=\frac{1}{12}+\frac{a}{2}.$$

$$S_2=\int_0^2\left|\frac{1}{3}x^3+ax\right|\mathrm{d}x=\left|\int_0^2\left(\frac{1}{3}x^3+ax\right)\mathrm{d}x\right|=\int_0^2\left(\frac{1}{3}x^3+ax\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{12}+\frac{ax^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}+2a.$$

$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{7}{40}\Leftrightarrow\dfrac{\frac{1}{12}+\frac{a}{2}}{\frac{4}{3}+2a}=\dfrac{7}{40}\Leftrightarrow a=1$. Vậy $a\in\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{5}{4}\right)$.

**Ví dụ 20:** Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{4}x^2+3x$ có đồ thị $(C)$ và đường thẳng $d$ đi qua gốc tọa độ tạo thành hai miền phẳng có diện tích $S_1$ và $S_2$ như hình vẽ

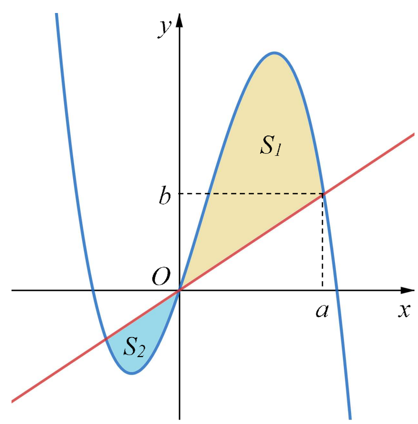



Biết $S_1=\dfrac{27}{4}$. Khi đó $S_2=\dfrac{m}{n}$, giá trị của $2m-n$ bằng

**A.** $143$. **B.** $-50$. **C.** $50$. **D.** $142$.

**Lời giải**

**Chọn D**




◆ Gọi $a>0$ là hoành độ giao điểm của $(C)$ và $d$.

Khi đó, đường thẳng $d$ có hệ số góc là: $k=\dfrac{-\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{4}a^2+3a}{a}=-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{3}{4}a+3$.

Đường thẳng $d$ đi qua gốc tọa độ nên có phương trình là

$d:y=\left(-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{3}{4}a+3\right)x$.

◆ Ta có: $S_1=\displaystyle\int_0^a\left[\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+3x\right)-\left(-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{4}a+3\right)x\right]\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \dfrac{27}{4} = \left[\left(-\dfrac{1}{8}x^4 + \dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2\right) - \left(-\dfrac{1}{4}a^2 + \dfrac{3}{8}a + \dfrac{3}{2}\right)x^2\right]\Bigg|_0^a$

$\Leftrightarrow \dfrac{27}{4} = \left(-\dfrac{1}{8}a^4 + \dfrac{1}{4}a^3 + \dfrac{3}{2}a^2\right) - \left(-\dfrac{1}{4}a^2 + \dfrac{3}{8}a + \dfrac{3}{2}\right)a^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{27}{4} = \dfrac{1}{8}a^4 - \dfrac{1}{8}a^3 \Leftrightarrow a = 3$.

Do đó, $d: y = \dfrac{3}{4}x$.

+ Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ và $d$ là:

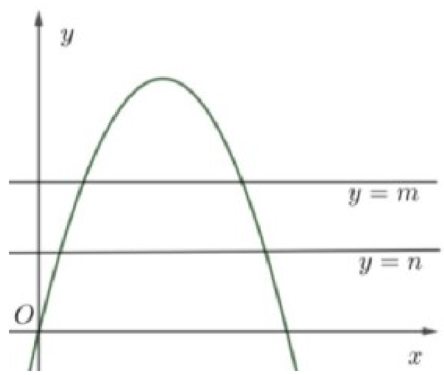
$\dfrac{3}{4}x - \left(-\dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + 3x\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{9}{4}x = 0$

+ Phương trình trên có 3 nghiệm: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ và $x_3 = -\dfrac{3}{2}$.

$S_2 = \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{0} \left(\dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{9}{4}x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{135}{128}$.

Do đó: $m = 135$, $n = 128$. Vậy: $2m - n = 142$.

**Ví dụ 21:** Gọi $(H)$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y = m$ và $y = n$ chia $(H)$ thành 3 phần có diện tích bằng nhau. Giá trị của biểu thức $T = (4-m)^3 + (4-n)^3$ bằng




**A.** $T = \dfrac{320}{9}$. **B.** $T = \dfrac{512}{15}$. **C.** $T = 405$. **D.** $T = \dfrac{75}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

*) Chứng minh công thức tính nhanh diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ cắt trục hoành tại 2 điểm $x_1, x_2$ và trục hoành ( $x_1 < x_2$ )

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ và trục hoành là

$S = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \left|ax^2 + bx + c\right| dx$

Không mất tính tổng quát, sử a<0. Vì đồ thị hàm số đã cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $x_1, x_2$ nên $ax^2 + bx + c \geq 0,\ \forall \mathrm{x} \in [x_1; x_2]$. Do đó,

$S = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} (ax^2 + bx + c)dx = \left(\dfrac{a}{3}x^3 + \dfrac{b}{2}x^2 + cx\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = \dfrac{a}{3}(x_2^3 - x_1^3) + \dfrac{b}{2}(x_2^2 - x_1^2) + c(x_2 - x_1)$

$$=(x_2-x_1)\left[\frac{a}{3}(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)+\frac{b}{2}(x_2+x_1)+c\right]=-\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\left[\frac{a}{3}(\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a})+\frac{b}{2}(\frac{-b}{a})+c\right]$$

$$=-\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\left[\frac{-b^2+4ac}{6a}\right]=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\left[\frac{b^2-4ac}{6a}\right]=\frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2}.$$ Vậy $\boxed{S=\frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2} \text{ hay } S^2=\frac{\Delta^3}{36a^4}}$

***) Vận dụng công thức tính nhanh vào giải bài tập:**

Gọi $S$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ và trục hoành. Ta có $S=\frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2}=\frac{16\sqrt{16}}{6}=\frac{32}{3}$

+) Gọi $S_1$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ (P) và $y=m$

Tịnh tiến xuống dưới $m$ đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=-x^2+4x-m$

Khi đó $S_1$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x-m$ và trục Ox

$$S_1{}^2=\frac{\Delta_1^3}{36a_1^4}=\frac{(16-4m)^3}{36}\Leftrightarrow(4-m)^3=\frac{36S_1{}^2}{4^3}\ (1)$$

+) Gọi $S_2$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ (P) và $y=n$

Tịnh tiến xuông $n$ đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=-x^2+4x-n$

Khi đó $S_2$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x-n$ và trục Ox

$$S_2{}^2=\frac{\Delta_2^3}{36a_2^4}=\frac{(16-4n)^3}{36}\Leftrightarrow(4-n)^3=\frac{36S_2{}^2}{4^3}\ (2)$$

Theo bài ra ta có $S_1=\frac{S}{3}=\frac{32}{9}$; S$=\frac{2S}{3}=\frac{64}{9}$

Từ và ta có $T=\frac{36(S_1{}^2+S_2{}^2)}{4^3}=\frac{9}{16}.\frac{5120}{81}=\frac{320}{9}$.

**Ví dụ 22:** Số thực dương $a$ thỏa mãn diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $y=\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}$ và $y=\frac{a^2-ax}{1+a^6}$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tỉ số diện tích hình phẳng được giới hạn bởi mỗi đồ thị trên với trục hoành, $x=0, x=1$ là

**A.** $\frac{15}{3}$. **B.** $\frac{26}{3}$. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** $\frac{10}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

◆ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$$\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}=\frac{a^2-ax}{1+a^6}\Leftrightarrow x^2+3ax+2a^2=0\Leftrightarrow(x+a)(x+2a)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-a\\x=-2a\end{array}\right.$$

◆ Nếu $a=0$ thì diện tích hình phẳng $S=0$.

+ Nếu $a>0$ thì $S=\int_{-2a}^{-a}\left|\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\right|dx=-\int_{-2a}^{-a}\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}dx=\frac{1}{6}.\frac{a^3}{1+a^6}$.

+ Nếu $a<0$ thì $S=\int_{-a}^{-2a}\left|\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\right|dx=-\int_{-a}^{-2a}\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}dx=-\frac{1}{6}.\frac{a^3}{1+a^6}$.

◆ Do đó, với $a\neq0$ thì $S=\frac{1}{6}.\frac{|a|^3}{1+|a|^6}\le\frac{1}{6}.\frac{|a|^3}{2|a|^3}=\frac{1}{12}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $|a|^3=1\Leftrightarrow a=\pm1$. Vì $a>0$ nên $a=1$.

Khi đó $S_1=\int\limits_0^1\frac{x^2+2x+3}{2}\mathrm{d}x=\frac{13}{6}$, $S_2=\int\limits_0^1\frac{1-x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$

- Suy ra $\frac{S_1}{S_2}=\frac{26}{3}$.

**Dạng 5: Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh Ox hình phẳng giới hạn bởi một số đồ thị hàm số và đường thẳng thỏa mãn điều kiện cho trước.**

**Phương pháp giải**

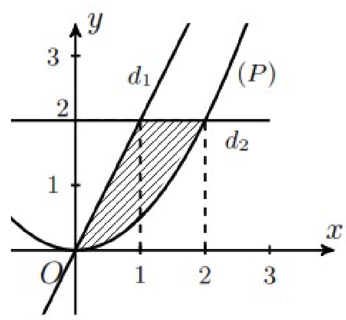
Từ điều kiện cho trước ta đi xác định công thức đồ thị hàm số và phương trình đường thẳng (nếu cần)

Xác định hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số và đường thẳng (nếu cần)

Áp dụng công thức tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh Ox hình phẳng đã cho

**+ *Bài toán cho trước hình phẳng quay quanh trục Ox***

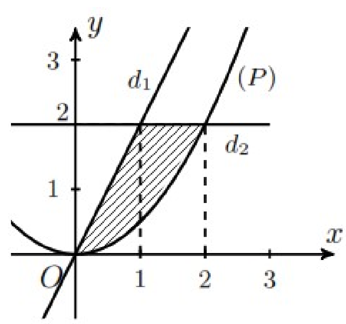
**Ví dụ 23:** Cho hình $(H)$ giới hạn bởi ba đường $(P): y=\frac{1}{2}x^2$, $d_1: y=2x$ và $d_2: y=2$. Khi xoay hình $(H)$ quanh trục $Ox$ tạo thành khối tròn xoay có thể tích là




**A.** $\frac{7\pi}{6}$. **B.** $\frac{56}{15}$. **C.** $\frac{56\pi}{15}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Ta có giao điểm của $d_1$ và $d_2$ là $A(1;2)$ và giao điểm của $d_2$ và $(P)$ là $B(2;2)$.

Gọi $V_1$ là khối tròn xoay tạo thành khi xoay hình phẳng giới hạn bởi 4 đường $d_1, (P), Oy$ và $x=1$.

Suy ra $V_1=\pi\int\limits_0^1\left(4x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{20}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{77\pi}{60}$.

Gọi $V_2$ là khối tròn xoay tạo thành khi xoay hình phẳng giới hạn bởi 4 đường $d_2, (P), x=1$ và $x=2$.

Suy ra $V_2=\pi\int\limits_1^2\left(4-\frac{1}{4}x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(4x-\frac{1}{20}x^5\right)\Big|_1^2=\frac{49\pi}{20}$.

Suy ra $V=V_1+V_2=\frac{56\pi}{15}$.

**Cách 2:**

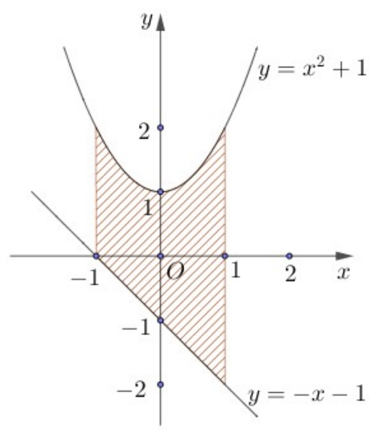
Gọi $V'$ là khối tròn xoay tạo thành khi xoay hình phẳng giới hạn bởi 4 đường $d_2, Ox, Oy$ và $x=2$. Suy ra $V'=\pi\int\limits_0^2\left(2^2\right)\mathrm{d}x=8\pi$.

Gọi $V_3$ là khối tròn xoay tạo thành khi xoay hình phẳng giới hạn bởi 4 đường $d_1, d_2, Oy$ và $x=1$. Suy ra $V_3=\pi\int\limits_0^1\left(2^2-4x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(4x-\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{8\pi}{3}$.

Gọi $V_4$ là khối tròn xoay tạo thành khi xoay hình phẳng giới hạn bởi 4 đường $Ox, (P), Oy$ và $x=2$. Suy ra $V_4=\pi\int\limits_0^2\left(\frac{1}{4}x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{20}x^5\right)\Big|_0^2=\frac{8\pi}{5}$.

Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V=V'-V_3-V_4=8\pi-\frac{8\pi}{3}-\frac{8\pi}{5}=\frac{56\pi}{15}$.

**Ví dụ 24:** Cho $(H)$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=x^2+1; y=-x-1$ và hai đường thẳng $x=-1; x=1$.

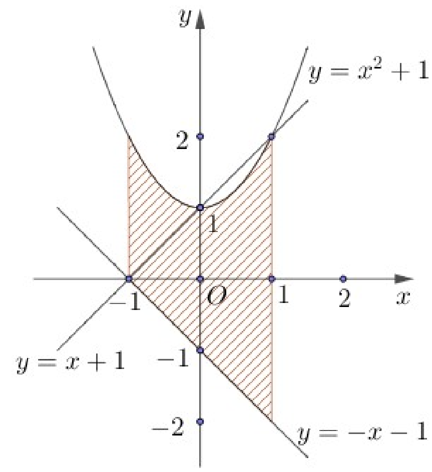



Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay $(H)$ quanh trục $Ox$ bằng

**A.** $\frac{176\pi}{15}$. **B.** $\frac{14\pi}{3}$. **C.** $\frac{21\pi}{5}$. **D.** $\frac{16\pi}{15}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $(H_1)$ là hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2 + 1$, $y = 0; x = -1, x = 0$. Khi quay $(H_1)$ quanh trục $Ox$ thì khối tròn xoay được tạo thành có thể tích $V_1 = \pi \int_{-1}^{0} (x^2 + 1)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{28\pi}{15}$.

Gọi $(H_2)$ là hình phẳng được giới hạn bởi $y = -x - 1, y = 0; x = 0, x = 1$. Khi quay $(H_2)$ quanh trục $Ox$ thì khối tròn xoay được tạo thành có thể tích $V_2 = \pi \int_{0}^{1} (-x-1)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{7\pi}{3}$.

Vậy thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay $(H)$ quanh trục $Ox$ là $V = V_1 + V_2 = \frac{21\pi}{5}$.

**Ví dụ 25:** Gọi $V$ là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Giá trị của $V$ có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

**A.** 550 **B.** 400 **C.** 670 **D.** 335

**Lời giải**

**Chọn D**

Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng:

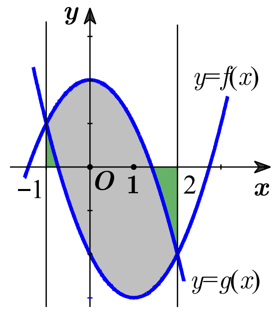
$$H = \left\{ y = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}, y = 0, x = -5, x = 5 \right\}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi $H$ khi quay xung quanh trục hoành là:

$$V = \pi \int_{-5}^{5} \left( 16 - \frac{16x^2}{25} \right) dx = \pi \left( 16x - \frac{16x^3}{75} \right) \Bigg|_{-5}^{5} = \frac{320\pi}{3} \simeq 335{,}1$$

***+ Bài toán cho điều kiện đối với đồ thị hàm số giới hạn hình phẳng sinh ra khối tròn xoay.***

**Ví dụ 26:** Gọi $(D)$ là miền được giới hạn bởi hai đường cong $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ và $y = g(x) = -x^2 + mx + n$. Biết $S_{(D)} = 9$ và đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đỉnh $I(0;2)$. Khi cho miền được giới hạn bởi hai đường cong trên và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 2$ quay quanh trục $Ox$, ta nhận được vật thể tròn xoay có thể tích $V = \frac{a\pi}{b}$, trong đó $a, b$ là các số nguyên dương. Giá trị biểu thức $P = a^2 - b^3$ bằng




**A.** $P = 2101$. **B.** $P = 1342$.

**C.** $P = 2021$. **D.** $P = 63706$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Parabol $y = g(x)$ có đỉnh $I(0;2)$ suy ra $m = 0;\ n = 2 \Rightarrow y = g(x) = -x^2 + 2$

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = f(x)$ và $y = g(x)$:

$ax^2 + bx + c = -x^2 + 2 \Leftrightarrow (a+1)x^2 + bx + c - 2 = 0$. $(1)$

Dựa vào hình vẽ, ta có phương trình hoành độ giao điểm của $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cũng có dạng là $(a+1)(x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow (a+1)(x^2 - x - 2) = 0$ $(2)$

Ta có $S_{(D)} = 9 \Leftrightarrow \int_{-1}^{2} \left|(a+1)(x^2 - x - 2)\right| \mathrm{d}x = 9 \Leftrightarrow \dfrac{9}{2}|a+1| = 9 \Leftrightarrow a + 1 = 2 \Leftrightarrow a = 1$

Với $a = 1$, từ $(1)$ và $(2)$ ta suy ra: $2x^2 + bx + c - 2 = 2x^2 - 2x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = -2 \end{cases}$

Vì hai đường $y = f(x) = x^2 - 2x - 2$ và $y = g(x) = -x^2 + 2$ nằm khác phía trục $Ox$ nên ta lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x - 2$ qua trục $Ox$ ta được đồ thị hàm số $y = -(x^2 - 2x - 2) = -x^2 + 2x + 2$.

Xét $-x^2 + 2 - (-x^2 + 2x + 2) = -2x \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 2 \geq -x^2 + 2x + 2 > 0, \forall x \in [-1;0] \\ 0 < -x^2 + 2 \leq -x^2 + 2x + 2, \forall x \in [0;2] \end{cases}$

Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$$V = \pi \int_{-1}^{0} (-x^2 + 2)^2 \mathrm{d}x + \pi \int_{0}^{2} (-x^2 + 2x + 2)^2 \mathrm{d}x = \frac{259\pi}{15} \Rightarrow a = 259; b = 15$$

Vậy $P = 259^2 - 15^3 = 63706$.

***+ Bài toán cho điều kiện đối với hàm số có đồ thị giới hạn hình phẳng sinh ra khối tròn xoay.***

**Ví dụ 27:** Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = e$ và $f'(x) = \dfrac{x-1}{x^2} e^x$, $\forall x \neq 0$. Khi đó thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = g(x) = x.f(x)$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ quanh trục $Ox$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{2}(e^4 - e^2)$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}(e^4 - e^2)$.

**C.** $\dfrac{\pi}{2}(e^2 - e)$. **D.** $\dfrac{1}{2}(e^2 - e)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}.e^x=\left(\dfrac{1}{x}e^x-\dfrac{1}{x^2}e^x\right)$.

Có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{x}e^x-\dfrac{1}{x^2}e^x\right)\mathrm{d}x$.

Mặt khác $\int\dfrac{1}{x}e^x\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x}\left(e^x\right)'\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x}e^x-\int\left(\dfrac{1}{x}\right)'e^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x}e^x+\int\dfrac{1}{x^2}e^x\,\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x}e^x+c$, với $f(1)=e\ \Rightarrow c=0$ nên $f(x)=\dfrac{1}{x}e^x$.

Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int_1^2\left(x.\frac{1}{x}e^x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2 e^{2x}\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\Bigg|_1^2=\frac{\pi}{2}\left(e^4-e^2\right).$$

**Ví dụ 28:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x.f(x).f'(x)=f^2(x)-x,\forall x\in\mathbb{R}$ và có $f(2)=1$. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh $Ox$ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục $Ox$ và các đường thẳng $x=0,x=2$ bằng

**A.** $\dfrac{3\pi}{2}$ **B.** $\dfrac{4\pi}{3}$ **C.** $2\pi$ **D.** $4\pi$

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có

$x.f(x).f'(x)=f^2(x)-x\Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x)=2f^2(x)-2x$

$\Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x)+f^2(x)=3f^2(x)-2x\Leftrightarrow\int_0^2\left(x.f^2(x)\right)'dx=3\int_0^2 f^2(x)dx-\int_0^2 2xdx$

$\Leftrightarrow\left(x.f^2(x)\right)\Big|_0^2=3\int_0^2 f^2(x)dx-4\Leftrightarrow 2\Leftrightarrow\int_0^2 f^2(x)dx=2\Rightarrow V=\pi\int_0^2 f^2(x)dx=2\pi$

**Ví dụ 29:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=\left|x^2+4x+3\right|$ thỏa mãn $f(-2)+f(0)=-\dfrac{2}{3}$. Gọi $V$ là thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh $Ox$ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục $Ox$ và các đường thẳng $x=-2,x=2$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.** $V\in[0;200]$. **B.** $V\in(200;500)$.

**C.** $V\in\left[500;10^6\right]$. **D.** $V\in\left(10^6;+\infty\right)$.

**Lời giải**

Ta có: $f'(x)=\begin{cases}x^2+4x+3;x\in(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)\\-x^2-4x-3;x\in[-3;-1]\end{cases}$.

Suy ra $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+2x^2+3x+C_1;x\in(-\infty;-3)\\-\dfrac{x^3}{3}-2x^2-3x+C_2;x\in[-3;-1]\\\dfrac{x^3}{3}+2x^2+3x+C_3;x\in(-1;+\infty)\end{cases}$

Vì $\lim\limits_{x\to-3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-3^+}f(x)=f(-3)\Leftrightarrow C_1=C_2$.

Vì $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)\Leftrightarrow \dfrac{4}{3}+C_2=-\dfrac{4}{3}+C_3$.

Mà $f(-2)+f(0)=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow\dfrac{2}{3}+C_2+C_3=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow C_1=C_2=-2\Rightarrow C_3=\dfrac{2}{3}$

Vậy $V=\pi\left[\int\limits_{-2}^{-1}\left(-\dfrac{x^3}{3}-2x^2-3x-2\right)^2dx+\int\limits_{-1}^{-2}\left(\dfrac{x^3}{3}+2x^2+3x+\dfrac{2}{3}\right)^2dx\right]\approx 457,2$

**Ví dụ 30:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $\int\limits_0^1 f(x)dx=2$ và $\int\limits_0^1 xf(x)dx=\dfrac{3}{2}$. Gọi $V$ là thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh $Ox$ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục $Ox$ và các đường thẳng $x=0,x=1$. Giá trị nhỏ nhất của $V$ bằng

**A.** $\dfrac{27\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{34\pi}{5}$. **C.** $7\pi$. **D.** $8\pi$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta tìm hàm $ax+b$ thỏa mãn $\int\limits_0^1\left[f(x)-(ax+b)\right]^2dx=0\Rightarrow f(x)=ax+b$

$\Rightarrow\begin{cases}\int\limits_0^1 f(x)dx=2\\\int\limits_0^1 xf(x)dx=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{a}{2}x^2+bx\right)\Big|_0^1=2\\\left(\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{2}+b=2\\\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow a=6;b=-1.$

$+\int\limits_0^1\left[f(x)-(6x-1)\right]^2dx\ge 0$

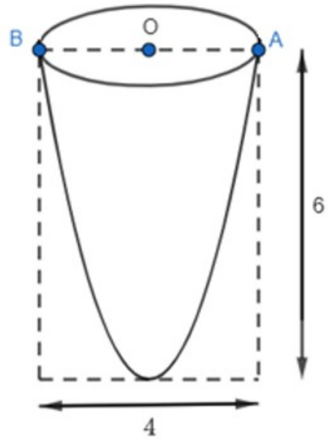
$\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f^2(x)dx\ge 2\int\limits_0^1 f(x)(6x-1)dx-\int\limits_0^1(6x-1)^2dx$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f^2(x)dx\ge 12\int\limits_0^1 xf(x)dx-2\int\limits_0^1 f(x)dx-\int\limits_0^1(6x-1)^2dx=7$

Vậy $V=\pi\int\limits_0^1\left(f(x)\right)^2dx\ge 7\pi$

***+ Bài toán cho trước hình dạng của khối tròn xoay***

**Ví dụ 31:** Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống một cái ly như hình vẽ dưới đây. Người ta đo được đường kính miệng ly là $4\,cm$ và chiều cao là $6\,cm$. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích $V\left(cm^3\right)$ của vật thể đã cho.

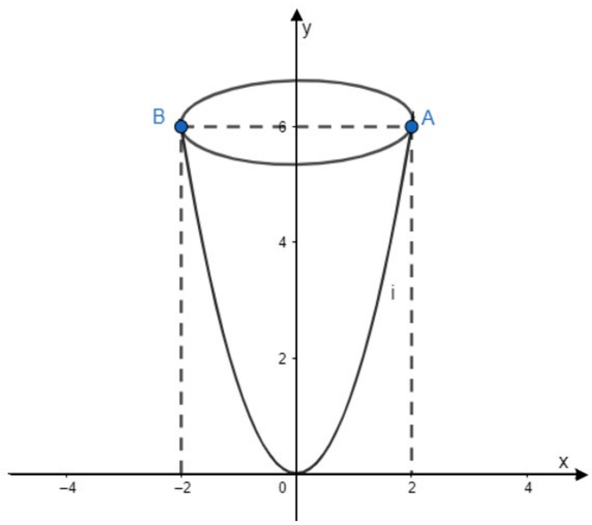



**A.** $12\pi$. **B.** $12$. **C.** $\dfrac{72\pi}{5}$. **D.** $\dfrac{72}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét hệ trục $Oxy$ như hình vẽ.




Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $O(0;0), A(2;6)$, $B(-2;6)$, khi đó ta có hệ phương trình sau $\begin{cases} 0a + 0b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ 4a - 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$.

Vậy $(P): y = \dfrac{3}{2}x^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{2}{3}y$.

Khi đó khối tròn xoay tạo thành có thể tích $V = \pi\displaystyle\int_0^6 \dfrac{2}{3}y.\mathrm{d}y = 12\pi$.

**Dạng 6: Tìm điều kiện của tham số để thể tích khối tròn xoay thỏa mãn điều kiện cho trước.**

**Phương pháp giải**

Từ điều kiện cho trước ta đi xác định công thức đồ thị hàm số và phương trình đường thẳng (nếu cần)

Xác định hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số và đường thẳng (nếu cần)
Áp dụng công thức tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh Ox hình phẳng đã cho
Từ điều kiện cho trước về thể tích của khối tròn xoay đã cho suy ra tìm được điều kiện của tham số

**Ví dụ 32:** Cho hình phẳng $(H)$ được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ ($m$ là tham số khác $0$) và trục hoành. Khi $(H)$ quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích $V$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để $V<1000\pi$.

**A.** 18. **B.** 20. **C.** 19. **D.** 21.

**Lời giải**

**Chọn A**

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là:

$\sqrt{m^2-x^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm m$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là:

$$V=\pi\int_{-|m|}^{|m|}(m^2-x^2)dx=\pi(m^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-|m|}^{|m|}=\frac{4\pi m^2|m|}{3}$$

Ta có: $V<1000\pi \Leftrightarrow \dfrac{4\pi m^2|m|}{3}<1000\pi \Leftrightarrow |m|^3<750 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{750}<m<\sqrt[3]{750}$.

Ta có $\sqrt[3]{750}\simeq 9,08$ và $m\neq 0$. Vậy có 18 giá trị nguyên của *m*.

**Ví dụ 33:** Gọi $V$ là thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x\sqrt{a}$ và $y=\sqrt{a(2-a)x}, 0<a<2$, khi quay quanh trục $Ox$. Giá trị của $a$ để $V$ đạt giá trị lớn nhất là

**A.** $a=1$. **<u>B</u>.** $a=\frac{1}{2}$. **C.** $a=\frac{3}{2}$. **D.** $a=\frac{3}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình : $\sqrt{a(2-a)x}=x\sqrt{a} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2-a \end{array}\right.$

$$V=\pi\int_0^{2-a}\left|ax^2-a(2-a)x\right|\mathrm{d}x=-\pi\int_0^{2-a}\left(ax^2-a(2-a)x\right)\mathrm{d}x.$$

$$V=-\pi\left(\frac{a}{3}x^3-a(2-a)\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{2-a}=\frac{\pi}{6}a(2-a)^3, 0<a<2.$$

Xét hàm số $f(a)=a(2-a)^3, 0<a<2$.

$$f'(a)=(2-a)^2(2-4a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2(l) \\ a=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(a)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

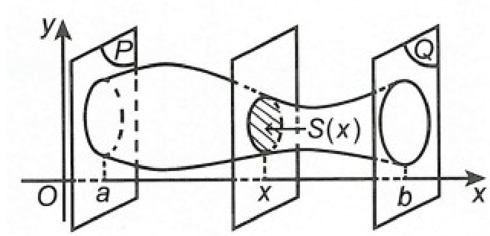
Hàm số có 1 cực trị duy nhất tại $a=\dfrac{1}{2}$ và là điểm cực đại. Do đó giá trị lớn nhất của hàm số đạt được tại $a=\dfrac{1}{2}$.

Vậy khi $a=\dfrac{1}{2}$ thì $V$ đạt giá trị lớn nhất.

**Dạng 7: Tính thể tích của vật thể.**

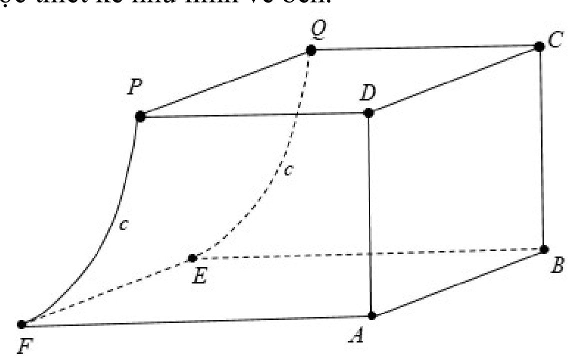
**Phương pháp giải**

Cắt một vật thể B bởi hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ vuông góc với trục $Ox$ lần lượt tại $x=a$ và $x=b$, với $a<b$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với $Ox$ tại điểm có hoành độ $x$ cắt $B$ theo thiết diện có diện tích $S(x)$ như hình vẽ bên.




Khi đó thể tích vật thể $B$ là $V=\int_a^b S(x)\,dx$.

**Ví dụ 34:** Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.




Các tứ giác $ABCD, CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5\,cm$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE=3,5\,cm$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol $(P)$ có đỉnh parabol nằm trên cạnh $EF$. Thể tích của chi tiết máy bằng

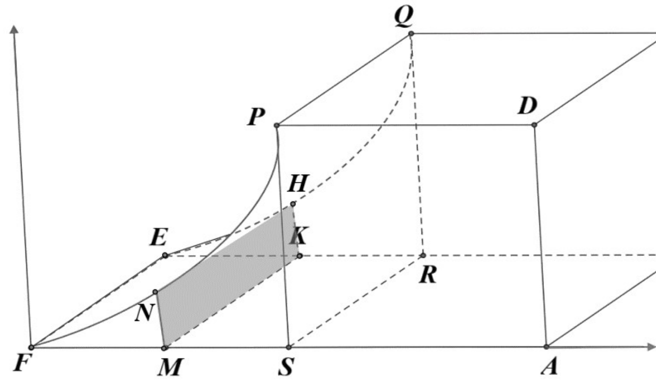
**A.** $\dfrac{395}{24}cm^3$.

**B.** $\dfrac{50}{3}cm^3$.

**C.** $\dfrac{125}{8}cm^3$.

**D.** $\dfrac{425}{24}cm^3$.

**Lời giải**




Gọi hình chiếu của $P,Q$ trên $AF$ và $BE$ là $R$ và $S$. Vật thể được chia thành hình lập phương $ABCD.PQRS$ có cạnh $2,5\,cm$, thể tích $V_1 = \dfrac{125}{8}cm^3$ và phần còn lại có thể tích $V_2$. Khi đó thể tích vật thể $V = V_1 + V_2 = \dfrac{125}{8} + V_2$.

Đặt hệ trục $Oxyz$ sao cho $O$ trùng với $F$, $Ox$ trùng với $FA$, $Oy$ trùng với tia $Fy$ song song với $AD$. Khi đó Parabol $(P)$ có phương trình dạng $y = ax^2$, đi qua điểm $P\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$ do đó $a = \dfrac{5}{2} \Rightarrow y = \dfrac{5}{2}x^2$.

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với $Ox$ và đi qua điểm $M(x;0;0), 0 \le x \le 1$ ta được thiết diện là hình chữ nhật $MNHK$ có cạnh là $MN = \dfrac{5}{2}x^2$ và $MK = \dfrac{5}{2}$ do đó diện tích

$S(x) = \dfrac{25}{4}x^2$

Áp dụng công thức thể tích vật thể ta có $V_2 = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{25}{4}x^2dx = \dfrac{25}{12}$

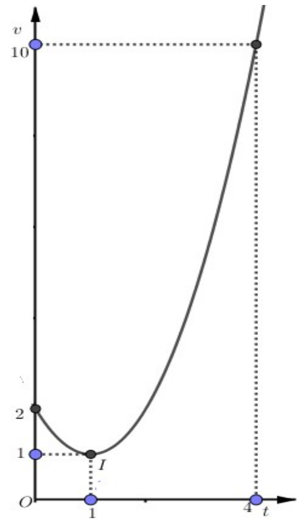
Từ đó $V = \dfrac{125}{8} + \dfrac{25}{12} = \dfrac{425}{24}cm^3$

**Dạng 8: Ứng dụng tích phân trong bài toán chuyển động của chất điểm.**

**Phương pháp giải**

Một vật chuyển động có phương trình vận tốc $v(t)$ trong khoảng thời gian từ $t = a$ đến $t = b\,(a < b)$ sẽ di chuyển được quãng đường là: $\boxed{S = \displaystyle\int_a^b v(t)\,dt}$

**Ví dụ 35:** Một vật chuyển động trong $4$ giờ với vận tốc $v$ (km/ h) phụ thuộc thời gian $t$ (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường $s$ mà vật di chuyển được trong $4$ giờ kể từ lúc xuất phát.




**A.** $s=6$ (km). **B.** $s=8$ (km).

**C.** $s=\dfrac{40}{3}$ (km). **D.** $s=\dfrac{46}{3}$ (km).

**Lời giải**

Hàm biểu diễn vận tốc có dạng $v(t)=at^2+bt+c$. Dựa vào đồ thị ta có:

$$\begin{cases} c=2 \\ \dfrac{-b}{2a}=1 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow v(t)=t^2-2t+2.$$

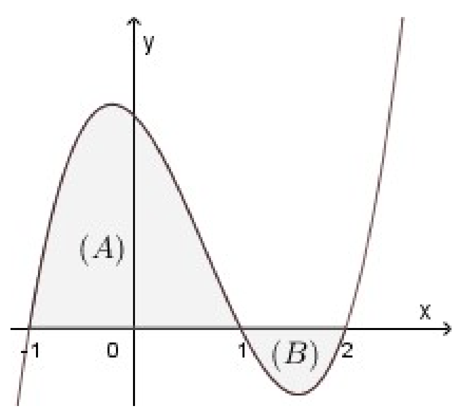
Với $t=4 \Rightarrow v(4)=10$ (thỏa mãn).

Từ đó $s=\int\limits_0^4 \left(t^2-2t+2\right)dt=\dfrac{40}{3}(km)$.

**III. Hệ thống câu hỏi ôn tập:**

**Câu hỏi ôn tập dạng 1:** *Tính tích phân nhờ diện tích diện tích của hình phẳng giới hạn bởi một số đồ thị hàm số và đường thẳng cho trước.*

**Câu 1:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng diện tích các hình phẳng $(A)$ và $(B)$ lần lượt bằng 15 và 3. Tích phân $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} \dfrac{1}{x} f'(3\ln x+2)\mathrm{d}x$ bằng



**A.** $4$ . **B.** $-4$ . **C.** $6$ . **D.** $-6$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hình phẳng $(A)$ giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$ và có phần đồ thị nằm phía trên trục hoành nên ta có $\int\limits_{-1}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x = 15$.

Hình phẳng $(B)$ giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ và có phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành nên ta có $\int\limits_{1}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x = -3$.

Xét tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x} f'(3\ln x + 2)\,\mathrm{d}x$

Đặt $t = 3\ln x + 2 \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{3}{x}\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{3} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

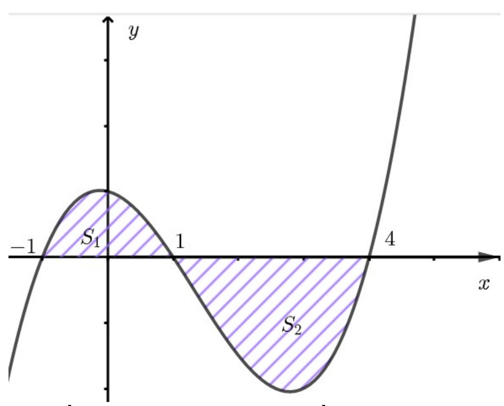
Đổi cận

Với $x = \frac{1}{e} \Rightarrow t = -1$.

Với $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Do đó $I = \int\limits_{-1}^{2} f'(t)\frac{\mathrm{d}t}{3} = \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{2} f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(\int\limits_{-1}^{1} f'(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{1}^{2} f'(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{3}(15-3) = 4$.

**Câu 2:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.




Biết diện tích hai phần gạch chéo lần lượt là $S_1 = 5, S_2 = 12$. Tính $I = \int_0^1 f(2x-1)dx + \int_{-3}^0 f(x+4)\,dx$

**A.** $-\frac{19}{2}$. **B.** $\frac{29}{2}$. **C.** $17$. **D.** $-7$.

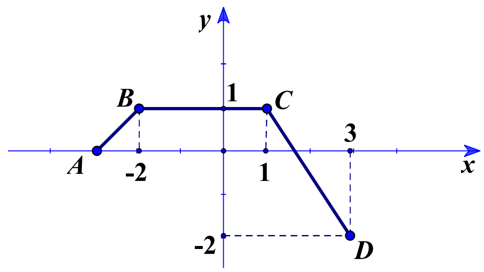
**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\int_{-1}^1 f(x)dx = S_1 = 5,\ \int_1^4 f(x)dx = -S_2 = -12$

Vậy $I = \int_0^1 f(2x-1)dx + \int_{-3}^0 f(x+4)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = \frac{1}{2}.5 - 12 = -\frac{19}{2}$.

**Câu 3:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị trên đoạn $\left[-3;3\right]$ là đường gấp khúc $ABCD$ như hình vẽ.

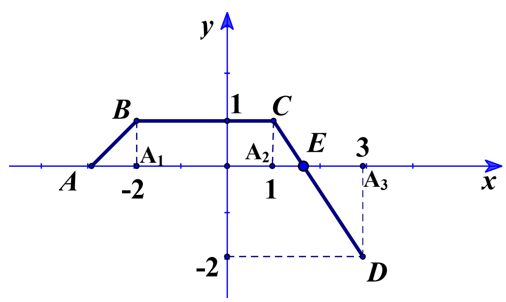



Tính $\int\limits_{-3}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x$

**A.** $\frac{35}{6}$.    **B.** $\frac{5}{2}$.    **C.** $\frac{-5}{2}$.    **D.** $\frac{-35}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Đường thẳng $CD$ đi qua $C\left(1;1\right)$ và nhận $\overrightarrow{CD}=\left(2;-3\right)$ làm VTCP nên nhận $\vec{n}=\left(3;\,2\right)$ làm VTPT.

Khi đó PTTQ của $\left(CD\right): 3x+2y-5=0$.

Gọi $E=\left(CD\right)\cap Ox$. Ta được $E\left(\frac{5}{3};0\right)$.

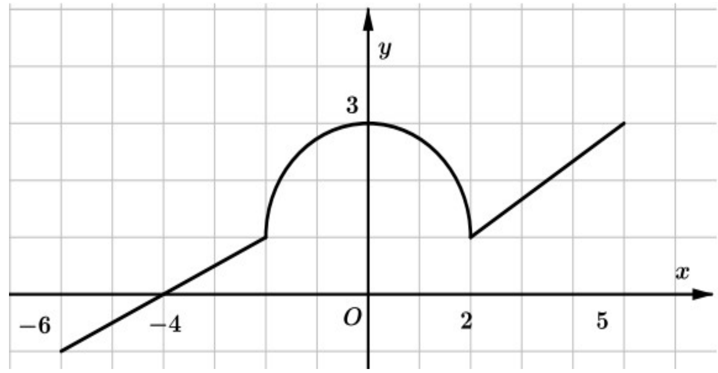
Do đó

$$\int\limits_{-3}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x = S_{ABA_1}+S_{A_1BCA_2}+S_{A_2CE}-S_{EDA_3}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1.1\right)+\left(3.1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}.1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}.2\right)$$

$$=\frac{1}{2}+3+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=\frac{5}{2}.$$

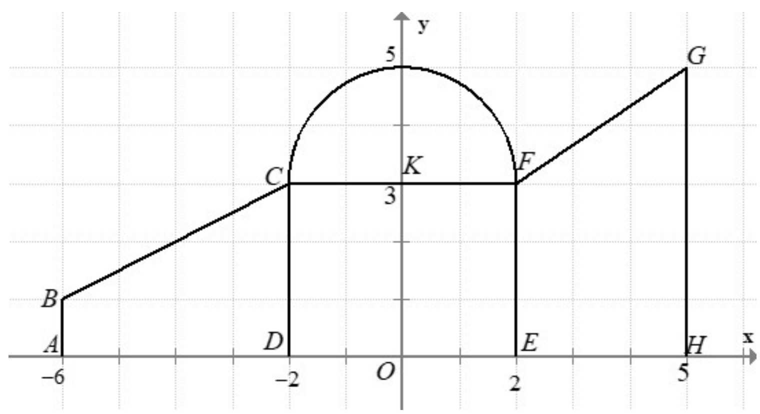
**Câu 4:** Cho hàm số $f$ liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm 2 đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I=\int\limits_{-6}^{5}\left[f(x)+2\right]\mathrm{d}x$.




**A.** $I=2\pi+35$. **B.** $I=2\pi+32$ **C.** $I=2\pi+34$ **D.** $I=2\pi+33$.

**Lời giải**

**Chọn B**




$I=\int\limits_{-6}^{5}\left[f(x)+2\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-6}^{5}g(x)\mathrm{d}x$ với $g(x)=f(x)+2$ có đồ thị như hình vẽ.

Có $I=S_1+S_2+S_3+S_4$ trong đó:

$S_1$ là diện tích hình thang vuông $ABCD$ $\Rightarrow S_1=\dfrac{(AB+CD).AD}{2}=\dfrac{(1+3).4}{2}=8$,

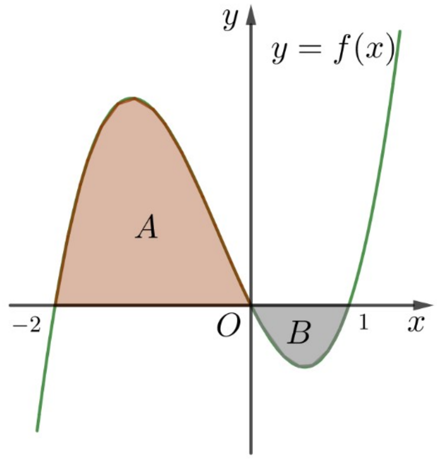
$S_2$ là diện tích hình chữ nhật $CDEF$ $\Rightarrow S_2=3.4=12$,

$S_3$ là diện tích hình tròn tâm $I$, bán kính $R=2$ $\Rightarrow S_3=\dfrac{\pi.2^2}{2}=2\pi$,

$S_4$ là diện tích hình thang vuông $EFGH$ $\Rightarrow S_4=\dfrac{(EF+GH).EH}{2}=\dfrac{(5+3).3}{2}=12$.

Suy ra $I=8+12+2\pi+12=2\pi+32$.

**Câu 5:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và gọi A, B là hai hình phẳng được gạch trong hình bên dưới lần lượt có diện tích bằng 20 và 4.




Giá trị của $I = \int_{-1}^{0} f(3x+1)\,dx$ bằng

**A.** $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{16}{2}$. **C.** $24$. **D.** $16$.

**Lời giải**

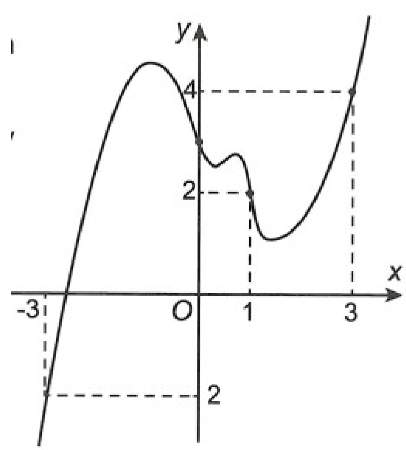
**Chọn A**

Đặt $t = 3x+1 \Rightarrow x = \frac{t-1}{3} \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt$.

Đổi cận $x=-1 \Rightarrow t=-2; x=0 \Rightarrow t=1$

Ta có $I = \int_{-2}^{1} f(t)\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1} f(t)\,dt = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}(A-B) = \frac{1}{3}(20-4) = \frac{16}{3}$.

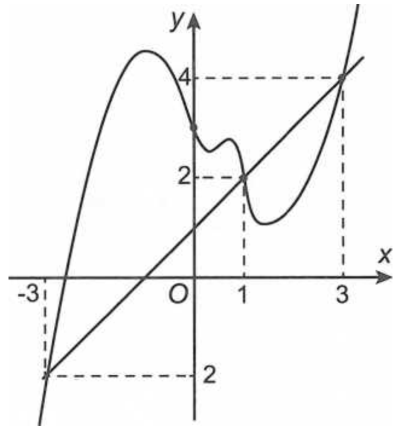
**Câu 6:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên $[-2;6]$ như hình vẽ bên. Biết các miền $A$, $B$, $x=2$ có diện tích lần lượt là 32; 2; 3. Tích phân $\int_{-2}^{2}\left[f(2x+2)+1\right]dx$ bằng




**A.** $\frac{45}{2}$. **B.** 41. **C.** 37. **D.** $\frac{41}{2}$.

*Lời giải*

**Chọn D**




Ta có $\int_{-2}^{2}\left[f\left(2x+2\right)+1\right]dx=\int_{-2}^{2}f\left(2x+2\right)dx+4$

Xét $I_1=\int_{-2}^{2}f\left(2x+2\right)dx$.

Đặt $t=2x+2\Rightarrow dt=2dx\Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$

Đổi cận: $x=-2\Rightarrow t=-2$ ; $x=2\Rightarrow t=6$.

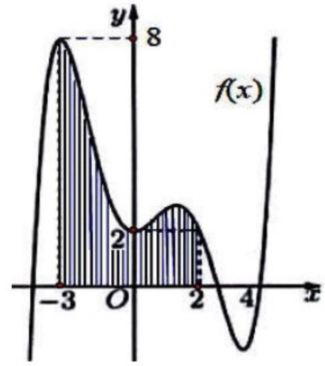
Suy ra $I_1=\frac{1}{2}\int_{-2}^{6}f\left(t\right)dt$.

Gọi $x_1$; $x_2$ là các hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ với trục hoành $\left(-2<x_1<x_2<6\right)$. Ta có

$$I_1=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{x_1}f\left(t\right)df+\int_{x_1}^{x_2}f\left(t\right)df+\int_{x_2}^{6}f\left(t\right)df\right)=\frac{1}{2}\left(S_A-S_B+S_C\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(32-2+3\right)=\frac{33}{2}$$

Vậy $\int_{-2}^{2}\left[f\left(2x+2\right)+1\right]dx=I_1+4=\frac{33}{2}+4=\frac{41}{2}$

**Câu 7:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.




Giả sử diện tích phần kẻ dọc trên hình vẽ có diện tích bằng $a$. Tính theo $a$ giá trị của tích phân $I=\int_{-3}^{2}(2x+1)f'(x)\mathrm{d}x$?

**A.** $I=50-2a$. **B.** $I=50-a$.

**C.** $I=-30-2a$. **D.** $I=-30+2a$.

**Lời giải**

**Chọn A**

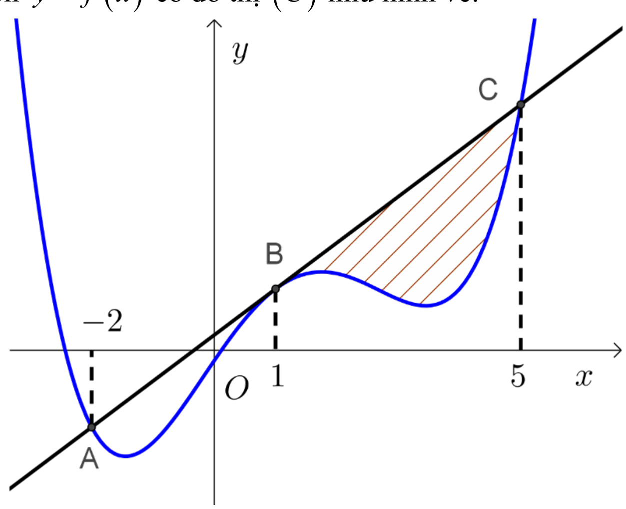
Từ đồ thị suy ra $S=\int_{-3}^{2}f(x)\mathrm{d}x=a$ và $f(-3)=8; f(2)=2$.

Ta có $I=\int_{-3}^{2}(2x+1)f'(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{2}(2x+1)\mathrm{d}(f(x))=(2x+1)f(x)\Big|_{-3}^{2}-2\int_{-3}^{2}f(x)\mathrm{d}x$

$=5f(2)+5f(-3)-2S=5.2+5.8-2a=50-2a$.

Vậy $I=50-2a$.

**Câu 8:** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị $(C)$ như hình vẽ.




Đường thẳng $d: y=kx+\frac{1}{4}$ có đúng ba điểm chung với $(C)$ là $A,B,C$ và $BC-AB=\frac{5}{4}$. Biết diện tích hình phẳng $S$ là $\frac{24}{5}$. Giá trị của $\int_{-2}^{1}f(x)dx$ bằng

**A.** $-2$. **B.** $-\dfrac{321}{160}$. **C.** $-\dfrac{161}{80}$. **D.** $-\dfrac{159}{160}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình giao điểm của $(C)$ và $d$ là:

$f(x)-g(x)=a(x+2)(x-1)^2(x-5)$

Theo giả thiết, ta có: $S=\dfrac{24}{5}\Leftrightarrow -a\int_1^5 (x+2)(x-1)^2(x-5)dx=\dfrac{24}{5}\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{24}$

$\Rightarrow f(x)=g(x)+\dfrac{1}{24}(x+2)(x-1)^2(x-5)=kx+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{24}(x+2)(x-1)^2(x-5)$

* Gọi $A\left(-2;\dfrac{1}{4}-2k\right),B\left(1;\dfrac{1}{4}+k\right),C\left(5;\dfrac{1}{4}+5k\right)$

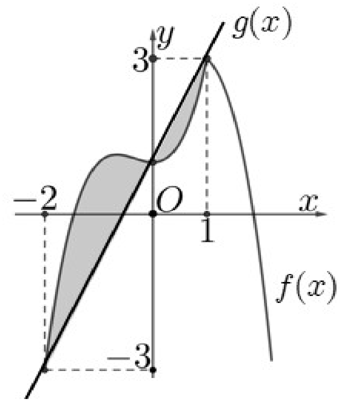
$$BC-AB=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\sqrt{4^2+(4k)^2}-\sqrt{3^2+(3k)^2}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=\dfrac{3}{4}\\ k=-\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$$

Đường thẳng nằm ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba nên hệ số góc là dương nên ta chọn $k=\dfrac{3}{4}$

Vậy $f(x)=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{24}(x+2)(x-1)^2(x-5)$

Và $\int_{-2}^{1} f(x)dx=-\dfrac{321}{160}$.

**Câu 9:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đường thẳng $(d): g(x)=ax+b$ có đồ thị như hình vẽ.




Biết diện tích miền tô đậm bằng $\dfrac{37}{12}$ và $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{19}{12}$. Tích phân $\int\limits_{-1}^0 x.f'(2x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-\dfrac{607}{348}$. **B.** $-\dfrac{20}{3}$. **C.** $-\dfrac{5}{3}$. **D.** $-\dfrac{5}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\begin{cases} A(1;3)\in g(x)=ax+b \\ B(-2;-3)\in g(x)=ax+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ -2a+b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow g(x)=2x+1.$

Mà $S=\dfrac{37}{12} \Leftrightarrow \int\limits_{-2}^{0}\left[f(x)-(2x+1)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left[(2x+1)-f(x)\right]\mathrm{d}x=\dfrac{37}{12}$

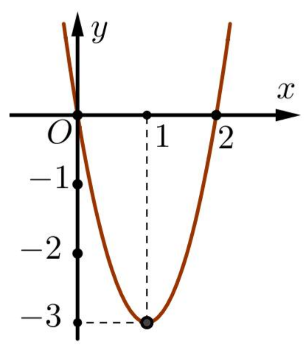
$\Leftrightarrow \int\limits_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}(2x+1)\mathrm{d}x-\int\limits_{-2}^{0}(2x+1)\mathrm{d}x=\dfrac{37}{12} \Rightarrow \int\limits_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\cdot$

Khi đó

$\int\limits_{-1}^{0} x.f'(2x)\mathrm{d}x \xrightarrow[\begin{cases} x=-1\to t=-2 \\ x=0\to t=0 \end{cases}]{t=2x\to \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x} \dfrac{1}{4}\int\limits_{-2}^{0} t.f'(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[\mathrm{d}v=f'(t)\mathrm{d}t\to v=f(t)]{u=t\to \mathrm{d}u=\mathrm{d}t} \dfrac{1}{4}\left[t.f(t)\Big|_{-2}^{0}-\int\limits_{-2}^{0} f(t)\mathrm{d}t\right]$

$=\dfrac{1}{4}\left[2f(-2)-\int\limits_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x\right]=\dfrac{1}{4}\left[2.(-3)-\dfrac{2}{3}\right]=-\dfrac{5}{3}.$

**Câu 10:** Cho $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \ \ (a\neq 0)$ là hàm số nhận giá trị không âm trên đoạn $[2;3]$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của các hàm số $g(x)=xf^2(x)$; $h(x)=-x^2f(x)f'(x)$ và các đường thẳng $x=2; x=3$ bằng $72$. Tính $f(1)$.




**A.** $f(1)=2$. **B.** $f(1)=-1$.

**C.** $f(1)=1$. **D.** $f(1)=\dfrac{-62}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ hình vẽ ta có được $f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x \Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+C$.

Diện tích hình phẳng là:

$S=\int\limits_{2}^{3}\left|g(x)-h(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{2}^{3}\left|xf^{2}(x)+x^{2}f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x$

Do $xf^{2}(x)+x^{2}f(x)f'(x)\geq 0, \forall x\in[2;3]$ nên $S=\int\limits_{2}^{3}\left[xf^{2}(x)+x^{2}f(x)f'(x)\right]\mathrm{d}x$

Ta có: $S=\int\limits_{2}^{3}\left[\frac{1}{2}x^{2}f^{2}(x)\right]'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^{2}f^{2}(x)\Big|_{2}^{3}=\frac{9}{2}f^{2}(3)-2f^{2}(2)=\frac{9}{2}C^{2}-2(C-4)^{2}$

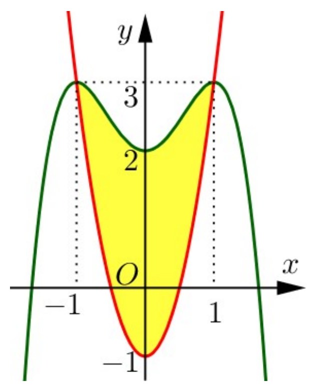
Mà $S=72\Leftrightarrow\frac{9}{2}C^{2}-2(C-4)^{2}=72\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}C=4\\C=\frac{-52}{5}\end{array}\right.$.

Do $f(x)\geq 0, \forall x\in[2;3]\Rightarrow f(x)=x^{3}-3x^{2}+4\Rightarrow f(1)=2$.

**Câu hỏi ôn tập dạng 2:** *Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi một số đồ thị hàm số và đường thẳng thỏa mãn điều kiện cho trước.*

*+ Bài toán cho điều kiện đối với đồ thị hàm số giới hạn hình phẳng*

**Câu 11:** Cho hàm số $y=ax^{4}+bx^{2}+c$ $(a\neq 0)$ và hàm số $y=mx^{2}+nx+p$ $(m\neq 0)$ có đồ thị là các đường cong như hình vẽ bên.




Gọi $S$ là diện tích của hình phẳng được tô đậm. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $S\in\left(\frac{62}{15};\frac{64}{15}\right)$. **<u>B</u>.** $S\in\left(\frac{21}{5};\frac{13}{3}\right)$.

**C.** $S\in\left(4;\frac{21}{5}\right)$. **D.** $S\in\left(\frac{13}{3};\frac{67}{15}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ đồ thị ta thấy đồ thị hàm hàm số $y=f(x)=ax^{4}+bx^{2}+c$ đi qua các điểm $A(1;3)$, $B(0;2)$ và đạt cực trị tại $x=1\Rightarrow\begin{cases}f(1)=3\\f(0)=2\\f'(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=3\\c=2\\4a+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=2\\c=2\end{cases}\Rightarrow f(x)=-x^{4}+2x^{2}+2$.

Từ đồ thị ta lại thấy đồ thị hàm số $y = g\left(x\right) = mx^2 + nx + p$ đi qua các điểm $C\left(0;-1\right)$,

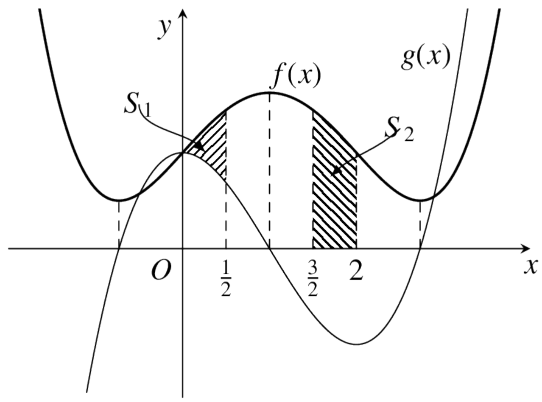
$A\left(1;3\right)$ và $D\left(-1;3\right)$ $\Rightarrow \begin{cases} f\left(0\right) = -1 \\ f\left(1\right) = 3 \\ f\left(-1\right) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -1 \\ m + n + p = 3 \\ m - n + p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -1 \\ m = 4 \\ n = 0 \end{cases} \Rightarrow g\left(x\right) = 4x^2 - 1$.

Diện tích hình phẳng được tô đậm là

$$S = \int_{-1}^{1} \left[\left(-x^4 + 2x^2 + 2\right) - \left(4x^2 - 1\right)\right] \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(-x^4 - 2x^2 + 3\right) \mathrm{d}x = \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + 3x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{64}{15}.$$

**Câu 12:** Cho hàm số $f(x) = ax^4 - x^3 + 2x + 2$ và hàm số $g(x) = bx^3 - cx^2 + 2$, có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S_1; S_2$ là diện tích các hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ, biết $S_1 = \dfrac{221}{640}$.

Khi đó $S_2$ bằng:




**A.** $\dfrac{1361}{640}$. **B.** $\dfrac{271}{320}$. **C.** $\dfrac{571}{640}$. **D.** $\dfrac{791}{640}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Từ đồ thị ta thấy hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)$ với trục hoành chính là điểm cực trị của hàm số $f(x)$. Do đó: $f'(x) = k.g(x)$. Hay:

$4ax^3 - 3x^2 + 2 = k\left(bx^3 - cx^2 + 2\right)$

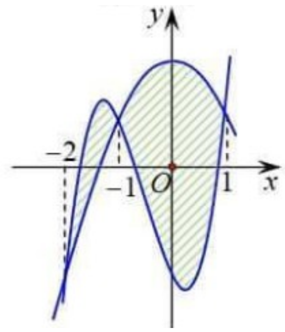
Suy ra: $\begin{cases} k = 1 \\ b = 3a \\ c = 3 \end{cases}$. Hay: $g(x) = 4ax^3 - 3x^2 + 2$, suy ra:

$$f(x) - g(x) = ax^4 - x^3 + 2x + 2 - 4ax^3 + 3x^2 - 2 = ax^4 - \left(1 + 4a\right)x^3 + 3x^2 + 2x$$

Khi đó: $S_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(ax^4 - \left(1 + 4a\right)x^3 + 3x^2 + 2x\right) dx = \frac{221}{640} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

Vậy $S_2 = \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{2} \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x + 2\right) dx = \frac{791}{640}$.

**Câu 13:** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-2$ và $g(x)=dx^2+ex+2$ với $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2;-1;1$. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị có diện tích bằng?




**A.** $\frac{37}{6}$. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{37}{12}$.

**Lời giải:**

**Chọn A**

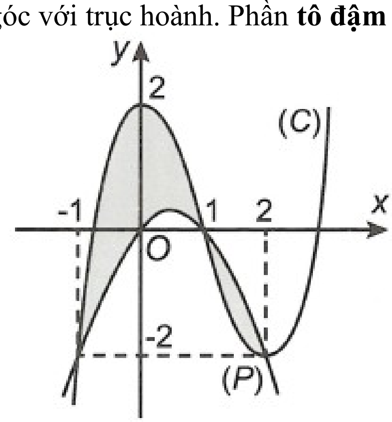
Xét phương trình $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-4=0$ có 3 nghiệm $x_1;x_2;x_3$ lần lượt là $-2;-1;1$.

Áp dụng định lý $Vi-et$ cho phương trình bậc 3 ta được:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b-d}{a}=-2 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\dfrac{c-e}{a}=-1 \\ x_1x_2x_3=\dfrac{4}{a}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ c-e=-2 \\ b-d=4 \end{cases}$$. Suy ra $f(x)-g(x)=2x^3+4x^2-2x-4$

Diện tích hình phẳng: $\int_{-2}^{-1}\left(2x^3+4x^2-2x-4\right)dx-\int_{-1}^{1}\left(2x^3+4x^2-2x-4\right)dx=\frac{37}{6}$.

**Câu 14:** Hình phẳng $(H)$ được giới hạn bởi đồ thị $(C)$ của hàm đa thức bậc ba và parabol $(P)$ có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng




**A.** $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

*Lời giải*

Chọn A

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y=2$ và $y=0$ nên ta xét hai hàm số là $y=ax^3+bx^2+cx+2$, $y=mx^2+nx$

Suy ra $(C)$: $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$ và $(P)$: $y=g(x)=mx^2+nx$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ và $(P)$ là:

$ax^3+bx^2+cx+2=mx^2+nx \Leftrightarrow (ax^3+bx^2+cx+2)-(mx^2+nx)=0$.

Đặt $P(x)=(ax^3+bx^2+cx+2)-(mx^2+nx)$.

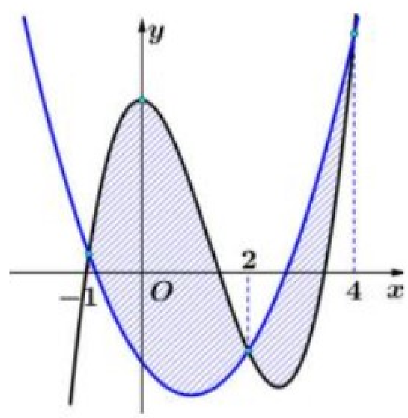
Theo giả thiết, $(C)$ và $(P)$ cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x=-1$, $x=1$, $x=2$ nên $P(x)=a(x+1)(x-1)(x-2)$.

Ta có $P(0)=2a$.

Mặt khác, ta có $P(0)=f(0)-g(0)=2 \Rightarrow a=1$.

Vậy diện tích phần tô đậm là $S=\int_{-1}^{2}\left|(x+1)(x-1)(x-2)\right|dx=\frac{37}{12}$

**Câu 15:** Cho hai hàm đa thức $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ và $g(x)=mx^2+nx+p$. Biết rằng đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-1;2;4$ đồng thời cắt trục tung lần lượt tại $M,N$ sao cho $MN=6$.




Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đã cho có diện tích bằng

**A.** $\frac{125}{8}$. **B.** $\frac{253}{24}$. **C.** $\frac{253}{16}$. **D.** $\frac{253}{12}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là:

$ax^3+bx^2+cx+d=mx^2+nx+p \Leftrightarrow ax^3+(b-m)x^2+(c-n)x+d-p=0$

Do đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-1;2;4$ nên ta được $a(x+1)(x-2)(x-4)=ax^3+(b-m)x^2+(c-n)x+d-p$.

Mà $|f(0)-g(0)|=|y_M-y_n|=MN=6$. Suy ra $a=\frac{3}{4}$.

Do đó: $f(x)-g(x)=\frac{3}{4}(x+1)(x-2)(x-4)$.

Khi đó: $S=\int_{-1}^{4}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^{4}\left|\frac{3}{4}(x+1)(x-2)(x-4)\right|dx=\frac{253}{16}$.

**Câu 16:** Cho hàm số $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx+d(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có ba điểm cực trị là $-2$, $-1$ và 1. Gọi $g(x)=mx^3+nx^2+px+q(m,n,p,q\in\mathbb{R})$ là hàm số đạt cực trị tại điểm $-2$ và có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng

**A.** $\frac{87}{5}$. **B.** $\frac{81}{5}$. **C.** $\frac{79}{5}$. **D.** $\frac{78}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì $g(x)$ là hàm số đạt cực trị tại điểm $-2$ và có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nên phương trình $f(x)-g(x)=0$ có nghiệm $-2$ ; $-1;1$.

Suy ra $f(x)-g(x)=3(x+2)^2(x^2-1)$

$$S=\int_{-2}^{1}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-2}^{1}\left|3(x+2)^2(x^2-1)\right|dx=\frac{87}{5}$$

**Câu 17:** Cho hàm số $f(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+36$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x), y=f'(x)$ và $Ox$ giao nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $2,3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $Ox$ bằng $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản với $m,n\in\mathbb{N}^*$. Tổng $m+n$ bằng

**A.** 846. **B.** 845. **C.** 848. **D.** 847.

**Lời giải**

**Chọn D**

Do $2,3$ là nghiệm của phương trình $f(x)=0,\ f'(x)=0$ nên $f(x)=(x-2)^2(x-3)^2(x-m)$.

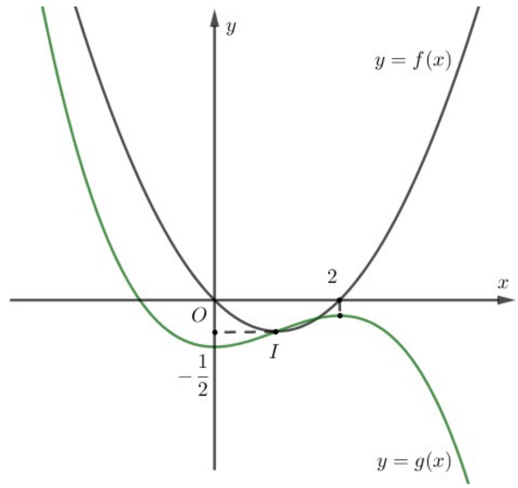
Ta có $f(0)=36 \Rightarrow m=-1$.

Vậy $f(x)=(x-2)^2(x-3)^2(x+1)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $Ox$ là

$$S = \int_{-1}^{3} \left|(x-2)^2(x-3)^2(x+1)\right| = \frac{832}{15} \Rightarrow m + n = 847.$$

**Câu 18:** Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ như hình vẽ bên dưới




Biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một Parabol đỉnh $I$ có tung độ bằng $-\frac{1}{2}$ và $y = g(x)$ là một hàm số bậc ba. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x_1, x_2, x_3$ thỏa mãn $x_1.x_2.x_3 = -6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ gần nhất với giá trị nào dưới đây?

**A.** $6$. **B.** $8$. **C.** $5$. **D.** $7$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi phương trình của Parabol là $y = ax^2 + bx + c$, từ dữ kiện đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Giả sử $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thì đồ thị của nó đi qua $I\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ và có 2 cực trị có hoành độ bằng $0$ và $2$, tức là phương trình $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm là $0$ và $2$.

Kết hợp với giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b+c+d=-\dfrac{1}{2} \\ c=0 \\ 12a+4b+c=0 \\ x_1.x_2.x_3=-\dfrac{d}{a}=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{8} \\ b=\dfrac{3}{8} \\ c=0 \\ d=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow g(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}.$$

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{2}x^2-x=-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1-\sqrt{7} \\ x_2=1 \\ x_3=-1+\sqrt{7} \end{array}\right.$$

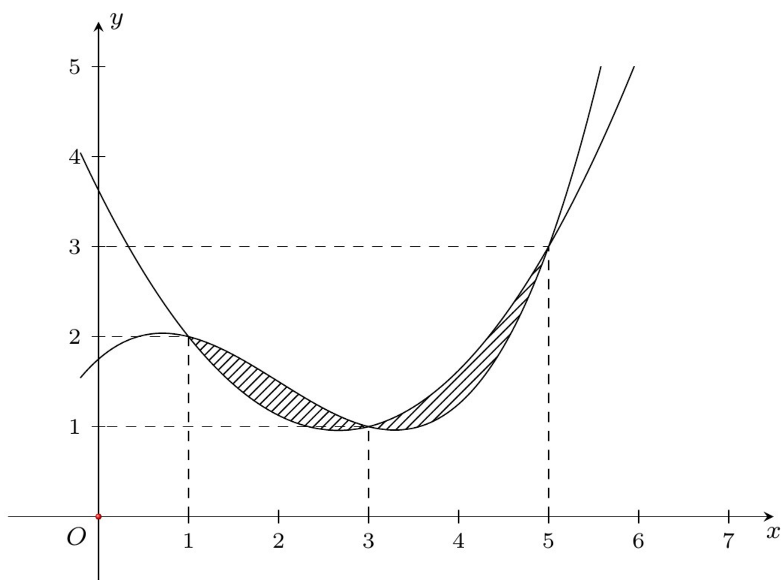
Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng

$$S=\int_{-1-\sqrt{7}}^{1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{1}^{-1+\sqrt{7}}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1-\sqrt{7}}^{1}\left[\frac{x^3}{8}+\frac{x^2}{8}-x+\frac{3}{4}\right]\mathrm{d}x+\int_{1}^{-1+\sqrt{7}}\left[-\frac{x^3}{8}-\frac{x^2}{8}+x-\frac{3}{4}\right]\mathrm{d}x$$

$$\approx 6,22.$$

**Câu 19:** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=\text{ax}^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị $(C)$ và hàm số bậc hai $y=g(x)=mx^2+nx+p$ có đồ thị $(P)$. Biết rằng $(C)$ và $(P)$ cùng đi qua các điểm $(1;2),(3;1),(5;3)$, đồng thời phần hình phẳng giới hạn bởi $(C)$ và $(P)$ có diện tích bằng 1. Gọi $V$ là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay phần hình phẳng đó quanh trục hoành. Hỏi $V$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?




**A.** 14. **B.** 16. **C.** 8. **D.** 9.

**Lời giải**

Do $(P): y = g(x) = mx^2 + nx + p$ đi qua các điểm $(1;2), (3;1), (5;3)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} m+n+p=2 \\ 9m+3n+p=1 \\ 25m+5n+p=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{3}{8} \\ n=-2 \\ p=\dfrac{29}{8} \end{cases}$$

Vậy $(P): y = g(x) = \dfrac{3}{8}x^2 - 2x + \dfrac{29}{8} = \dfrac{1}{8}(3x^2 - 16x + 29)$

Vì $(C)$ và $(P)$ cắt nhau tại ba điểm $(1;2), (3;1), (5;3)$ nên

$f(x) - g(x) = a(x-1)(x-3)(x-5) = a(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)$

Mà $\int_1^3 \left|f(x)-g(x)\right|dx + \int_3^5 \left|f(x)-g(x)\right|dx = \int_1^3 (f(x)-g(x))dx - \int_3^5 (f(x)-g(x))dx$

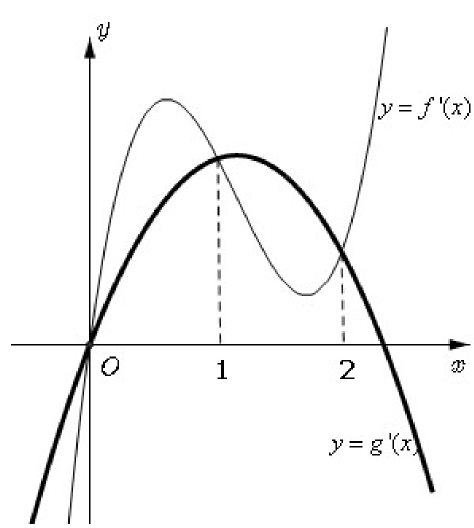
$= \int_1^3 a(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)dx - \int_3^5 a(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)dx = 8a = 1$

Nên $a = \dfrac{1}{8} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{8}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15) + \dfrac{1}{8}(3x^2 - 16x + 29) = \dfrac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 7x + 14)$

Vậy thể tích khối tròn xoay là

$V = \pi\int_1^3 (f^2(x) - g^2(x))dx + \pi\int_3^5 (g^2(x) - f^2(x))dx = 3\pi \approx 9,424$.

**Câu 20:** Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$, biết rằng hàm số $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g'(x) = qx^2 + nx + p$ với $a,\ q \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ và diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $f'(x)$ và $g'(x)$ bằng 10 và $f(2) = g(2)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng $\dfrac{a}{b}$. Tính $P = a + b$.



**A.** $P = 11$. **B.** $P = 19$. **C.** $P = 24$. **D.** $P = 21$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:
$f'(x) - g'(x) = ax^3 + (b-q)x^2 + (c-n)x + d - p = ax(x-1)(x-2)$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $f'(x)$ và $g'(x)$ bằng $10$ nên:

$$S = \int_0^1 \left[f'(x) - g'(x)\right]\mathrm{d}x + \int_1^2 \left[g'(x) - f'(x)\right]\mathrm{d}x = 10$$

$$S = \int_0^1 \left[ax(x-1)(x-2)\right]\mathrm{d}x - \int_1^2 \left[ax(x-1)(x-2)\right]\mathrm{d}x = 10$$

$$S = a\int_0^1 \left[x(x-1)(x-2)\right]\mathrm{d}x - a\int_1^2 \left[x(x-1)(x-2)\right]\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \frac{a}{4} - \left(-\frac{a}{4}\right) = 10 \Rightarrow a = 20.$$

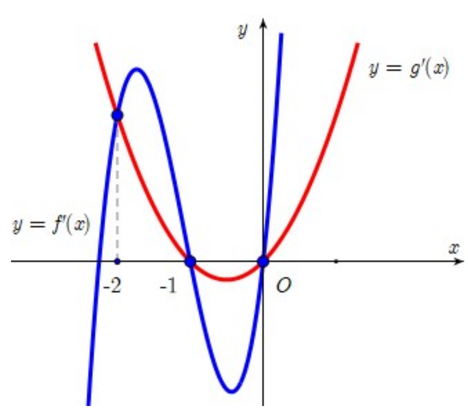
Khi đó: $f'(x) - g'(x) = 20x(x-1)(x-2)$

$\Rightarrow f(x) - g(x) = \int \left[f'(x) - g'(x)\right]dx = \int \left[20x(x-1)(x-2)\right]dx = 5x^4 - 20x^3 + 20x^2 + C$. Mà $f(2) - g(2) = 0$ nên:

$5.2^4 - 20.2^3 + 20.2^2 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) - g(x) = 5x^4 - 20x^3 + 20x^2$

Suy ra $S = \int_0^2 \left|5x^4 - 20x^3 + 20x^2\right|\mathrm{d}x = \frac{16}{3}$. Do đó $P = 19$.

**Câu 21:** Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $g'(x) = px^2 + qx + r$ với $a, p \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ. Đồng thời diện tích giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng $2$ và $f(-1) = g(-1) + 1$. Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng $\frac{m}{n}$. Giá trị $m + n$ bằng:




**A.** $28$. **B.** $29$. **C.** $30$. **D.** $31$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Dựa vào đồ thị $\Rightarrow f'(x) - g'(x) = a(x+2)(x+1)x$ và $a > 0$.

Theo đề $S=\int\limits_{-2}^{0}\left|a\left(x+2\right)\left(x+1\right)x\right|\mathrm{d}x=a\int\limits_{-2}^{0}\left|\left(x+2\right)\left(x+1\right)x\right|\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 2=a.\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=4$.

Ta có: $\int\left[f'\left(x\right)-g'\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int 4\left(x+2\right)\left(x+1\right)x\mathrm{d}x$

$\Rightarrow f\left(x\right)-g\left(x\right)=x^4+4x^3+4x^2+C$.

Theo đề: $f\left(-1\right)=g\left(-1\right)+1\Leftrightarrow f\left(-1\right)-g\left(-1\right)=1$

$\Rightarrow 1=1-4+4+C\Leftrightarrow C=0$

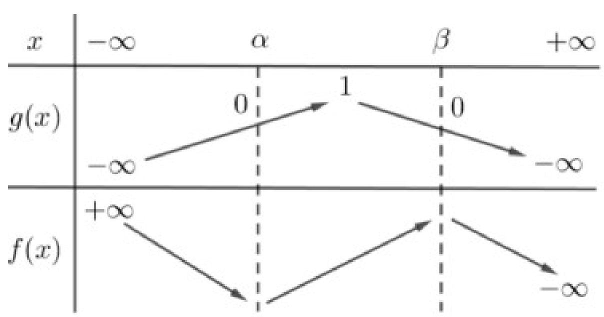
$\Rightarrow f\left(x\right)-g\left(x\right)=x^4+4x^3+4x^2=x^2\left(x^2+4x+4\right)=x^2\left(x+2\right)^2$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$

$S=\int\limits_{-2}^{0}\left|x^2\left(x+2\right)^2\right|\mathrm{d}x=\dfrac{16}{15}=\dfrac{m}{n}$.

Vậy giá trị $m+n=31$.

**Câu 22:** Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^3+2x^2+bx+1$ và $g\left(x\right)=cx^2+4x+d$ có bảng biến thiên như sau




Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại $3$ điểm phân biệt có hoành độ $x_1$, $x_2$, $x_3$ thỏa mãn $x_1+x_2+x_3=9$. Khi đó điện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$; $y=g\left(x\right)$; $x=1$; $x=2$ bằng

**A.** $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tại các điểm cực trị $\alpha$, $\beta$ của $f\left(x\right)$ thì $g\left(\alpha\right)=g\left(\beta\right)=0$, do đó

$g\left(x\right)=c\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)$ và $f'\left(x\right)=3ax^2+4x+b=3a\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)$.

Do đó $g(x)=kf'(x)\Leftrightarrow cx^2+4x+d=k\left(3ax^2+4x+b\right)\Leftrightarrow\begin{cases}c=3ka\\4=4k\\d=kb\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\c=3a\\d=b\end{cases}$.

Suy ra $f(x)=ax^3+2x^2+bx+1$ và $g(x)=3ax^2+4x+b$.

Phương trình hoành độ giao điểm

$ax^3+2x^2+bx+1=3ax^2+4x+b\Leftrightarrow ax^3+(2-3a)x^2+(b-4)x+1-b=0$.

Theo Vi-et $x_1+x_2+x_3=\dfrac{3a-2}{a}=9\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow g(x)=-x^2+4x+b$ đạt giá trị lớn nhất tại $x_0=\dfrac{-4}{-2}=2$ và giá trị lớn nhất bằng $g(2)=1\Leftrightarrow b+4=1\Leftrightarrow b=-3\Rightarrow c=-1\Rightarrow d=-3$.

Vậy $S=\int\limits_1^2\left|-\dfrac{1}{3}x^3+3x^2-7x+4\right|\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}$.

*+ Bài toán cho điều kiện đối với hàm số có đồ thị giới hạn hình phẳng*

**Câu 23:** Cho số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=12x^2+4,\forall x\in\mathbb{R}$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, $f(0)=F(1)=0$. Gọi $S$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=F(x)$ và trục $Ox$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.** $S=\dfrac{64}{15}$. **B.** $S=\dfrac{116}{15}$.

C. $S=\dfrac{576}{5}$. **D.** $S=\dfrac{32}{15}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

+) Ta có

$f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(12x^2+4\right)\mathrm{d}x=4x^3+4x+C_1$.

Do $f(0)=0$ nên $C_1=0$, suy ra $f(x)=4x^3+4x$.

$F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(4x^3+4x\right)\mathrm{d}x=x^4+2x^2+C_2$.

Do $F(1)=0$ nên $C_2=-3$, suy ra $F(x)=x^4+2x^2-3$.

+) Xét phương trình $x^4+2x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int\limits_{-1}^{1}\left|x^4+2x^2-3\right|\mathrm{d}x=\dfrac{64}{15}$.

**Câu 24:** Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + \int_0^1 (x+u) f(u) du$ có đồ thị $(C)$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C)$, trục tung, tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

**A.** $S = \frac{1}{4}$ **B.** $S = \frac{1}{3}$. **C.** $S = \frac{2}{3}$. **D.** $S = \frac{1}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số $f(x)$ có dạng $f(x) = x^2 + ax + b$, với $a = \int_0^1 f(u)du$ và $b = \int_0^1 uf(u)du.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b \\ b = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = \frac{-17}{6} \end{cases}.$$

Suy ra $f(x) = x^2 - 5x - \frac{17}{6}; f'(x) = 2x - 5.$

$M\left(1; -\frac{41}{6}\right) \in (C);\ f'(1) = -3.$

Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$: $y = -3(x-1) - \frac{41}{6} = -3x - \frac{23}{6}.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^1 \left| x^2 - 5x - \frac{17}{6} - \left(-3x - \frac{23}{6}\right) \right| dx = \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \frac{1}{3}.$$

**Câu 25:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên $[1;2]$ và thỏa mãn $f(x) = f(1-x), \forall x \in [-1;2]$. Đặt $S_1 = \int_{-1}^{2} xf(x)\mathrm{d}x$, $S_2$ là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

**A.** $S_1 = 2S_2$. **B.** $S_1 = 3S_2$.

**C.** $2S_1 = S_2$. **D.** $3S_1 = S_2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $S_1 = \int_{-1}^{2} xf(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = -1 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = -1$.

Suy ra $S_1 = \int\limits_{2}^{-1} (1-t) f(1-t)(-\mathrm{d}t) = \int\limits_{-1}^{2} (1-t) f(t) \mathrm{d}t$

$= \int\limits_{-1}^{2} f(t)\mathrm{d}t - \int\limits_{-1}^{2} tf(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{2} xf(x)\mathrm{d}x = S_2 - S_1$.

Vậy $2S_1 = S_2$.

**Câu 26:** Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + x.f'(x) + f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$?

**A.** $S = 8$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 8\pi$. **D.** $S = 4\pi$.

**Lời giải**

Ta có $f(x) + x.f'(x) + f'(x) = f(x) + (x+1)f'(x) = \left[(x+1)f(x)\right]'$

Nên

$f(x) + x.f'(x) + f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4 = \left[(x+1)f(x)\right]'$

$\Rightarrow (x+1)f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + C \ (1)$

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nghiệm đúng với $x = -1$

Thay $x = -1$ vào $(1)$ ta được $C - 2 = 0 \Leftrightarrow C = 2$. Suy ra $(x+1)f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + 2$

$\Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$

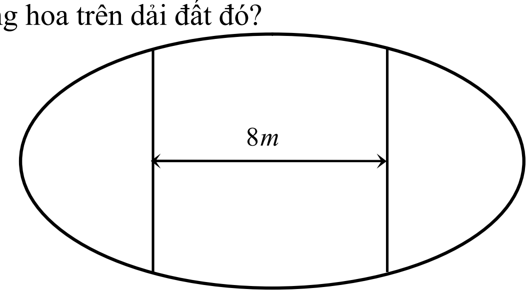
Khi đó $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

Xét phương trình $x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = 3x^2 - 6x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$

$\Rightarrow S = \int\limits_{0}^{4} \left|x^3 - 6x^2 + 8x\right| \mathrm{d}x = 8$

*+ Bài toán cho hình phẳng dạng elíp, parabol,...*

**Câu 27:** Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng . Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/$1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó?



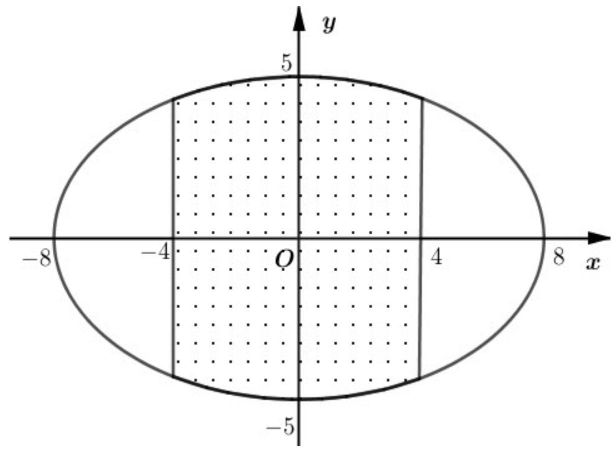

**A.** 7.862.000 đồng. **B.** 7.653.000 đồng.

**C.** 7.128.000 đồng. **D.** 7.826.000 đồng

**Lời giải:**

**Chọn B**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ




Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Từ giả thiết ta có $2a=16\Rightarrow a=8$ và $2b=10\Rightarrow b=5$

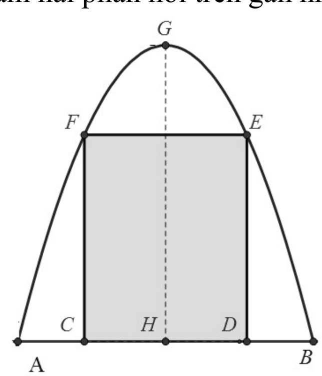
Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y=\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,(E_1) \\ y=-\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,(E_2)\end{array}\right.$

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường $(E_1);(E_2);x=-4;x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\int_{-4}^{4}\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,dx=\frac{5}{2}\int_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\,dx$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x=8\sin t$, ta được $S=\frac{40\pi}{3}+20\sqrt{3}$

Khi đó số tiền là $T=\left(\frac{40\pi}{3}+20\sqrt{3}\right).100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

**Câu 28:** Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH=4m$, chiều rộng $AB=4m$, $AC=BD=0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là $1200000$ đồng$/m^2$, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là $900000$ đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



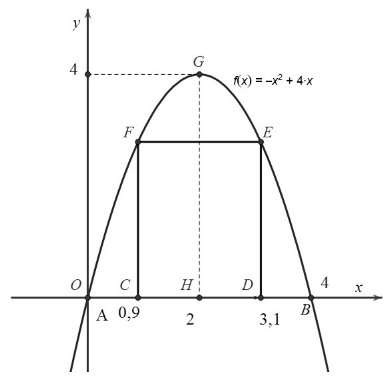
**A.** 11445000 đồng. **B.** 4077000 đồng.

**C.** 7368000 đồng. **D.** 11370000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gắn hệ trục tọa độ $Oxy$ sao cho $AB$ trùng $Ox$, $A$ trùng $O$ khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.




Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$.

Vì parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ a.2^2 + b.2 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

Diện tích của cả cổng là $S = \int_0^4 \left(-x^2 + 4x\right) dx = \left(-\dfrac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Big|_0^4 = \dfrac{32}{3} \left(m^2\right)$.

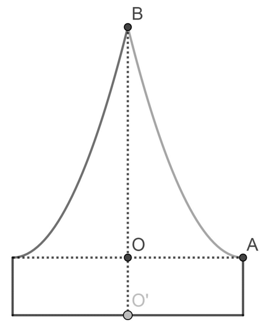
Mặt khác chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79(m)$; $CD = 4 - 2.0,9 = 2,2 \ (m)$.

Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF} = CD.CF = 6,138 \left(m^2\right)$.

Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh} = S - S_{CDEF} = \dfrac{32}{3} - 6,14 = \dfrac{6793}{1500} \left(m^2\right)$.

Vậy tổng số tiền để làm cổng là $6,138.1200000 + \dfrac{6793}{1500}.900000 = 11441400$ đồng.

**Câu 29:** Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong $AB$ là một phần của parabol có đỉnh là điểm $A$. Thể tích của chiếc mũ bằng

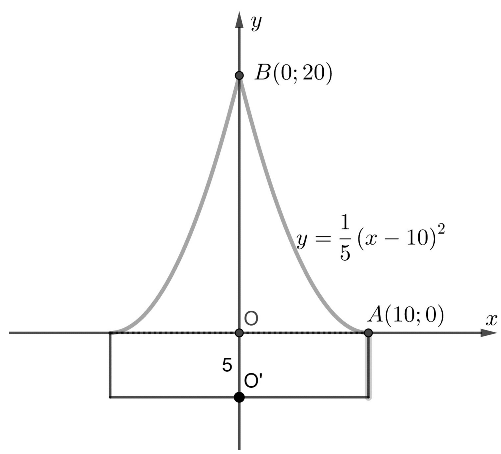



**A.** $\frac{2750\pi}{3}\ \left(\mathrm{cm}^3\right)$ **B.** $\frac{2500\pi}{3}\ \left(\mathrm{cm}^3\right)$

**C.** $\frac{2050\pi}{3}\left(\mathrm{cm}^3\right)$ **D.** $\frac{2250\pi}{3}\ \left(\mathrm{cm}^3\right)$

**Lời giải**

**Chọn B**




Ta gọi thể tích của chiếc mũ là $V$ .

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là $V_1$.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong $AB$ và hai trục tọa độ quanh trục $Oy$ là $V_2$.

Ta có $V = V_1 + V_2$

$V_1 = 5.10^2\pi = 500\pi\ \left(\mathrm{cm}^3\right)$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh $A$ nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x-10)^2$.

Vì $(P)$ qua điểm $B(0;20)$ nên $a = \frac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y = \frac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).

Suy ra $V_2 = \pi \int_0^{20} \left(10 - \sqrt{5y}\right)^2 \text{dy} = \pi\left(3000 - \frac{8000}{3}\right) = \frac{1000}{3}\pi \ \left(\text{cm}^3\right)$.

Do đó $V = V_1 + V_2 = \frac{1000}{3}\pi + 500\pi = \frac{2500}{3}\pi \ \left(\text{cm}^3\right)$.

**Câu hỏi ôn tập dạng 4:** *Tìm điều kiện của tham số để diện tích hình phẳng thỏa mãn điều kiện cho trước.*

**Câu 30:** Gọi $S$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 + 2x - 1$ và các đường thẳng $y = m$; $x = 0$; $x = 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-4040; -3]$ để $S \le 2021$.

**A.** $2019$. **B.** $2020$. **C.** $2021$. **D.** $2018$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$S$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 + 2x - 1$ và các đường thẳng $y = m$; $x = 0$; $x = 1$;

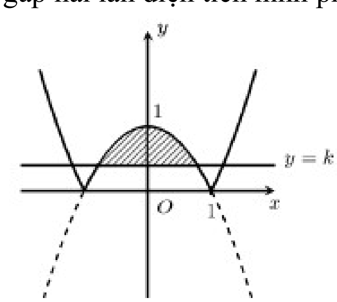
Vậy $S = \int_0^1 \left|x^2 + 2x - 1 - m\right| dx = \left|\int_0^1 \left(x^2 + 2x - 1 - m\right) dx\right|$

$\Rightarrow S = \left|\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - x - mx\right)\Big|_0^1\right| = \left|\frac{1}{3} - m\right|$.

Thỏa mãn yêu cầu $\Rightarrow \begin{cases} m \in [-4040; -3] \\ m \in \mathbb{Z} \\ \left|\frac{1}{3} - m\right| \le 2021 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} - 2021 \le m \le -3 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Vậy có $2018$ giá trị $m$.

**Câu 31:** Cho hình phẳng $(H)$ giới hạn bởi các đường $y = \left|x^2 - 1\right|$ và $y = k$, với $0 < k < 1$. Tìm $k$ để diện tích hình phẳng $(H)$ gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc ở hình vẽ bên.

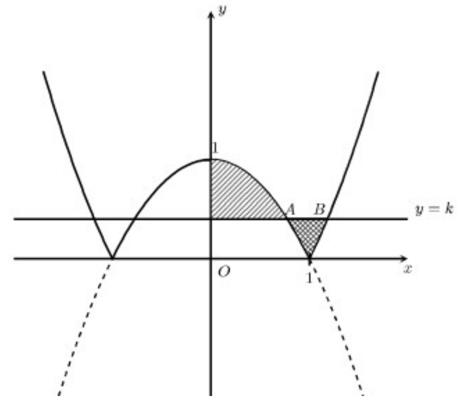



**A.** $k = \sqrt[3]{4} - 1$. **B.** $k = \frac{1}{2}$.

**C.** $k = \sqrt[3]{4}$. **D.** $k = \sqrt[3]{2} - 1$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $S$ là diện tích hình phẳng $(H)$. Lúc đó $S = 2S_1 + 2S_2$, trong đó $S_1$ là diện tích phần gạch sọc ở bên phải $Oy$ và $S_2$ là diện tích phần gạch ca rô trong hình vẽ bên.

Gọi $A$, $B$ là các giao diếm có hoành độ dương của đường thẳng $y = k$ và đồ thị hàm số $y = \left|x^2 - 1\right|$, trong đó $A\left(\sqrt{1-k};k\right)$ và $B\left(\sqrt{1+k};k\right)$.

Thco yêu cầu bài toán $S = 2\cdot 2S_1 \Leftrightarrow S_1 = S_2$.

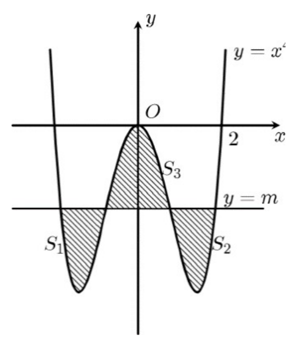
$$\Leftrightarrow \int\limits_0^{\sqrt{1-k}} \left(1 - x^2 - k\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{\sqrt{1-k}}^{1} \left(k - 1 - x^2\right)\mathrm{d}x + \int\limits_1^{\sqrt{1+k}} \left(k - x^2 + 1\right)\mathrm{d}x.$$

$$\Leftrightarrow (1-k)\sqrt{1-k} - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k} = \frac{1}{3} - (1-k) - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k}.$$

$$+(1-k)\sqrt{1-k} + (1+k)\sqrt{1+k} - \frac{1}{3}(1+k)\sqrt{1+k} - (1+k) + \frac{1}{3}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(1+k)\sqrt{1+k} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+k}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{4} - 1.$$

**Câu 32:** Đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2$ cắt đường thẳng $d: y = m$ tại 4 điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích $S_1$, $S_2$, $S_3$ thỏa mãn $S_1 + S_2 = S_3$. Giá trị $m$ là số hữu tỷ tối giản có dạng $m = -\dfrac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Giá trị của $T = a - b$ bằng




**A.** 29. **B.** 3. **C.** 11. **D.** 25.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4-4x^2-m=0$ có biệt thức $\Delta=16+4m>0$ $\Leftrightarrow m>-4$. Phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l}x^2=2+\sqrt{4+m}\\x^2=2-\sqrt{4+m}\end{array}\right.$, do $2-\sqrt{4+m}>0\Leftrightarrow m<0$.

Vậy $-4<m<0$.

Khi đó ta có bốn nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{2+\sqrt{4+m}}=\pm t_1\\x=\pm\sqrt{2-\sqrt{4+m}}=\pm t_2\end{array}\right.$.

Theo tính đối xứng của đồ thị hàm trùng phương, nên để thỏa yêu cầu bài toán ta cần có

$$\int_0^{t_2}\left(x^4-4x^2-m\right)dx=-\int_{t_2}^{t_1}\left(x^4-4x^2-m\right)dx\Leftrightarrow\int_0^{t_1}\left(x^4-4x^2-m\right)dx=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{15}\left(3x^4-20x^2-15m\right)\Big|_0^{t_1}=0\Leftrightarrow 3t_1^4-20t_1^2-15m=0.$$

Mặt khác ta có $t_1^4-4t_1^2-m=0$. Suy ra $2t_1^2=-3m\Leftrightarrow 2\sqrt{4+m}=-4-3m\Leftrightarrow m=-\frac{20}{9}$.

Vậy $T=a-b=11$.

**Câu 33:** Gọi $S$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my=x^2$, $mx=y^2$. Tìm giá trị của $m$ để $S=3$.

**A.** $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=4$.

***Lời giải***

**Chọn C**

Vì $m>0$ nên từ $my=x^2$ ta suy $y=\frac{x^2}{m}\ge 0$;

Từ $mx=y^2$ nên $x\ge 0$ và $y=\sqrt{mx}$.

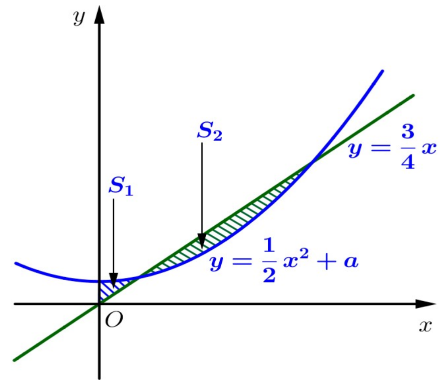
Xét phương trình $\frac{x^2}{m}=\sqrt{mx}\Leftrightarrow x^4=m^3x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=m\end{array}\right.$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_0^m\left|\sqrt{mx}-\frac{x^2}{m}\right|dx=\left|\int_0^m\left(\sqrt{mx}-\frac{x^2}{m}\right)dx\right|=\left|\left(\frac{2\sqrt{m}}{3}.x\sqrt{x}-\frac{x^3}{3m}\right)\Big|_0^m\right|=\left|\frac{1}{3}m^2\right|=\frac{1}{3}m^2$$

Yêu cầu bài toán $S=3\Leftrightarrow\frac{1}{3}m^2=3\Leftrightarrow m^2=9\Leftrightarrow m=3$.

**Câu 34:** Cho đường thẳng $y=\frac{3}{4}x$ và parbol $y=\frac{1}{2}x^2+a$ ($a$ là tham số thực dương). Gọi $S_1$, $S_2$ lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên.




Khi $S_1 = S_2$ thì $a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(\frac{1}{4};\frac{9}{32}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{16};\frac{7}{32}\right)$.

**C.** $\left(0;\frac{3}{16}\right)$. **D.** $\left(\frac{7}{32};\frac{1}{4}\right)$.

**Lời giải:**

**Chọn B**

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}x^2 + a \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4a = 0 \ (*)$

Từ hình vẽ, ta thấy đồ thị hai hàm số trên cắt nhau tại hai điểm dương phân biệt. Do đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 32a > 0 \\ S = \frac{3}{2} > 0 \\ P = 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{9}{32}$.

Khi đó có hai nghiệm dương phân biệt $x_1 = \frac{3-\sqrt{9-32a}}{4}$, $x_2 = \frac{3+\sqrt{9-32a}}{4}$, $(x_1 < x_2)$.

$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_0^{x_1}\left(\frac{1}{2}x^2 + a - \frac{3}{4}x\right)dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x^2 - a\right)dx$

$\Leftrightarrow \left.\left(\frac{x^3}{6} + ax - \frac{3x^2}{8}\right)\right|_0^{x_1} = \left.\left(\frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{6} - ax\right)\right|_{x_1}^{x_2}$

$\Leftrightarrow \frac{x_1^3}{6} + ax_1 - \frac{3x_1^2}{8} = \frac{3x_2^2}{8} - \frac{x_2^3}{6} - ax_2 - \left(\frac{3x_1^2}{8} - \frac{x_1^3}{6} - ax_1\right) \Leftrightarrow \frac{3x_2^2}{8} - \frac{x_2^3}{6} - ax_2 = 0$

$\Leftrightarrow -4x_2^2 + 9x_2 - 24a = 0$

$\Leftrightarrow -4\left(\frac{3+\sqrt{9-32a}}{4}\right)^2 + 9.\frac{3+\sqrt{9-32a}}{4} - 24a = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{9-32a} = 64a - 9$

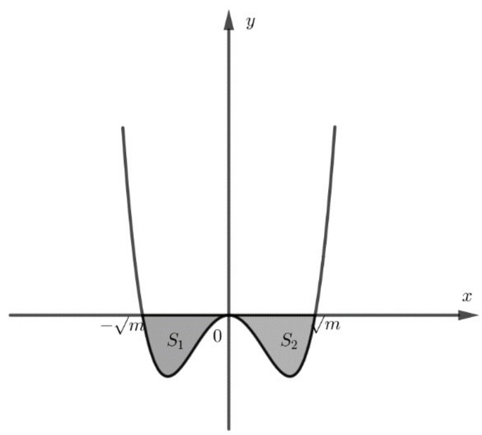
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 64a-9>0 \\ 9(9-32a)=(64a-9)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge \dfrac{9}{64} \\ 4096a^2-864a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge \dfrac{9}{64} \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\dfrac{27}{128} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{27}{128}.$$

**Câu 35:** Cho hàm số $y=x^4-mx^2$ có đồ thị $(C_m)$ với $m>0$. Giả sử $(C_m)$ cắt trục $Ox$ tại ba điểm phân biệt như hình vẽ. Gọi $S_1$ và $S_2$ là diện tích các miền tô đậm được cho trên hình vẽ. Tìm $m$ để $S_1+S_2=\dfrac{16\sqrt{2}}{15}$.

**A.** $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=\sqrt{2}$. **D.** $m=4$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Ta có: $x^4-mx^2=0 \Leftrightarrow x^2(x^2-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{m} \\ x=-\sqrt{m} \end{array}\right.$ vì $m>0$.

Do hàm số $y=x^4-mx^2$ là hàm chẵn nên đồ thị hàm số đối xứng qua trục $Oy$

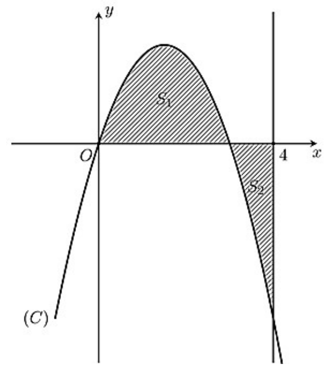
$\Rightarrow S_1=S_2 \Rightarrow S_1+S_2=2S_2$.

Mà $S_2=\displaystyle\int_0^{\sqrt{m}} \left|x^4-mx^2\right| \mathrm{dx}=\int_0^{\sqrt{m}} (mx^2-x^4)\mathrm{dx}=\left.\left(\frac{mx^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^{\sqrt{m}}=\frac{2m^2\sqrt{m}}{15}$.

Vì $S_1+S_2=\dfrac{16\sqrt{2}}{15} \Leftrightarrow 2S_2=\dfrac{16\sqrt{2}}{15} \Leftrightarrow \dfrac{4m^2\sqrt{m}}{15}=\dfrac{16\sqrt{2}}{15} \Leftrightarrow m^2\sqrt{m}=4\sqrt{2} \Leftrightarrow m=2$.

Vậy $m=2$.

**Câu 36:** Cho hàm số $y=mx-x^2$ $(0<m<4)$ có đồ thị $(C)$. Gọi $S_1+S_2$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $(C)$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=4$. Giá trị $m$ để $S_1=S_2$ là




A. $m=\dfrac{10}{3}$. **B.** $m=\dfrac{8}{3}$. C. $m=3$. D. $m=2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ và trục $Ox$ là:

$$mx-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=m\ \ (0<m<4)\end{array}\right.$$

Ta có: $S_1=\int\limits_0^m\left|mx-x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^m\left(mx-x^2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\dfrac{mx^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right)\right|_0^m=\dfrac{m^3}{6}$.

Lại có: $S_2=\int\limits_m^4\left|mx-x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_m^4\left(x^2-mx\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{mx^2}{2}\right)\right|_m^4=\dfrac{m^3}{6}-8m+\dfrac{64}{3}$.

Theo giả thiết ta có: $S_1=S_2\Leftrightarrow\dfrac{m^3}{6}=\dfrac{m^3}{6}-8m+\dfrac{64}{3}\Leftrightarrow m=\dfrac{8}{3}$.

**Câu 37:** Cho parabol $(P): y=x^2-kx+k-5$, với $k$ là tham số. Gọi $S$ diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P)$ và trục hoành, giá trị nhỏ nhất của $S=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Hỏi $a+b$ bằng?

**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

+ Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và trục hoành là: $x^2-kx+k-5=0$.
$(P)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi
$(-k)^2-4(k-5)>0\Leftrightarrow k^2-4k+20>0$ đúng với mọi $k\in\mathbb{R}$.
Vậy $(P)$ luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt
Giả sử $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$ là các hoành độ giao điểm. Ta có: $x_1+x_2=k, x_1x_2=k-5$,
$x_2-x_1=\sqrt{k^2-4k+20}$.

+ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P)$ và trục hoành là:

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|x^2-kx+k-5\right|\mathrm{d}x=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{kx^2}{2}+kx-5x\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x_2^3}{3}-\frac{kx_2^2}{2}+kx_2-5x_2\right)-\left(\frac{x_1^3}{3}-\frac{kx_1^2}{2}+kx_1-5x_1\right)\right|$$

$$=\left|\left(x_2-x_1\right)\left[\frac{\left(x_2+x_1\right)^2-x_2x_1}{3}-\frac{k\left(x_2+x_1\right)}{2}+k-5\right]\right|$$

$$=\frac{\left(\sqrt{k^2-4k+20}\right)^3}{6}=\frac{\left(\sqrt{\left(k-2\right)^2+16}\right)^3}{6}\geq\frac{2}{3}$$

Do đó: $\min S=\frac{2}{3}$. Vậy $a+b=5$

**Câu 38:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2+2x+1$ và đường thẳng $y=(m+1)x+5$ có giá trị nhỏ nhất bằng

**A.** $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{48}{3}$. **C.** $\frac{64}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình hoành độ giao điểm là:

$x^2+2x+1=(m+1)x+5\Leftrightarrow x^2+(1-m)x-4=0$.

Gọi hai nghiệm của phương trình này là $a$ và $b$ $(a<b)$. Theo Vi-et, có $a+b=m-1,\ ab=-4$.

Khi đó, diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_a^b\left|x^2+(1-m)x-4\right|\mathrm{d}x=\left|\left[\frac{x^3}{3}+\frac{(1-m)}{2}x^2-4x\right]\Bigg|_a^b\right|$$

$$=\left|\frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right)+\frac{1-m}{2}\left(b^2-a^2\right)-4\left(b-a\right)\right|$$

$$=\left(b-a\right)\left|\frac{1}{3}\left(b^2+ba+a^2\right)+\frac{1-m}{2}\left(a+b\right)-4\right|$$

$$=\sqrt{\left(a+b\right)^2-4ab}.\left|\frac{1}{3}\left[\left(a+b\right)^2-ab\right]+\frac{1-m}{2}\left(a+b\right)-4\right|$$

$$=\sqrt{\left(m-1\right)^2+16}.\left|\frac{1}{3}\left[\left(m-1\right)^2+4\right]-\frac{\left(m-1\right)^2}{2}-4\right|$$

$= \sqrt{(m-1)^2+16}.\left[\frac{(m-1)^2}{6}+\frac{8}{3}\right]$

$\Rightarrow S \ge 4.\frac{8}{3} \Rightarrow S \ge \frac{32}{3}$.

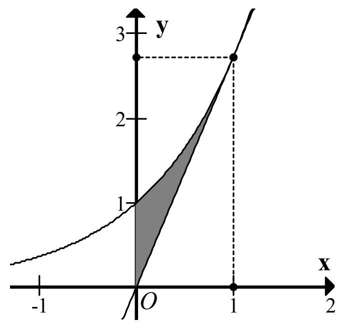
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m=1$.

Vậy $\min S = \frac{32}{3}$.

**Câu hỏi ôn tập dạng 5:** *Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh Ox hình phẳng giới hạn bởi một số đồ thị hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước.*

*+ Bài toán cho trước hình phẳng quay quanh trục Ox*

**Câu 39:** Cho hình $(H)$ giới hạn bởi các đường cong $(C): y=e^x$, tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M(1;e)$ và trục $Oy$. Thể tích của khối tròn xoay khi quay $(H)$ quanh trục $Ox$ bằng:




**A.** $\frac{e-2}{2}$. **B.** $\frac{e^2-1}{3}$. **C.** $\frac{e^2+1}{2}$. **D.** $\frac{e^2-3}{6}$

**Lời giải**

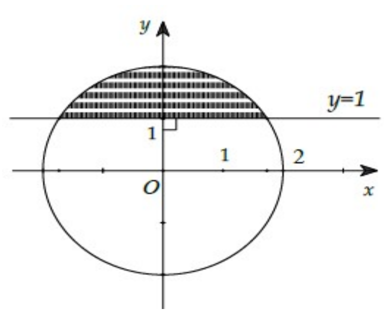
**Chọn D**

Ta có $y' = e^x$

Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại $M(1;e)$ là $y=e(x-1)+e \Leftrightarrow y=ex.$

Diện tích của $(H)$ bằng: $V=\pi\int_0^1\left(e^{2x}-e^2x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{e^2}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{e^2-3}{6}$.

**Câu 40:** Quay hình phẳng như hình được tô đậm trong hình vẽ bên quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:



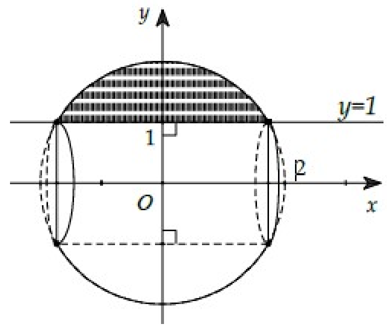

**A.** $V=4\sqrt{3}\pi$. **B.** $V=6\sqrt{3}\pi$.

**C.** $V = 5\sqrt{3}\pi$.

**D.** $V = 2\sqrt{3}\pi$

**Lời giải**

**Chọn A**

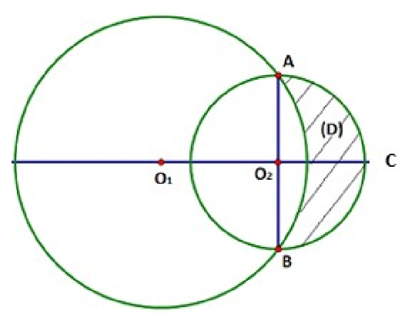



Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Do đối xứng nhau qua Oy nên:

$V = 2\pi\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left[\left(4 - x^2\right) - 1^2\right]dx = 2\pi\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(3 - x^2\right)dx = 2\pi\left(3x - \dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\pi$.

**Câu 41:** Cho hai đường tròn $(O_1;10)$ và $(O_2;6)$ cắt nhau tại hai điểm $A$, $B$ sao cho $AB$ là một đường kính của đường tròn $(O_2;6)$. Gọi $(D)$ là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn. Quay $(D)$ quanh trục $O_1O_2$ ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích $V$ của khối tròn xoay được tạo thành.




**A.** $V = 36\pi$

**B.** $V = \dfrac{68\pi}{3}$

**C.** $V = \dfrac{320}{3}$

**D.** $V = \dfrac{320\pi}{3}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Chọn hệ tọa độ $Oxy$ với $O_2 \equiv O$, $O_2C \equiv Ox$, $O_2A \equiv Oy$.

Cạnh $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \Rightarrow (O_1): (x+8)^2 + y^2 = 100$.

Phương trình đường tròn $(O_2)$: $x^2 + y^2 = 36$.

Kí hiệu $(H_1)$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{100 - (x+8)^2}$, trục $Ox$, $x = 0$,

$x=2$.

Kí hiệu $(H_2)$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{36-x^2}$, trục $Ox$, $x=0$, $x=6$.

Khi đó thể tích $V$ cần tính chính bằng thể tích $V_2$ của khối tròn xoay thu được khi quay hình $(H_2)$ xung quanh trục $Ox$ trừ đi thể tích $V_1$ của khối tròn xoay thu được khi quay hình $(H_1)$ xung quanh trục $Ox$.

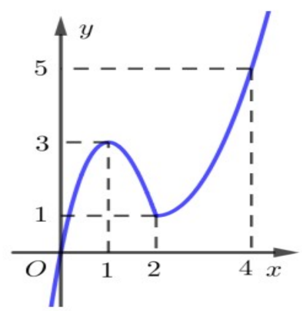
Ta có $V_2=\frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi.6^3=144\pi$.

Lại có $V_1=\pi\int_0^2 y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left[100-(x+8)^2\right]\mathrm{d}x=\frac{112\pi}{3}$.

Do đó $V=V_2-V_1=144\pi-\frac{112\pi}{3}=\frac{320\pi}{3}$.

*+ Bài toán cho trước điều kiện đối với đồ thị hàm số giới hạn hình phẳng sinh ra khối tròn xoay*

**Câu 42:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới




Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình $(H)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số và các đường thẳng $Ox,Oy$ và $x=2$ quay trục $Ox$ là

**A.** $\frac{13\pi}{3}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{32\pi}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có phần đồ thị của hàm số trên $[1;2]$ là 1 phần của Parabol $y=ax^2+bx+c$ đi qua 3 điểm $O(0;0)$, $A(1;3)$ và $B(2;1)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}c=0\\a+b+c=3\\4a+2b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{5}{2}\\b=\frac{11}{2}\\c=0\end{cases}.$$

Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int_0^2\left(-\frac{5}{2}x^2+\frac{11}{2}x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(\frac{25}{4}x^4-\frac{55}{2}x^3+\frac{121}{4}x^2\right)\mathrm{d}x$$
$$=\pi\left(\frac{25}{20}x^5-\frac{55}{8}x^4+\frac{121}{12}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{32\pi}{3}$$

**Câu 43:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên $[0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=2x\sqrt{1+f^2(x)}$ và $f(0)=0$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $x=1$, $x=3$ quanh trục $Ox$ là

**A.** $\frac{986}{15}$. **B.** $\frac{333\pi}{5}$. **C.** $\frac{986\pi}{15}$. **D.** $\frac{333}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}\Leftrightarrow\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=2x$

$\Leftrightarrow\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+f^2(x)}}d\left(1+f^2(x)\right)=\int 2x\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\sqrt{1+f^2(x)}=x^2+C$.

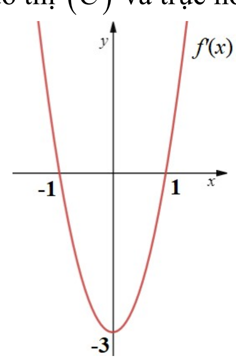
Mà $f(0)=0\Rightarrow C=1$, do đó $\sqrt{1+f^2(x)}=x^2+1\Leftrightarrow f^2(x)=x^4+2x^2$

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^4+2x^2}\Leftrightarrow f(x)=x\sqrt{x^2+2}$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int_1^3\left(x\sqrt{x^2+2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^3 x^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_1^3=\frac{986\pi}{15}.$$

**Câu 44:** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị $(C)$. Biết rằng đồ thị $(C)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng $H$ giới hạn bởi đồ thị $(C)$ và trục hoành khi quay xung quanh trục $Ox$.




**A.** $\frac{725}{35}\pi$. **B.** $\frac{729}{35}\pi$. **C.** $6\pi$. **D.** $\frac{1}{35}\pi$

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ hình vẽ ta có được $f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow f(x)=x^3-3x+d$

Ta có $y=4$ là đường thẳng có hệ số góc bằng 0 nên $y=4$ là tiếp tuyến tại điểm cực trị $x_0$ có hoành độ âm của hàm số $f(x) \Rightarrow f(x_0)=4$.

Từ hình vẽ ta thấy được $f(x)$ có một điểm cực trị âm là $x=-1$

$\Rightarrow f(-1)=4 \Rightarrow d=2 \Rightarrow f(x)=x^3-3x+2$.

Xét phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Khi đó thể tích vật thể được tạo ra khi xoay hình phẳng $H$ quanh trục $Ox$ là:

$$V=\pi\int_{-2}^{1}\left(x^3-3x+2\right)^2 \mathrm{d}x=\frac{729}{35}\pi$$

*+ Bài toán cho trước điều kiện đối với hàm số có đồ thị giới hạn hình phẳng sinh ra khối tròn xoay*

**Câu 45:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm khác 0 và liên tục đến cấp hai trên đoạn $[1;3]$; đồng thời $f(1)=0$, $f'(1)=1$ và $[f'(x)]^3=\frac{f'(x)-xf''(x)}{e^{f(x)}}$, $\forall x\in[1;3]$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{x\left(f(x)+\ln 2\right)}{\ln\left(x^2+1\right)}$, $y=0$, $x=1, x=3$ quay xung quanh trục hoành.

**A.** $\frac{26\pi}{3}$. **B.** $26\pi$. **C.** $\frac{3\pi}{26}$. **D.** $3\pi$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $[f'(x)]^3=\frac{f'(x)-xf''(x)}{e^{f(x)}}$

$$\Leftrightarrow f'(x).e^{f(x)}=\frac{f'(x)-xf''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} \Leftrightarrow \left[e^{f(x)}\right]'=\left[\frac{x}{f'(x)}\right]'$$

$$\Rightarrow \int\left[e^{f(x)}\right]'dx=\int\left[\frac{x}{f'(x)}\right]'dx \Rightarrow e^{f(x)}=\frac{x}{f'(x)}+C.$$

Do $f(1)=0, f'(1)=1 \Rightarrow C=0$

$$\Rightarrow e^{f(x)}=\frac{x}{f'(x)} \Rightarrow f'(x).e^{f(x)}=x \Rightarrow \int f'(x).e^{f(x)}dx=\int xdx \Rightarrow e^{f(x)}=\frac{x^2}{2}+C_1.$$

Do $f(1)=0$ nên $C_1=\frac{1}{2} \Rightarrow e^{f(x)}=\frac{x^2+1}{2} \Rightarrow f(x)=\ln\frac{x^2+1}{2}$.

Thể tích của vật thể tròn xoay cần tính là

$$V=\pi\int_1^3\left[\frac{x\left(f\left(x\right)+\ln 2\right)}{\ln\left(x^2+1\right)}\right]^2dx=\pi\int_1^3 x^2dx\ =\left.\frac{\pi x^3}{3}\right|_1^3=\frac{26\pi}{3}.$$

**Câu 46:** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\left[f^{'}(x)\right]^2+f(x).f^{''}(x)=x^3-2x,\forall x\in R$ và $f(0)=f^{'}(0)=2$. Gọi $V$ là thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh $Ox$ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục $Ox$ và các đường thẳng $x=0,x=2$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.** $V\in\left[0;200\right]$.

**B.** $V\in\left(200;500\right)$.

**C.** $V\in\left[500;10^6\right]$.

**D.** $V\in\left(10^6;+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\left[f^{'}(x)\right]^2+f(x).f^{''}(x)=x^3-2x,\forall x\in R$

$\Leftrightarrow\left(f^{'}(x).f(x)\right)^{'}=x^3-2x,\forall x\in R$

Lấy nguyên hàm hai vế ta có:

$\int\left(f^{'}(x).f(x)\right)^{'}dx=\int\left(x^3-2x\right)dx$

$\Leftrightarrow f^{'}(x).f(x)=\dfrac{x^4}{4}-x^2+C$

Theo đề ra ta có: $f^{'}(0).f(0)=C=4$

Suy ra: $\int f^{'}(x).f(x).dx=\int\left(\dfrac{x^4}{4}-x^2+4\right)dx$

$\Rightarrow\dfrac{\left(f\left(x\right)\right)^2}{2}=\dfrac{x^5}{20}-\dfrac{x^3}{3}+4x+D$ mà $f(0)=f^{'}(0)=2$ nên D = 2

$\Rightarrow\left[f\left(x\right)\right]^2=2\left(\dfrac{x^5}{20}-\dfrac{x^3}{3}+4x+2\right)$.

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh $Ox$ hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục $Ox$, $x=0,x=2$ bằng

$$V=\pi\int_0^2\left[f\left(x\right)\right]^2dx=\pi\int_0^2\left(2\left(\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{3}+4x+2\right)\right)^2dx\approx 883,6$$

*+ Bài toán cho trước hình dạng của khối tròn xoay*

**Câu 47:** Cho hai mặt cầu $\left(S_1\right)$, $\left(S_2\right)$ có cùng bán kính $R$ thỏa mãn tính chất: tâm của $\left(S_1\right)$ thuộc $\left(S_2\right)$ và ngược lại. Tính thể tích phần chung $V$ của hai khối cầu tạo bởi $(S_1)$ và $(S_2)$.

**A.** $V=\pi R^3$.

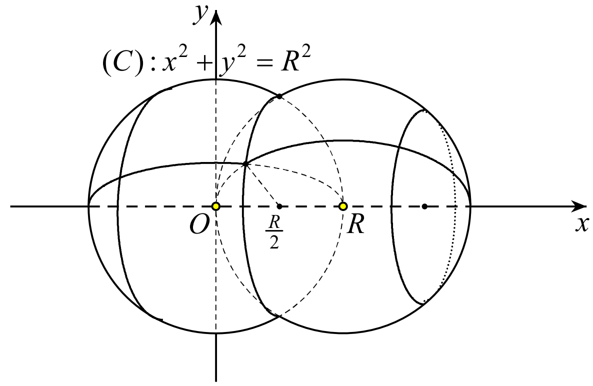
**B.** $V=\dfrac{\pi R^3}{2}$.

**C.** $V=\dfrac{5\pi R^3}{12}$.

**D.** $V=\dfrac{2\pi R^3}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C**



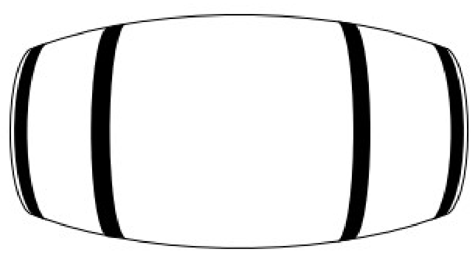

Gắn hệ trục $Oxy$ như hình vẽ

Khối cầu $S(O,R)$ chứa một đường tròn lớn là $(C): x^2+y^2=R^2$

Dựa vào hình vẽ, thể tích cần tính là

$$V=2\pi\int_{\frac{R}{2}}^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{R}{2}}^{R}=\frac{5\pi R^3}{12}.$$

**Câu 48:** Một thùng đựng rượu làm bằng gỗ là một khối tròn xoay . Bán kính của đáy bằng 50cm. Khoảng cách giữa hai đáy là 1m. Biết rằng mặt phẳng qua trục đối xứng cắt mặt xung quanh của thùng là đường parabol. Thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích bằng $3600\pi\left(cm^2\right)$ Thể tích của thùng gần nhất với số nào sau đây:



**A.** 449. **B.** 322. **C.** 178. **D.** 1012.

**Lời giải**

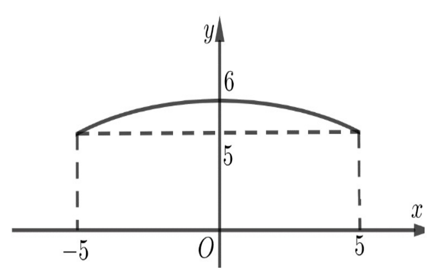
**Chọn D**

Ta có

$50cm=5dm, 1m=10dm, 3600\pi\left(cm^2\right)=36\pi\left(dm^2\right)\Rightarrow r=6dm$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxy$ như hình vẽ.

Mặt phẳng qua trục đối xứng cắt mặt xung quanh của thùng là đường parabol như hình vẽ

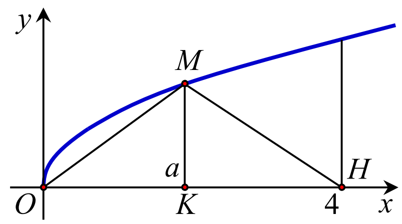


Phương trình parabol là $y=-\frac{1}{25}x^2+6$

Thể tích của thùng là $V=\pi\int\limits_{-5}^{5}\left(-\frac{1}{25}x^2+6\right)^2dx\approx 1012$.

**Câu hỏi ôn tập dạng 6:** *Tìm điều kiện của tham số để thể tích khối tròn xoay thỏa mãn điều kiện cho trước.*

**Câu 49:** Gọi $V$ là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục $Ox$. Đường thẳng $x=a\,(0<a<4)$ cắt đồ thị hàm $y=\sqrt{x}$ tại $M$.




Gọi $V_1$ là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác $OMH$ quanh trục $Ox$. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó

**A.** $a=2$. **B.** $a=2\sqrt{2}$. **C.** $a=\frac{5}{2}$. **D.** $a=3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$. Khi đó $V=\pi\int\limits_0^4 x\mathrm{d}x=8\pi$

Ta có $M\left(a;\sqrt{a}\right)$

Khi quay tam giác $OMH$ quanh trục $Ox$ tạo thành hai hình nón có chung đáy:

+ Hình nón $(N_1)$ có đỉnh là $O$, chiều cao $h_1=OK=a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$;

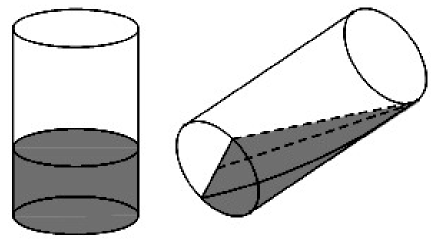
+ Hình nón $(N_2)$ thứ 2 có đỉnh là $H$, chiều cao $h_2=HK=4-a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$

Khi đó $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2h_1+\frac{1}{3}\pi R^2h_2=\frac{4}{3}\pi a$

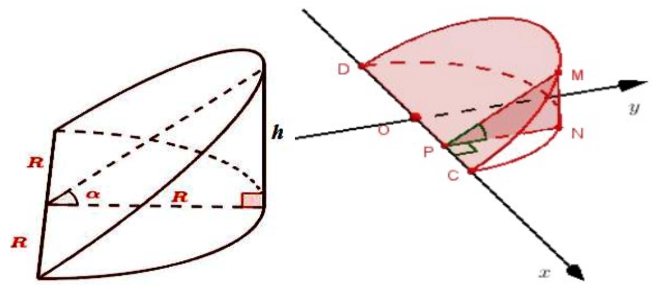
Theo đề bài $V=2V_1\Leftrightarrow 8\pi=2.\frac{4}{3}\pi a\Rightarrow a=3$.

**Câu hỏi ôn tập dạng 7:** *Tính thể tích của vật thể.*

**Câu 50:** Bạn A có một cốc thủy tinh hình trụ, đường kính trong lòng đáy cốc là $6\,cm$, chiều cao trong lòng cốc là $10\,cm$ đang đựng một lượng nước. Bạn A nghiêng cốc nước, vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy. Tính thể tích lượng nước trong cốc



**Lời giải**




+ **Cách 1**. Chứng minh công thức bằng PP tích phân:

Thể tích cái nêm biết góc giữa mặt cắt và mặt đáy bằng $\alpha$ là

$\boxed{V = \frac{2}{3}R^2h = \frac{2}{3}R^3.\tan\alpha}$ với $\tan\alpha = \frac{h}{R}$

Xét thiết diện cắt cốc thuỷ tinh tại vị trí $x$ $(-R \le x \le R)$ bất kỳ; ta có diện tích thiết diện là $S(x) = \frac{1}{2}.\sqrt{R^2-x^2}.\left(\sqrt{R^2-x^2}.\tan\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(R^2-x^2\right)\tan\alpha$;

thể tích $V = \int_{-R}^{R} S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan\alpha\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha$.

ta được $V = \frac{2}{3}R^3.\frac{h}{R} = \frac{2}{3}.3^2.10 = 60\left(cm^3\right)$

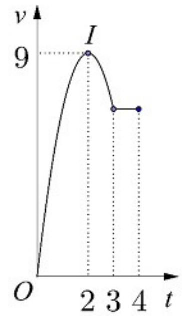
+ **Cách 2.** Gọi S là diện tích thiết diện do mặt phẳng có phương vuông góc với trục Ox với khối nước, mặt phẳng này cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $h \ge x \ge 0$. Ta có: $\frac{r}{R} = \frac{h-x}{h} \Leftrightarrow r = \frac{(h-x)R}{h}$, vì thiết diện này là nửa hình tròn bán kính $r \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi(h-x)^2R^2}{2h^2}$

Thể tích lượng nước chứa trong bình là

$$V = \int_0^h S(x)dx = \frac{9\pi}{200}\int_0^{10}(10-x)^2dx = 60\pi(cm^3).\ V = \int_0^h S(x)dx$$

**Câu hỏi ôn tập dạng 8:** *Ứng dụng tích phân trong bài toán chuyển động của chất điểm.*

**Câu 51:** Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v$ (km/h) phụ thuộc thời gian $t$ (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường $s$ mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.




**A.** $s = 24$ (km)

**B.** $s = 28,5$ (km)

**C.** $s = 27$ (km)

**D.** $s = 26,5$ (km)

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$.

Vì $(P)$ qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên dễ tìm được phương trình là $y = \frac{-9}{4}x^2 + 9x$.

Ngoài ra tại $x = 3$ ta có $y = \frac{27}{4}$

Vậy quãng đường cần tìm là: $S = \int_0^3 \left(\frac{-9}{4}x^2 + 9x\right)\mathrm{d}x + \int_3^4 \frac{27}{4}\mathrm{d}x = 27 \ (km)$.