PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

Trong các số a,b và c có bao nhiêu số dương?

Trả lời: ....

Lời giải

Hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{c}{b}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{b}$.

Từ bảng biến thiên ta có: $\begin{cases}-\dfrac{c}{b}=2\\ \dfrac{a}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=-\dfrac{c}{2}$ (1)

Mặt khác: $f'(x)=\dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}$.

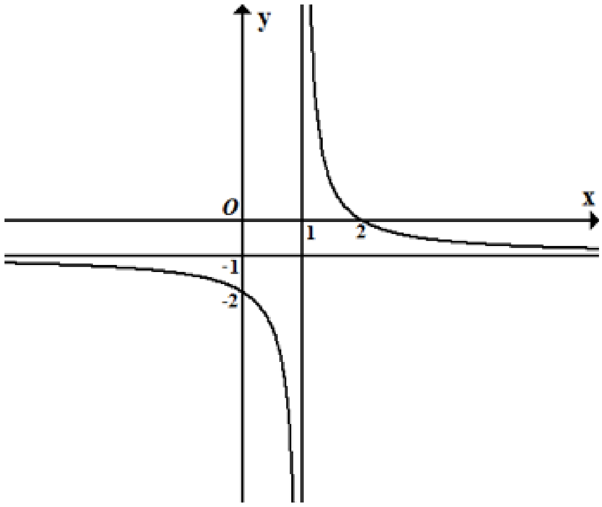
Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ nên

$f'(x)=\dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}>0\Leftrightarrow ac-b>0$ (2)

Thay (1) vào (2), ta được: $-\dfrac{c^2}{2}+\dfrac{c}{2}>0\Leftrightarrow -c^2+c>0\Leftrightarrow 0<c<1$.

Suy ra *c* là số dương và *a*, *b* là số âm.

Câu 2. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+2b+3c$?



Trả lời: ....

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta suy ra

- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$.
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(2;0)$, $B(0;-2)$.

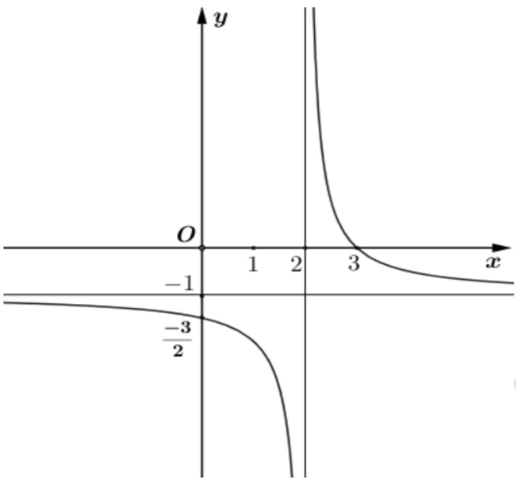
Từ biểu thức hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ (vì đồ thị hàm số là đồ thị hàm nhất biến nên $ac-b\neq 0$), ta suy ra

- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-c$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=a$.
- Đồ thị hàm số đi qua $A\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$, $B\left(0;\dfrac{b}{c}\right)$.

Đối chiếu lại, ta suy ra $c=-1$, $a=-1$, $b=2$.

Vậy $T=a+2b+3c=(-1)+2.2+3(-1)=0$.

Câu 3. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+3}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của $a-2c$.



Trả lời: ....

Lời giải

Đồ thị hàm số có TCN $y=-1 \Leftrightarrow \frac{a}{1}=-1 \Leftrightarrow a=-1$.

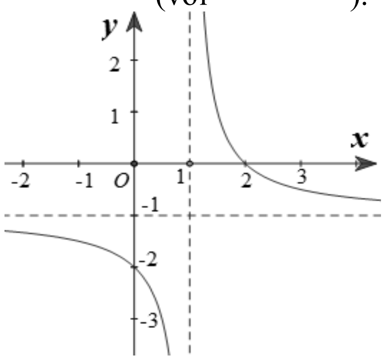
Mặt khác Đồ thị hàm số có TCĐ $x=2$ nên $2+c=0 \Leftrightarrow c=-2$.

$\Rightarrow a-2c=-1-2.(-2)=3.$

Dựa vào đồ thị ta thấy các điểm $(3;0)$ và $\left(0;-\frac{3}{2}\right)$ thuộc vào đồ thị hàm số đã cho nên ta được hệ phương trình $\begin{cases} 0=\frac{a.3+3}{3+c} \\ -\frac{3}{2}=\frac{a.0+3}{0+c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+3=0 \\ -3c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow a-2c=-1-2.(-2)=3.$

Câu 4. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y=\frac{ax+b}{x+c}$ (với $a,b,c\in\mathbb{R}$).



Khi đó tổng $a+b+c$ bằng

Trả lời: ....

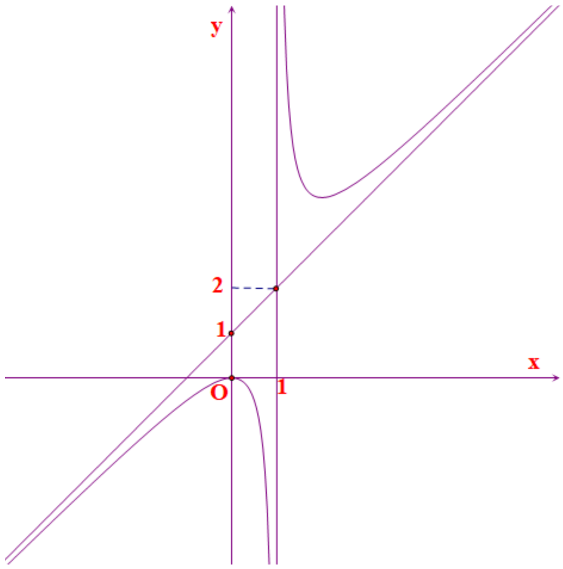
Lời giải

Đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{x+c}$ có đường tiệm cận ngang $y=a$, đường tiệm cận đứng $x=-c$ và cắt Oy tại điểm $\left(0;\frac{b}{c}\right)$.

Từ đồ thị hàm số ta có đường tiệm cận ngang $y=-1$, đường tiệm cận đứng $x=1$ và cắt Oy tại điểm $(0;-2)$.

Từ đó suy ra: $\begin{cases} a=-1 \\ -c=1 \\ \frac{b}{c}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-1 \\ b=-2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-1 \\ b=2 \end{cases}$. Vậy $a+b+c=-1-1+2=0$.

Câu 5. Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y=ax+b+\frac{1}{x+c}$



Khi đó tổng $a+b+c$ bằng

Trả lời: ....

Lời giải

Ta có $y=ax+b$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. Từ đồ thị ta suy ra được $y=x+1$ là tiệm cận xiên nên $a=1, b=1$

$x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nên $c=-1$

Vậy $a+b+c=3$

Câu 6. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và $c\neq 0)$. Biết rằng đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(-1;7)$ và giao điểm hai tiệm cận là $(-2;3)$. Giá trị biểu thức $\dfrac{2a+3b+4c+d}{7c}$ bằng

Trả lời: ....

Lời giải

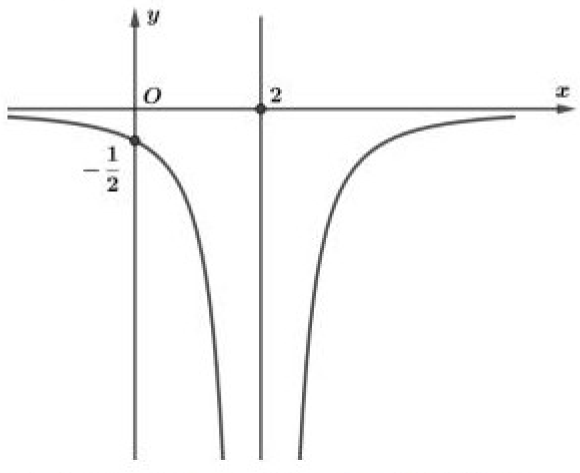
+ Ta có đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$, đường tiệm cận đứng là $x=\dfrac{-d}{c}$.

Theo bài ra, ta có: $\begin{cases}\dfrac{a}{c}=3\\ \dfrac{-d}{c}=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3c\\ d=2c\end{cases}$.

+ Điểm $(-1;7)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ nên $\dfrac{-a+b}{-c+d}=7\Leftrightarrow\dfrac{-3c+b}{-c+2c}=7\Leftrightarrow b=10c$.

Vậy $\dfrac{2a+3b+4c+d}{7c}=\dfrac{2.(3c)+3.(10c)+4c+2c}{7c}=6$.

Câu 7. **(Sở Thái Nguyên 2022)** Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như trong hình vẽ sau:



Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;2)$. Giá trị $f(3)$ bằng

Trả lời: ....

Lời giải

Ta có: $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Vì đồ thị thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;2)$ suy ra $f(0)=2\Rightarrow \dfrac{b}{d}=2\Leftrightarrow b=2d$ (1).

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có: $\begin{cases} f'(0)=-\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{d}{c}=2 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{ad-bc}{d^2}=-\dfrac{1}{2} & (2) \\ d=-2c & (3) \end{cases}$.

Thay (1) vào (2): $\dfrac{ad-2dc}{d^2}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow \dfrac{a-2c}{d}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2}d+2c=-\dfrac{1}{2}.(-2c)+2c=3c$.

Vậy, $f(3)=\dfrac{3a+b}{3c+d}=\dfrac{3.3c-4c}{3c-2c}=\dfrac{5c}{c}=5$.

Câu 8. Với giá trị thực nào của tham số m thì đường thẳng $y=2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho MN ngắn nhất.

Trả lời: ....

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+3}{x+1}=2x+m\Leftrightarrow$ $2x^2+(m+1)x+m-3=0$ $(*)$.

Đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta = m^2 - 6m + 25 > 0, \forall m$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$, lần lượt là hoành độ của hai điểm M, N. Khi đó ta có: $M(x_1, 2x_1 + m)$, $N(x_2, 2x_2 + m)$, $\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1; 2(x_2 - x_1))$.

Suy ra $P = \left|\overrightarrow{MN}\right|^2 = 5(x_2 - x_1)^2 = 5\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1.x_2\right]$; với $x_1 + x_2 = -\dfrac{m+1}{2}$, $x_1.x_2 = \dfrac{m-3}{2}$.

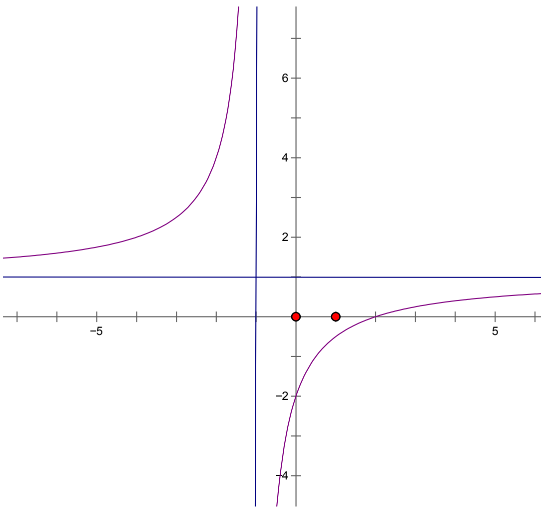
$P = \dfrac{5}{4}(m^2 - 6m + 25) = \dfrac{5}{4}\left[(m-3)^2 + 16\right] \geq 20, \forall m$. Do đó MN ngắn nhất khi và chỉ khi $P_{\min}$, mà $P_{\min} = 20$ khi $m = 3$.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m sao cho phương trình $\dfrac{\left||x| - 2\right|}{|x| + 1} = m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

Trả lời: ....

Lời giải

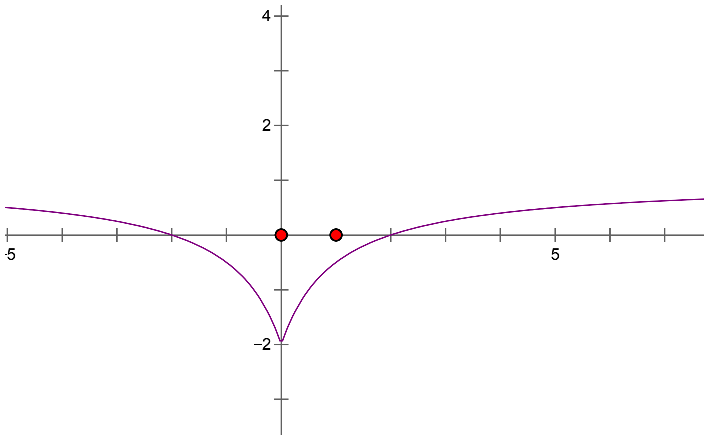
+ Vẽ đồ thị (C) hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$



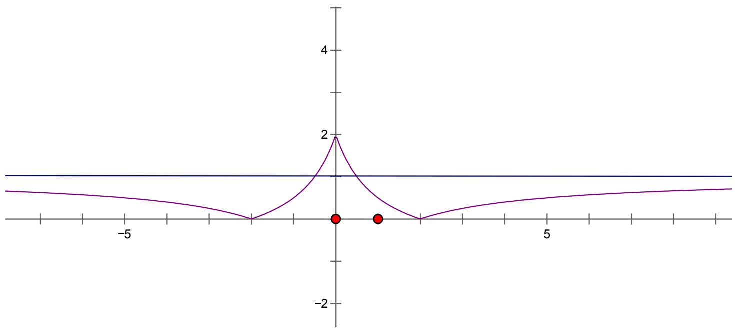
.

+ Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{\left||x| - 2\right|}{|x| + 1}$ được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

-Giữ phần đồ thị (C) bên phải trục Oy (bỏ phần bên trái). Lấy đối xứng của nhánh đồ thị (C) của phần đồ thị khi $x \geq 0$ qua trục Oy, ta được đồ thị $(C'): y = \dfrac{|x| - 2}{|x| + 1}$.



-Phần đồ thị (C') nằm dưới trục hoành, lấy đối xứng qua trục Ox ta được đồ thị của hàm số $y=\dfrac{\left||x|-2\right|}{|x|+1}$.



Số nghiệm của phương trình $\dfrac{\left||x|-2\right|}{|x|+1}=m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left||x|-2\right|}{|x|+1}$ và đường thẳng $y=m$. Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left||x|-2\right|}{|x|+1}$ tại hai điểm phân biệt khi $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ 1\le m<2 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình $\dfrac{\left||x|-2\right|}{|x|+1}=m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt khi $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ 1\le m<2 \end{array}\right.$.

Câu 10. Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B và $AB\le 4$?
Trả lời: ....

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$\frac{2x-1}{x+1}=x+m \Leftrightarrow 2x-1=(x+m)(x+1) \Leftrightarrow x^2+(m-1)x+m+1=0 \quad (1)$$

(vì $x=-1$ không là nghiệm của phương trình)

Hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt và khác $(-1) \Leftrightarrow \Delta = (m-1)^2 - 4(m+1) > 0$ $\Leftrightarrow m^2 - 6m - 3 > 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{array}\right.$ (*)

Gọi $A(x_1; x_1 + m)$, $B(x_2; x_2 + m)$. Theo định lý Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1.x_2 = m + 1 \end{cases}$.

$AB \le 4 \Leftrightarrow \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} \le 4 \Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)^2 \le 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \le 8$

$\Leftrightarrow (1-m)^2 - 4(m+1) \le 8 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 11 \le 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{5} \le m \le 3 + 2\sqrt{5}$, kết hợp điều kiện (*) và m nguyên dương nên có 1 giá trị m thỏa mãn.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\dfrac{2|x| - 1}{|x| + 2} = m$ có 2 nghiệm phân biệt.

Trả lời: ....

Lời giải

Ta có $\dfrac{2|x| - 1}{|x| + 2} = m \Leftrightarrow 2|x| - 1 = m(|x| + 2) \Leftrightarrow |x|(2 - m) = 2m + 1$ (1)

+ Xét $m = 2$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

+ Xét $m \ne 2$, phương trình $(1) \Leftrightarrow |x| = \dfrac{2m+1}{2-m}$. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $\dfrac{2m+1}{2-m} > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < m < 2$. Vậy $m \in \left(-\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{0; 1\}$

Câu 12. **(Sở Ninh Bình 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt?

Trả lời: ....

Lời giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = x + m$ và đường cong $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$

$x + m = \dfrac{2x-3}{x-1} \Leftrightarrow (x+m)(x-1) = 2x - 3\ (x \ne 1)$.

$\Leftrightarrow x^2 + mx - x - m = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - m + 3 = 0$ (*)

Ta có $\Delta = (m-3)^2 - 4(-m+3) = m^2 - 6m + 9 + 4m - 12 = m^2 - 2m - 3$.

Để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1^2 + (m-3).1 - m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 > 0 \\ 1 \neq 0 \quad (lđ) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array} \right.$.

Theo giả thiết: $-2020 \le m \le 2020$ và $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array} \right.$ nên $\left[\begin{array}{l} -2020 \le m < -1 \\ 3 < m \le 2020 \end{array} \right.$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $-2020 \le m < -1$, suy ra có $\dfrac{-2-(-2020)}{1} + 1 = 2019$ giá trị nguyên m.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $3 < m \le 2020$, suy ra có $\dfrac{2020-4}{1} + 1 = 2017$ giá trị nguyên m.

Tóm lại có tất cả $2019 + 2017 = 4036$ giá trị nguyên của tham số m.

Câu 13. **(Chuyên Nguyễn Du ĐăkLăk 2019)** Cho hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}\ (C)$ và đường thẳng $d: y = -x + m$. Gọi S là tập các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

Trả lời: ....

Lời giải

Xét phương trình $\dfrac{x}{x-1} = -x + m,$ (điều kiện $x \neq 1$).

Phương trình tương đương $x^2 - mx + m = 0 \ (1)$.

Đồ thị (C) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$ điều kiện cần và đủ là $m < 0 \vee m > 4$.

Khi đó hai giao điểm là $A(x_1; -x_1 + m)$; $B(x_2; -x_2 + m)$.

Ta có $OA = \sqrt{m^2 - 2m}; OB = \sqrt{m^2 - 2m}; AB = \sqrt{2(m^2 - 4m)}$; $d(O,d) = \dfrac{|m|}{\sqrt{2}}$.

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.AB.d(O,d) = \frac{1}{2}.\frac{|m|}{\sqrt{2}}.\sqrt{2(m^2-4m)} = \frac{OA.OB.AB}{4R}.$$

Suy ra $\dfrac{1}{2}.\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}\sqrt{2(m^2-4m)} = \dfrac{(m^2-2m).\sqrt{2(m^2-4m)}}{4.2\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m = 4|m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \ (l) \\ m = 6 \ (n) \\ m = -2 \ (n) \end{array} \right..$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 4.

Câu 14. **(Sở Cần Thơ 2019)** Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d:y=x-m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc toạ độ). Giá trị của m bằng

Trả lời: ....

Lời giải

Hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}$ có $y'=\frac{-2}{(x+1)^2}<0$, $\forall x\in D$ và đường thẳng $d:y=x-m$ có hệ số $a=1>0$ nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ với mọi giá trị của tham số m.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $\frac{x+3}{x+1}=x-m$

$\Leftrightarrow x^2-mx-m-3=0 \quad (x\neq -1)$.

Suy ra x_A, x_B là 2 nghiệm của phương trình $x^2-mx-m-3=0$.

Theo định lí Viet, ta có $x_A+x_B=m$.

Mặt khác, $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB nên $x_A+x_B+x_O=3x_G$

$\Leftrightarrow x_A+x_B=6$

$\Leftrightarrow m=6$.

Vậy $m=6$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

Câu 15. **(Sở Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=\frac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m\neq 0,$ đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d:y=3x-3m$ tại hai điểm phân biệt A, $B.$ Tích tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD bằng

Trả lời: ....

Lời giải

Với $m\neq 0$, xét phương trình $\frac{3x-2m}{mx+1}=3x-3m \Leftrightarrow 3x^2-3mx-1=0$. (*)

Gọi tọa độ các giao điểm của d với đồ thị hàm số đã cho là: $A(x_1;3x_1-3m)$, $B(x_2;3x_2-3m)$.

Tọa độ các điểm C, D là $C(m;0)$ và $D(0;-3m)$.

Gọi $h=d_{(O,d)}$ thì h là chiều cao của các tam giác OAB và OCD.

Theo giả thiết: $S_{\Delta OAB}=2S_{\Delta OCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.h=2.\frac{1}{2}CD.h \Leftrightarrow AB=2CD \Leftrightarrow AB^2=4CD^2$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2+\left[3(x_1-x_2)\right]^2=4\left[m^2+(-3m)^2\right]$

$\Leftrightarrow 10(x_1-x_2)^2=40m^2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4m^2$

$\Leftrightarrow m^2+\frac{4}{3}=4m^2 \Leftrightarrow m^2=\frac{4}{9} \Leftrightarrow m=\pm\frac{2}{3}$.

Vậy tích các giá trị của m là $-\frac{4}{9}$.

Câu 16. Giả sử $m=-\frac{b}{a}$, $a,b\in\mathbb{Z}^+$, $(a,b)=1$ là giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta:x-2y-2=0$, với O là gốc toạ độ. Tính $a+2b$.

Trả lời: ....

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x-1}=-3x+m$, $x\neq 1$.

$\Rightarrow 3x^2-(m+1)x+m+1=0\ (*)$.

Để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt thì $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1. Suy ra $\begin{cases}(m+1)^2-12(m+1)>0\\3.1^2-(m+1).1+(m+1)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m+1<0\\m+1>12\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>11\end{array}\right.$.

Khi đó $A(x_1;-3x_1+m)$, $B(x_2;-3x_2+m)$, với x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ đồng thời thoả mãn $x_1+x_2=\frac{m+1}{3}$.

Gọi G là trọng tâm của ΔOAB, ta có $G\left(\frac{m+1}{9};\frac{m-1}{3}\right)$.

Mà $G\in\Delta$ nên $\frac{m+1}{9}-2\frac{m-1}{3}-2=0\Rightarrow m=-\frac{11}{5}$. Suy ra $\begin{cases}a=11\\b=5\end{cases}$.

Vậy $a+2b=21$.

Câu 17. Cho hàm số $y=\frac{3x+2}{x+2}$, (C) và đường thẳng $d:y=ax+2b-4$. Đường thẳng d cắt (C) tại A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O, khi đó $T=a+b$ bằng

Trả lời: ....

Lời giải

Xét phương trình hoành độ: $\frac{3x+2}{x+2}=ax+2b-4; x\neq -2.$

$\Leftrightarrow ax^2+(2a+2b-7)x-10=0(*)$.

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\(2a+2b-7)^2-4a(4b-10)>0(2*)\\4\neq 0\end{cases}$

Gọi $A(x_1;ax_1+2b-4);B(x_2;ax_2+2b-4)$.

Do A, B đối xứng nhau qua gốc O nên $\begin{cases}x_1+x_2=0\\4b-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\b=2\end{cases}$

Theo Viét của phương trình (*) ta có $x_1+x_2=\frac{7-2a-2b}{a}$.

$\Rightarrow \dfrac{7-2a-2b}{a}=0 \Leftrightarrow 7-2a-2b=0 \Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$.

Thay $\begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=2 \end{cases}$ vào điều kiện (2*) thấy thỏa mãn.

Vậy $a+b=\dfrac{7}{2}$.

Câu 18. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm ΔOAB thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y-2=0$, với O là gốc tọa độ.

Trả lời: ....

Lời giải

Hoành độ hai điểm A, B là nghiệm của phương trình $-3x+m=\dfrac{2x+1}{x-1}$

$\Leftrightarrow (-3x+m)(x-1)=2x+1$ (vì $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình).

$\Leftrightarrow 3x^2-(m+1)x+m+1=0$ (*)

Điều kiện: $\Delta>0 \Leftrightarrow (m+1)^2-4.3(m+1)>0 \Leftrightarrow (m+1)(m-11)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>11 \end{array}\right.$.

Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_A, x_B thỏa mãn $x_A+x_B=\dfrac{m+1}{3}$.

Gọi $A(x_A;-3x_A+m)$, $B(x_B;-3x_B+m)$ thì trọng tâm của tam giác OAB là $G\left(\dfrac{x_A+x_B}{3};\dfrac{-3(x_A+x_B)+2m}{3}\right)$ hay $G\left(\dfrac{m+1}{9};\dfrac{m-1}{3}\right)$.

$G\in\Delta \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{9}-2.\dfrac{m-1}{3}-2=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{11}{5}$.

Câu 19. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN\le 10$.

Trả lời: ....

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số: $x\neq -1$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{x+1}=x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(m-1)x+m+1=0 \\ x\neq -1 \end{cases}$.

Đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N khi và chỉ khi phương trình $x^2+(m-1)x+m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m-3>0 \\ 3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<3-2\sqrt{3} \\ m>3+2\sqrt{3} \end{array}\right. \quad (*)$.

Gọi $M(x_1;x_1+m)$, $N(x_2;x_2+m)$ là tọa độ giao điểm đường thẳng $y=x+m$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Theo bài cho $MN\le 10\Leftrightarrow \sqrt{2(x_2-x_1)^2}\le 10\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2\le 50$

Áp dụng định lí Viét cho phương trình $x^2+(m-1)x+m+1=0$ ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=1-m\\x_1.x_2=m+1\end{cases}$.

Ta có $MN\le 10\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2\le 50\Leftrightarrow m^2-6m-53\le\Leftrightarrow 3-\sqrt{62}\le m\le 3+\sqrt{62}$

Kết hợp với (*) thì $m\in\left(3-\sqrt{62};3-2\sqrt{3}\right)\cup\left(3+2\sqrt{3};3+\sqrt{62}\right)$.

Các số nguyên dương m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m=\{7,8,9,10\}$.

Câu 20. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Gọi $M(a;b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d:y=2x+6$ nhỏ nhất. Tính $(4a+5)^2+(2b-7)^2$.

Trả lời: ....

Lời giải

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d là: $\dfrac{x-2}{x}=2x+6$

$\Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0\ (x\ne 0)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.$.

Suy ra đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $M_1(-2;2), M_2\left(-\dfrac{1}{2};5\right)$.

Ta có $d(M;d)\ge 0,\forall M\Rightarrow \min d(M;d)=0$ khi $M\in d$.

Mà $M\in(C)\Rightarrow M=d\cap(C)\Rightarrow \left[\begin{array}{l}M(-2;2)\\M\left(-\dfrac{1}{2};5\right)\end{array}\right.$.

Với $M(-2;2)\Rightarrow a=-2,b=2\Rightarrow (4a+5)^2+(2b-7)^2=18$.

Với $M\left(-\dfrac{1}{2};5\right)\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2},b=5\Rightarrow (4a+5)^2+(2b-7)^2=18$.

Câu 21. Trên đồ thị (C): $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}$ có bao nhiêu cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Trả lời: ....

Lời giải

Gọi $M(x;y), M'(x';y')$ thuộc (C) và đối xứng nhau qua điểm $I\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} x+x'=1 \\ y+y'=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=1-x \\ y'=2-y \end{cases} \Rightarrow M'(1-x;2-y)$.

Vì $M(x;y), M'(x';y')$ thuộc (C) nên ta có $\begin{cases} y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2} \\ 2-y=\dfrac{x^2-x+4}{-x-1} \end{cases}$

$$\Rightarrow 2=\frac{x^2-3x+6}{x-2}+\frac{x^2+x+4}{-x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6=0 \\ x\neq -1, x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \Rightarrow y=-4 \\ x=3 \Rightarrow y=6 \end{array}\right.$$

Vậy trên (C) có đúng một cặp điểm: $M(-2,-4), M'(3;6)$

Câu 22. Tìm được trên đồ thị (C): $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ hai điểm $M(a;b)$ và $N(c;d)$ có khoảng cách đến đường thẳng $3x+y+6=0$ nhỏ nhất. Khi đó $a+b+c+d=?$

Trả lời: ....

Lời giải

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;\dfrac{x_0^2+4x_0+5}{x_0+2}\right)$.

Gọi (d) là khoảng cách từ M đến đường thẳng $3x+y+6=0$

$$d=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|\frac{4x_0^2+16x_0+17}{x_0+2}\right|=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|4(x_0+2)+\frac{1}{x_0+2}\right|\geq\frac{4}{\sqrt{10}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4|x_0+2|=\dfrac{1}{|x_0+2|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=\dfrac{-3}{2}\Rightarrow y_0=\dfrac{5}{2} \\ x_0=\dfrac{-5}{2}\Rightarrow y_0=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Vậy có hai điểm thoả yêu cầu bài toán là $M_1\left(\dfrac{-3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ và $M_2\left(\dfrac{-5}{2};\dfrac{-5}{2}\right)$

Câu 23. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x}{1-x}$ cắt đường thẳng $y=x-m$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0 (với O là gốc tọa độ)?

Trả lời: ....

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x}{1-x}=x-m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x^2-mx+m=0 \end{cases} \quad (*)$

Để có hia điểm phân biệt A,B thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\begin{cases}1-m+m\neq 0\\ m^2-4m>0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>4\\ m<0\end{array}\right.$$

Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm phân biết x_1,x_2 thỏa mãn:

$$\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1x_2=m\end{cases}$$

Giả sử $A(x_1;x_1-m),B(x_2;x_2-m)$, suy ra: $\overrightarrow{OA}(x_1;x_1-m),\overrightarrow{OB}(x_2;x_2-m)$

Theo giả thiết góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0 suy ra:

$$\cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\cos 60^0\Leftrightarrow \frac{|x_1x_2+(x_1-m)(x_2-m)|}{\sqrt{x_1^2+(x_1-m)^2}\sqrt{x_2^2+(x_2-m)^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2|}{\sqrt{x_1^2x_2^2+(x_1x_2-mx_2)^2+x_1^2(x_1x_2-m)^2+[(x_1-m)(x_2-m)]^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2m-m^2+m^2|}{\sqrt{m^2+(m-mx_2)^2+(m-mx_1)^2+[x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2]^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2m|}{\sqrt{m^2+(m-mx_2)^2+(m-mx_1)^2+[m-m^2+m^2]^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2+(1-x_2)^2+(1-x_1)^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2+(1-x_2)^2+(1-x_1)^2=16$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2(x_1+x_2)=12$$

$$\Leftrightarrow m^2-4m-12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=6\\ m=-2\end{array}\right.$$

Câu 24. **(THPT Lương Tài Số 2 2019)** Biết rằng đường thẳng $y=2x+2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt *A, B* với mọi giá trị của tham số *m*. Tìm hoành độ trung điểm của *AB*?

Trả lời: ....

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$\dfrac{x^2+3}{x+1}=2x+2m \Leftrightarrow x^2+2(1+m)x+2m-3=0$ (1), ($x\neq -1$).

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' =(1+m)^2-(2m-3)>0\\ (-1)^2+2(1+m).(-1)+2m-3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4>0,\ \forall m\\ -4\neq 0\end{cases}.$$

Khi đó, gọi $A(x_1;2x_1+2m)$; $B(x_2;2x_2+2m)$

Hoành độ trung điểm của *AB* là $x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{2+2m}{2}=-m-1$.

Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m^2-2m-4}{x-2}$ (1).
Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $\Delta: 2x+y+1=0$.

Trả lời: ....

Lời giải

Đạo hàm: $y'=\dfrac{x^2-4x+4-m^2}{(x-2)^2}$.

Dấu của y' là dấu của $g(x)=x^2-4x+4-m^2$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình g(x) = 0 có hai nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\Delta'=4-4+m^2=m^2>0\\ 4-8+4-m^2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m\neq 0$.

Nghiệm của $g(x)=0$ là $x_1=2-m$, $x_2=2+m$, suy ra hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(2-m;\ 4-m)$, $B(2+m;\ 4+3m)$

$d(A,\Delta)=\dfrac{|9-3m|}{\sqrt{5}}$, $d(B,\Delta)=\dfrac{|9+5m|}{\sqrt{5}}$.

$$d(A,\Delta)=d(B,\Delta) \Leftrightarrow |9-3m|=|9+5m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}9-3m=9+5m\\ 9-3m=-9-5m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=-9\end{array}\right.$$

So với điều kiện $m\neq 0$ nhận $m=-9$.

Câu 26. Tìm m để đường thẳng $y=-2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$ tại hai điểm A,B sao cho trung điểm đoạn AB thuộc Oy.
Trả lời: ....

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $3x^2+(1-m)x-1=0\ \ (x\neq 0)$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khác 0 với mọi m

Hoành độ trung điểm I của AB: $x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{m-1}{6}$

$I\in Oy\Leftrightarrow x_I=0\Leftrightarrow \dfrac{m-1}{6}=0\Leftrightarrow m=1$.

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=\sqrt{6}$.

Trả lời: ....

Lời giải

Tọa độ A,B thỏa: $\dfrac{x^2-1}{x}=-x+m\Leftrightarrow 2x^2-mx-1=0,\ (x\neq 0)$ (1)

Ta thấy (1) có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 khác 0 với mọi m.

Gọi $A(x_1;y_1),\ B(x_2;y_2)\Rightarrow AB^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=2(x_1-x_2)^2$

Áp dụng định lí viet cho phương trình (1) ta có được:

$AB^2=2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=\dfrac{m^2}{2}+4$, $AB=6\Leftrightarrow \dfrac{m^2}{2}+4=6\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 28. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{2x-m^2}{x+1}$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d:y=m-x$ cắt (C_m) tại hai điểm $A(x_A;y_A),B(x_B;y_B)$ với $x_A<x_B$; đường thẳng $d':y=2-m-x$ cắt (C_m) tại hai điểm $C(x_C;y_C),D(x_D;y_D)$ với $x_C<x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_A.x_D=-3$. Số phần tử của tập S là

Trả lời: ....

Lời giải

Hoành độ điểm A và B là nghiệm phương trình: $2x-m^2=(x+1)(m-x)$

$\Leftrightarrow x^2+(3-m)x-m^2-m=0$ suy ra $x_A.x_B=-m^2-m;x_A+x_B=m-3$

Hoành độ điểm C và D là nghiệm phương trình: $2x-m^2=(x+1)(2-m-x)$

$\Leftrightarrow x^2+(m+1)x-m^2+m-2=0$ suy ra $x_C.x_D=-m^2+m-2;x_C+x_D=-m-1$

Mặc khác x_A và x_D là nghiệm của phương trình: $x^2-2x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_A=-3\\x_D=1\end{array}\right.$. Suy ra

$m^2+6m+9=5m^2-2m+9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$.

Câu 29. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1): y = \left|2 + \dfrac{2}{x - 10}\right|$ và $(C_2): y = \sqrt{4x - m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?

Trả lời: ....

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 10 \\ x \geq \dfrac{m}{4} \end{cases}$.

Xét trên $(0; +\infty) \setminus \{10\}$, phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là

$$\left|2 + \frac{2}{x - 10}\right| = \sqrt{4x - m} \Leftrightarrow m = 4x - \left(\frac{2x - 18}{x - 10}\right)^2.$$

Đặt $g(x) = 4x - \left(\dfrac{2x - 18}{x - 10}\right)^2$ với $x \in (0; +\infty) \setminus \{10\}$.

Ta có: $g'(x) = 4\left(1 + \dfrac{2x - 18}{(x - 10)^3}\right)$; $g''(x) = \dfrac{-4x + 34}{(x - 10)^4}$.

$g'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0		$\frac{17}{2}$		10		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$g'(x)$	$4{,}072$	$\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	0

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $\alpha \in \left(\dfrac{17}{2}; 10\right)$. Lại có $g'(9{,}22) > 0$ nên $\alpha \in (9{,}22; 10)$. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0; +\infty) \setminus \{10\}$:

x	0		9		α		10		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$g(x)$	$\frac{-81}{25}$	$\nearrow$	36	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$ $-\infty$	||	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra phương trình $m = g(x)$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\dfrac{-81}{25} < m < g(\alpha)$.

Trên khoảng $(9,22;10)$ thì $\begin{cases} 4x < 40 \\ 3 < \left(\dfrac{2x-18}{x-10}\right)^2 \end{cases}$ nên $g(x) < 37 \Rightarrow g(a) \in (36;37)$.

Vậy những giá trị m nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1; 2; 3; …; 36 hay có 36 giá trị của m cần tìm.

Câu 30. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y = \dfrac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3}$ (C) và đường thẳng $(d): y = 2x$ (m là tham số thực). Số giá trị nguyên của $m \in [-15;15]$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt là

Trả lời: ....

Lời giải

Xét pt hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$\frac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3} = 2x \Leftrightarrow (x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m = 2x^2 - 6x \ (x \neq 3)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + m)^2 = 2x^2 - 3x + m \ (x \neq 3) \ \ (*)$$

Đặt: $x^2 - 2x + m = t$ ta được hệ: $\begin{cases} x^2 - 2x + m = t \\ t^2 = 2x^2 - 3x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - t + m = 0 \\ 2x^2 - t^2 - 3x + m = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^2 - t^2 - x + t = 0 \Rightarrow (x - t)(x + t - 1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = x \\ t = 1 - x \end{array}\right.$$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + m = x \\ x^2 - 2x + m = 1 - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + m = 0 \ (1) \\ x^2 - x + m - 1 = 0 \ (2) \end{array}\right.$

YCBT $\Leftrightarrow (*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow (1), (2)$ đều phải có hai nghiệm pb khác 3 và các nghiệm của chúng không trùng nhau.

- $(1), (2)$ đều có hai nghiệm pb khác 3 khi: $\begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ 3^3 - 3.3 + m \neq 0 \\ 1 - 4(m-1) > 0 \\ 3^2 - 3 + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{9}{4} \\ m \neq 0 \\ m < \dfrac{5}{4} \\ m \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1,25 \\ m \neq 0 \\ m \neq -5 \end{cases} \ (**)$

- $(1), (2)$ không có nghiệm trùng nhau $\Leftrightarrow$ Hệ: $\begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 \\ x^2 - x + m - 1 = 0 \end{cases}$ Vô nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x^2 - 3x + m = 0 \end{cases}$ Vô nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x^2 - 3x + m = 0 \end{cases}$ Vô nghiệm

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 3.\left(\dfrac{1}{2}\right) + m \neq 0$

$\Leftrightarrow m \neq \dfrac{5}{4}$ $(***)$

Vậy số giá trị nguyên của $m \in [-15;15]$ đồng thời thỏa mãn $(**)$ và $(***)$ là 15.

Câu 31. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng - 2021)** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 2}{2x+1}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $2021 f\left(\sqrt{3x^2 - 18x + 28}\right) - m\sqrt{3x^2 - 18x + 28} \geq m + 4042$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[2;4]$.

Trả lời: ....

Lời giải

◆ Đặt $u = \sqrt{3x^2 - 18x + 28} = \sqrt{3(x-3)^2 + 1} = \sqrt{3(x-2)(x-4) + 4}$ do đó ta có với $\forall x \in [2;4]$ thì $u \in [1;2]$.

◆ Biến đổi BPT ta được $2021 f(u) - m.u \geq m + 4042 \Leftrightarrow 2021\left[f(u) - 2\right] \geq m(u+1)$.

◆ Ta có $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 2}{2x+1}$ nên $f(u) - 2 = \dfrac{u^2 + 5u + 2}{2u+1} - 2 = \dfrac{u^2 + u}{2u+1}$ do vậy bất phương trình được biến đổi tiếp $\dfrac{2021\left(u^2 + u\right)}{2u+1} \geq m(u+1) \Leftrightarrow m \leq \dfrac{2021u}{2u+1}$.

◆ Lúc này yêu cầu bài toán tương đương $m \leq \dfrac{2021u}{2u+1}, \forall u \in [1;2] \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{u \in [1;2]} g(u)$.

◆ Xét hàm số $g(u) = \dfrac{2021u}{2u+1}, u \in [1;2]$ ta có $g'(u) = \dfrac{2021}{(2u+1)^2} > 0, \forall u \in [1;2]$ do vậy hàm số $g(u)$ tăng trên đoạn $[1;2]$. Vì vậy $\min\limits_{u \in [1;2]} g(u) = \dfrac{2021u}{2u+1} = g(1) = \dfrac{2021}{3}$.

◆ Kết hợp với m là các số nguyên dương ta được $m \in \{1;2;3;...;673\}$.

Vậy tìm được 673 số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.