NGUYỄN CÔNG LỢI

CHUYÊN ĐỀ CÁC BÀI TOÁN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ HÌNH HỌC

(CÓ ĐÁP ÁN VÀ GIẢI CHI TIẾT)

Dành cho lớp 7,8,9

TỦ SÁCH LUYỆN THI

NGUYỄN CÔNG LỢI

CHUYÊN ĐỀ CÁC BÀI TOÁN
VỀ BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ HÌNH HỌC

LỜI NÓI ĐẦU

*Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh về các chuyên đề toán THCS, **Tủ sách luyện thi** giới thiệu đến thầy cô và các em chuyên đề về các bài toán về bất đẳng thức và cực trị hình học. Chúng tôi đã kham khảo qua nhiều tài liệu để viết chuyên đề về này nhằm đáp ứng nhu cầu về tài liệu hay và cập nhật được các dạng toán mới về bất đẳng thức và cực trị hình học thường được ra trong các kì thi gần đây. Chuyên đề gồm 4 phần:*

- *Hệ thông kiến thức cần nhớ*
- *Các thí dụ minh họa*
- *Bài tập tự luyện*
- *Hướng dẫn giải*

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng có thể dùng chuyên đề này để giúp con em mình học tập. Hy vọng chuyên đề bất đẳng thức và cực trị hình học này có thể giúp ích nhiều cho học sinh phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian, trí tuệ song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ chuyên đề này!

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN
VỀ BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ HÌNH HỌC

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác

Định lí 1: Cho tam giác ABC. Nếu $ABC \ge ACB$ thì $AC \ge AB$ và ngược lại.

Định lí 2: Cho hai tam giác ABC và MNP có $AB = MN$ và $AC = MP$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$BAC \ge NMP \Leftrightarrow BC \ge NP$$

Định lí 3: Trong tam giác ABC ta có:

+ Nếu $A = 90^0$ thì $BC^2 = AB^2 + AC^2$

+ Nếu $A > 90^0$ thì $BC^2 > AB^2 + AC^2$

+ Nếu $A < 90^0$ thì $BC^2 < AB^2 + AC^2$

Định lí 4: Với mọi tam giác ABC ta luôn có: $\begin{cases} |AB - AC| < BC < AB + AC \\ |AC - BC| < AB < AC + BC \\ |BC - AB| < AC < BC + AB \end{cases}$

Hệ quả: Cho n điểm $A_1; A_2; A_3; ...; A_n$. Khi đó ta luôn có $A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n \ge A_1A_n$

Dấu bằng xẩy ra n điểm $A_1; A_2; A_3; ...; A_n$ thẳng hàng và sắp xếp theo thứ tự đó.

Định lí 5: Cho tam giác ABC và M là trung điểm của BC. Khi đó ta có

+ Nếu $A = 90^0$ thì $AM = \frac{1}{2}BC$

+ Nếu $A > 90^0$ thì $AM < \frac{1}{2}BC$

+ Nếu $A < 90^0$ thì $AM > \frac{1}{2}BC$

2. Quan hệ giữa đường xiên, đường vuông góc và hình chiếu của đường xiên.

Định lí 1: Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất.

Định lí 2: Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:

- Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn
- Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn

- Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau, và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

3. Các bất đẳng thức trong đường tròn.

Định lí 1: Trong một đường tròn thì đường kính là dây lớn nhất.

Định lí 2: Trong một đường tròn:

- Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm và ngược lại.
- Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn và ngược lại.

Định lí 3: Bán kính của hai đường tròn là $R \ge r$, còn khoảng cách giữa tâm của chúng là d. Điều kiện cần và đủ để hai đường tròn đó cắt nhau là $R - r \le d \le R + r$

Định lí 4: Cho đường tròn (O; R) và một điểm M bất kì nằm trong đường tròn. Khi đó ta có

$$R - d \le MN \le R + d$$

Với N là điểm bất kì trên đường tròn và d là khoảng cách từ M tới tâm đường tròn.

Định lí 5: Cho đường tròn (O; R) và một điểm M bất kì ngoài đường tròn. Khi đó ta có

$$d - R \le MN \le d + R$$

Với N là điểm bất kì trên đường tròn và d là khoảng cách từ M tới tâm đường tròn.

4. Các bất đẳng thức về diện tích.

Định lí 1: Với mọi tam giác ABC ta luôn có $S_{ABC} \le \frac{1}{2}AB.AC$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tam giác ABC vuông tại A

Định lí 2 : Với mọi tứ giác ABC ta luôn có $S_{ABCD} \le \frac{1}{2}AC.BD$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi AC vuông góc với BD.

Định lí 3: Với mọi tứ giác ABCD ta luôn có $S_{ABCD} \le \frac{1}{2}\left(AB.BC + AD.DC\right)$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $B = D = 90^0$.

5. Một số bất đẳng thức đại số thường dùng

- Với x, y là các số thực dương , ta luôn có

$$x^2 + y^2 \ge 2xy;\ 2\left(x^2 + y^2\right) \ge \left(x + y\right)^2$$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x = y$

- Với x, y, z là các số thực dương , ta luôn có

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

- Bất đẳng thức Cauchy: Với x, y, z là các số thực dương , ta luôn có

$$\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y$.

$$\frac{x+y+z}{3}\ge\sqrt[3]{xyz}$$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

- Bất đẳng thức Bunhiacopxki. Với a, b, c và x, y, z là các số thực, ta luôn có

$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\ge\left(ax+by\right)^2$$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge\left(ay+by+cz\right)^2$$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

II.CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh rằng tổng độ dài ba đường trung tuyến của một tam giác lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi và nhỏ hơn chu vi của tam giác ấy.

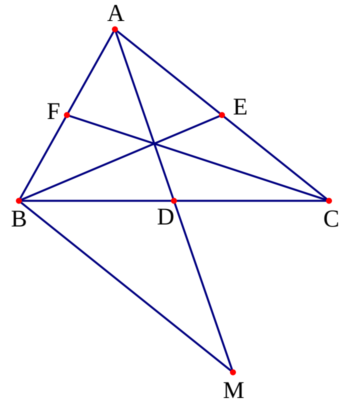
Phân tích tìm lời giải

Trên cở sở hình vẽ, ta cần chứng minh $\frac{3}{4}\left(AB+BC+CA\right)<AD+BE+CF<AB+BC+CA$.

Lấy điểm M trên tia đối của tia DA sao cho $DA=\frac{1}{2}AM$, khi đó theo ta được $2AD<AB+AC$. Hoàn toàn tương tự ta được $AD+BE+CF<AB+BC+CA$.

Ta cần chứng minh được $\frac{3}{4}\left(AB+BC+CA\right)<AD+BE+CF$. Chú ý rằng G là trọng tâm tam giác nên từ $BG+GC>BC$ ta được $BE+CF>\frac{3}{2}BC$. Đến đây áp dụng tương tự và cộng theo vế các bất đẳng thức ta được điều phải chứng minh.

Lời giải



Xét tam giác ABC có ba đường trung tuyến là AD, BE, CF.

Trước hết ta chứng minh $2AD < AB + AC$. Thật vậy, trên tia đối của tia DA lấy điểm M sao cho D là trung điểm của AM, khi đó ta được $AC = BM$ và $AM = 2AD$. Trong tam giác ABM có $AM < AB + BM$ do đó ta được $2AD < AB + AC$

Tương tự ta được $2BE = BC + AB; \ 2CF = CA + BC$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$2\left(AD + BE + CF\right) < 2\left(AB + BC + CA\right)$$

Hay $AD + BE + CF < AB + BC + CA$

Trong tam giác BGC có $BG + GC > BC$ mà $BG = \frac{2}{3}BE$ và $CG = \frac{2}{3}CF$

Nên $\frac{2}{3}BE + \frac{2}{3}CF > BC \Leftrightarrow BE + CF > \frac{3}{2}BC$. Tương tự $CF + AD > \frac{3}{2}AC; \ AD + BE > \frac{3}{2}AB$

Cộng các bất đẳng thức vế theo vế ta có

$$2\left(AD + BE + CF\right) > \frac{3}{2}\left(AB + BC + CA\right) \Leftrightarrow AD + BE + CE > \frac{3}{4}\left(AB + BC + CA\right).$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta được $\frac{3}{4}\left(AB + BC + CA\right) < AD + BE + CF < AB + BC + CA$

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC có các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại I. Chứng minh rằng các đoạn thẳng ID, IE, IF là độ dài ba cạnh của một tam giác.

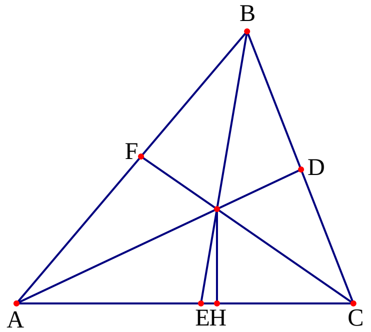
Phân tích tìm lời giải

Để chứng minh các đoạn thẳng ID, IE, IF là độ dài ba cạnh của một tam giác. Ta cần chứng minh được các bất đẳng thức $IE + FI > DI; EI + DI > FI; DI + FI > EI$. Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC và vẽ IH vuông góc với AC tại H suy ra $IH = r$.

Chú ý là $EIH < 45^0$ nên trong tam giác vuông góc EIH nhỏ nhất nên $EH < IH = r$. Từ đó suy ra $r^2 \le IE^2 < 2r^2$. Hoàn toàn tương tự thì ta được $DI^2 < EI^2 + FI^2; EI^2 < FI^2 + DI^2; FI^2 < DI^2 + EI^2$. Đến đây ta được các bất đẳng thức như trên.

Lời giải

Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC, vẽ IH vuông góc với AC tại H suy ra $IH = r$.



Ta cần chứng minh được ba bất đẳng thức $IE + FI > DI; EI + DI > FI; DI + FI > EI$

Thật vậy, trong tam giác vuông IEH có

$$EIH = 90^0 - IEH < 90^0 - IEH + \left(90^0 - ECB\right)$$
$$= 180^0 - IEH - ECB = EBC < \frac{1}{2}.90^0$$

Do đó trong tam giác vuông IEH thì góc EIH nhỏ nhất. Khi đó ta được $EH < IH = r$.

Mặt khác theo định lí Pitago ta có $IE^2 = IH^2 + EH^2$ mà lại có $OH = r; HE < r$ nên suy ra $IE^2 < 2r^2$

Từ đó ta được $r^2 \le IE^2 < 2r^2$. Chứng minh tương tự ta được $r^2 \le ID^2 < 2r^2; r^2 \le IF^2 < 2r^2$

Từ các bất đẳng thức trên ta thu được $DI^2 < EI^2 + FI^2; EI^2 < FI^2 + DI^2; FI^2 < DI^2 + EI^2$

Do đó $IE + FI > DI; EI + DI > FI; DI + FI > EI$ hay DI, EI, FI là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC và điểm M bất kì nằm trong tam giác. Chứng minh rằng:

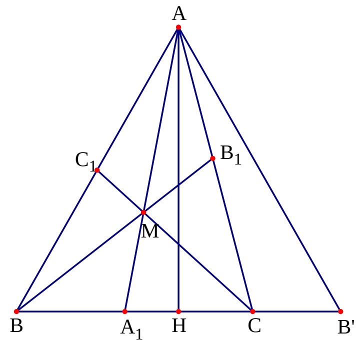
$$MA.BC + MB.CA + MC.AB < 2Max\left\{AB.AC; BC.CA; CA.AB\right\}$$

Phân tích tìm lời giải

Gọi A_1 lần lượt là giao điểm của AM với BC. Khi đó ta thấy $AA_1 < AB = Max\left\{AB; AC\right\}$. Do đó ta được $AA_1.BC < BC.Max\left\{AB; AC\right\} < Max\left\{AB.BC; AC.BC; AB.AC\right\}$. Từ đó suy ra được bất đẳng thức $MA.BC = \frac{MA}{AA_1}.AA_1.BC < \frac{MA}{AA_1}.Max\left\{AB.BC; AC.BC; AB.AC\right\}$. Áp dụng hoàn toàn tương tự và chú ý đến một đẳng thức quen thuộc $\frac{MA}{AA_1} + \frac{MB}{BB_1} + \frac{MC}{CC_1} = 2$ ta có điều phải chứng minh.

Lời giải

Gọi $A_1; B_1; C_1$ lần lượt là giao điểm của AM, BM, CM với BC, CA, AB. Tia AM nằm giữa hai tia AB và AC nên A_1 nằm giữa hai điểm B và C. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Giả sử $AB \ge AC$ nên ta được $BC \ge CH$. Gọi B′ là điểm đối xứng với B qua H, suy ra C thuộc đoạn BB′. Mà A_1 thuộc đoạn BB′ nên $A_1H < BH$. Từ đó suy ra



$AA_1 < AB = \text{Max}\{AB; AC\}$

Suy ra $AA_1.BC < BC.\text{Max}\{AB; AC\} = \text{Max}\{AB.BC; AC.BC\} < \text{Max}\{AB.BC; AC.BC; AB.AC\}$

Đặt $x = \text{Max}\{AB.BC; AC.BC; AB.AC\}$, khi đó ta được $MA.BC = \dfrac{MA}{AA_1}.AA_1.BC < \dfrac{MA}{AA_1}.x$

Hoàn toàn tương tự ta được $MB.CA < \dfrac{MB}{BB_1}.x$; $MC.AB < \dfrac{MC}{CC_1}.x$

Mặt khác ta có $S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCA} = S_{ABC}$ nên ta được $\dfrac{MA_1}{AA_1} + \dfrac{MB_1}{BB_1} + \dfrac{MC_1}{CC_1} = 1$

Từ đó ta được $\dfrac{MA}{AA_1} + \dfrac{MB}{BB_1} + \dfrac{MC}{CC_1} = 2$. Do đó ta được $MA.BC + MB.CA + MC.AB < 2x$

Vậy ta được $MA.BC + MB.CA + MC.AB < 2\text{Max}\{AB.AC; BC.CA; CA.AB\}$.

Ví dụ 4. Cho tứ giác ABCD và một điểm M thuộc miền tứ giác. Chứng minh rằng:

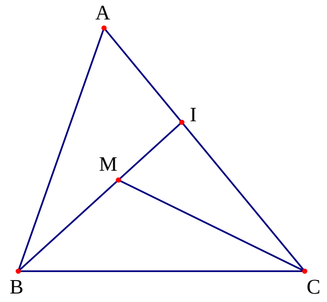
$$MB + MC \le \text{Max}\{AB + AC;\ DB + DC\}$$

Phân tích tìm lời giải

Với điểm M thuộc miền tứ giác ABCD, khi đó xẩy ra hai trường hợp là M thuộc một cạnh của tứ giác hoặc M thuộc miền trong của tứ giác. Với điểm M thuộc một cạnh của tứ giác, chẳng hạn điểm M thuộc đoạn AD, ta cần chứng minh $MB + MC \le DB + DC$ hoặc $MB + MC \le AC + AC$. Với điểm M nằm miền trong tam giác, lấy điểm N trên AD để được $MB + MC \le NB + NC$ và quy bài toán về chứng minh tương tự như trường hợp thứ nhất.

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề: Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì nằm trong tam giác, khi đó ta luôn có



$$MB+MC\le AB+AC$$

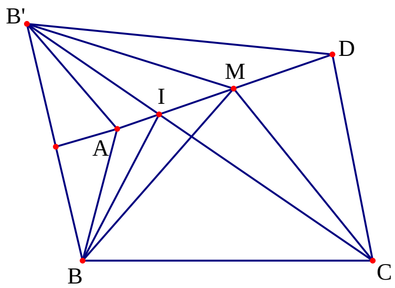
Thật vậy, gọi giao điểm của BM với AC là I khi đó ta có

$$\begin{aligned}AB+AC&=AB+AI+CI\ge BI+CI\\&=BM+IM+CI\ge BM+CM\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán: Với điểm M thuộc miền tứ giác ABCD, khi đó xẩy ra hai trường hợp là M thuộc một cạnh của tứ giác hoặc M thuộc miền trong của tứ giác. Do đó ta xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Điểm M thuộc một cạnh của tứ giác, không mất tính tổng quát ta giả sử điểm M nằm trên đoạn thẳng AD. Gọi B′ là điểm đối xứng với điểm B qua AD. Vì hai điểm B, C nằm về một phía so với AD nên B′, C nằm về hai phía so với AD. Suy ra hai đoạn thẳng B′C và AD cắt nhau. Gọi I là giao điểm của B′C với AD.

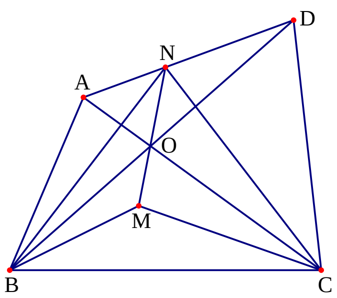


Do M thuộc đoạn AD nên I thuộc tia MA hoặc tia MD.

Khi đó theo bổ đề trên ta được $MB+MC\le DB+DC$ hoặc $MB+MC\le AC+AC$

Từ đó ta được $MB+MC\le Max\left\{AB+AC;\ DB+DC\right\}$

+ Trường hợp 2: Điểm M thuộc miền trong cả tứ giác. Khi đó gọi O là giao điểm của hai đương chéo thì điểm M thuộc một trong các tam giác OAD, OBC, OCD, ODA. Tùy theo vị trí của điểm M mà ta chọn điểm N trên đoạn AD sao cho theo bổ đề trên ta luôn có $MB+MC\le NB+NC$. Mà theo trường hợp 1 thì ta có $NB+NC\le Max\left\{AB+AC;DB+DC\right\}$



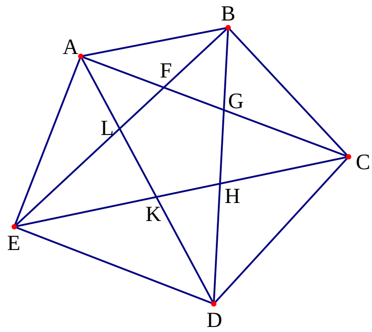
Từ đó ta được $MB+MC\le Max\left\{AB+AC;\ DB+DC\right\}$

Nếu $AB+AC\ge DB+DC$ thì dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai điểm A và M trùng nhau

Nếu $AB+AC\le DB+DC$ thì dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi hai điểm D và M trùng nhau

Ví dụ 5. Chứng minh rằng tổng độ dài các đường chéo của ngũ giác lồi ABCDE lớn hơn chu vi nhưng nhỏ hơn hai lần chu vi của ngũ giác ABCDE.

Lời giải



Gọi p là chu vi của ngũ giác lồi ABCDE, khi đó ta có

$$p=AB+BC+CD+DE+EA$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác cho các tam giác ABE, ABC, BCD, DEC, EAD ta được

$$BE<AB+AE; AC<AB+BC$$
$$BD<BC+DE; EC<CD+DE$$
$$AD<AE+DE$$

Từ đó suy ra

$$BE+AC+BD+EC+DA<2\left(AB+BC+CD+DE+EA\right)$$

Hay ta được $BE+AC+BD+EC+DA<2p$

Gọi giao điểm của AC với BE, BG lần lượt là F, G. Gọi giao điểm của AD với EB, EC lần lượt là L, K. Hai đường chéo EC và BD cắt nhau tại H. Khi đó áp dụng bất đẳng thức tam giác cho các tam giác ABF, BCG, CDH, DEK, EAL ta được

$$AB<AF+BF; BC<BG+GC; CD<CH+HD; DE<DK+KE; EA<EL+LA$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned}&AB+BC+CD+DE+EA<AF+BF+BG+GC+CH+HD+DK+KE+EL+LA\\&=\left(BF+EL\right)+\left(AF+CG\right)+\left(BG+HD\right)+\left(EK+HC\right)+\left(AL+DK\right)\\&<BE+AC+BD+EC+AD\end{aligned}$$

Hay ta được $p<BE+AC+BD+EC+AD$

Vậy ta được $p<BE+AC+BD+EC+AD<2p$

Ví dụ 6. Cho hình chữ nhật ABCD.

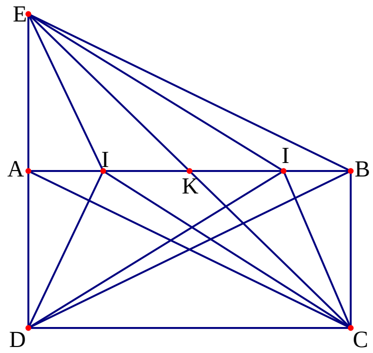
a) Chứng minh rằng nếu điểm I thuộc đoạn AB thì $IC+ID\le AC+AD$, dấu bằng xẩy ra khi nào ?

b) Tìm điểm O nằm bên trong hoặc trên cạnh của hình chữ nhật ABCD thỏa mãn điều kiện tổng $OA+OB+OC+OD$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Đặt

$AB = CD = a; AD = BC = b; AC = BD = d = \sqrt{a^2 + b^2}$



a) Ta chứng minh $IC + ID \le d + b$

Gọi E là điểm đối xứng với D qua A, khi đó tứ giác AEBC là hình bình hành, nên AB và CE cắt nhau tại trung điểm K của mỗi đoạn. Lại có $IE = TD$. Có hai trường hợp xẩy ra

+ Trường hợp điểm I thuộc đoạn AK, khi đó tam giác AEC chứa tam giác IEC nên ta được

$$IC + ID = IC + IE \le AC + AE = AC + AD$$

Từ đó ta được $IC + ID \le AD + AC$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi hai điểm I và A trùng nhau.

+ Trường hợp điểm I thuộc đoạn KB, khi đó ta giác BEC chứa tam giác IEC nên ta được

$$IC + ID = IC + IE \le BC + BE = AD + AC$$

Từ đó ta được $IC + ID \le AD + AC$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi hai điểm I và B trùng nhau.

Vậy nếu điểm I thuộc cạnh AB thì ta luôn có $IC + ID \le AD + AC$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi điểm I trùng với A hoặc B.

b) Nếu điểm O trùng với một trong các đỉnh của hình chữ nhật ABCD thì ta được

$$OA + OB + OC + OD = a + b + d$$

Nếu điểm O không trùng với các đỉnh của hình chữ nhật ABCD, khi đó có hai trường hợp sau:

+ Trường hợp điểm O nằm trên các cạnh của hình chữ nhật ABCD, chẳng hạn O nằm trên cạnh AB và không trùng với A, B. Khi đó ta được

$$OA + OB + OC + OD = AB + OC + OD < AB + AC + AD = a + b + d$$

+ Trường hợp điểm O nằm trong hình chữ nhật ABCD, khi đó qua O kẻ đường thẳng song song với AB cắt AD, BC lần lượt tại M, N. Chứng minh tương tự ta được

$OA + OB < MA + MB; OC + OD < MB + MC$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} OA + OB + OC + OD &< MA + MB + MC + MD = AD + MB + MC \\ &< AD + AB + AC = a + b + d \end{aligned}$$

Vậy $OA + OB + OC + OD$ đạt giá trị lớn nhất bằng $a + b + d$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi điểm O trùng với một trong các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC và một điểm M thuộc tam giác. Chứng minh rằng:

$$MA.BC + MB.CA + MC.AB \ge 4S_{ABC}$$

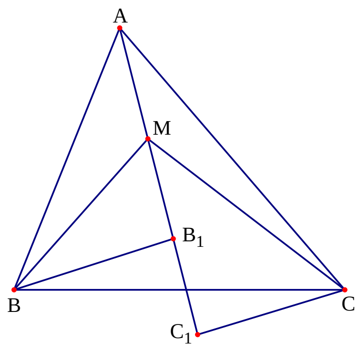
Phân tích tìm lời giải

Do tam giác ABC bất kì nên ta cần xét các trường hợp có thể xẩy ra của tam giác ABC. Với tam giác ABC nhọn hoặc vuông, chú ý là $S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCA}$ nên để chứng minh được bài toán ta cần biểu diễn được các tích theo diện tích $MA.BC; MB.CA; MC.AB$ theo diện tích các tam giác MAB, MBC, MCB. Kẻ $BB_1 \perp AM, CC_1 \perp AM$ thì ta được $S_{ABM} + S_{ACM} = \frac{1}{2}AM\left(BB_1 + CC_1\right) \le \frac{1}{2}AM.BC$. Đến đây áp dụng tương tự ta được điều phải chứng minh. Với tam giác ABC tù, chẳng hạn tù tại A thì ta lấy điểm B′ thỏa mãn $AB' \perp AC$, $AB' = AB$ và điểm M nằm trong tam giác AB′C. Khi đó ta cần chứng minh được $MA.BC + MB.CA + MC.AB \ge MA.B'C + MB'.CA + MC.AB' > 4S_{AB'C} > 4S_{ABC}$.

Lời giải

Ta xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Tam giác ABC không tù



Vẽ đường thẳng $BB_1 \perp AM, CC_1 \perp AM$. Khi đó ta có

$$S_{ABM} + S_{ACM} = \frac{1}{2}AM.BB_1 + \frac{1}{2}AM.CC_1$$
$$= \frac{1}{2}AM\left(BB_1 + CC_1\right) \le \frac{1}{2}AM.BC$$

Dấu bằng xảy ra khi khi và chỉ khi $AM \perp BC$

Hoàn toàn tương tự ta được

$S_{BCM} + S_{ABM} \le \frac{1}{2}BM.AC$. Dấu bằng xẩy ra khi $BM \perp AC$

$S_{\Delta BCM} + S_{\Delta ACM} \le \frac{1}{2}CM.AB$. Dấu bằng xảy ra khi $CM \perp AB$

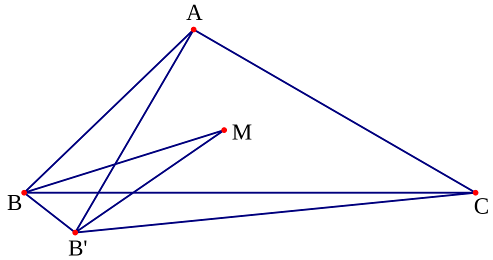
Cộng từng vế của các bất đẳng thức ta được

$$2\left(S_{ABM} + S_{ACM} + S_{BCM}\right) \le \frac{1}{2}\left(MA.BC + MB.AC + MC.AB\right)$$

Hay ta được $MA.BC + MB.AC + MC.AB \ge 4S_{ABC}$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $AM \perp BC, MB \perp AC, MC \perp BC$ hay M là trực tâm của tam giác ABC

+ Trường hợp 2: Tam giác ABC là tam giác tù. Không mất tính tổng quát ta giả sử $A > 90^0$



Khi đó vẽ $AB' \perp AC$ và $AB' = AB$ như hình vẽ sao cho M nằm trong tam giác AB′C.

Ta có $ABB' = AB'B$ nên $MBB' < MB'B$ suy ra $MB > MB'$

Mà ta có $CB'B > CBB'$ nên ta được $CB > CB'$

Từ đó ta được $MA.BC + MB.CA + MC.AB \ge MA.B'C + MB'.CA + MC.AB'$

Tương tự trường hợp 1, trong tam giác AB′C có

$$MA.B'C + MB'.CA + MC.AB' \ge 4S_{AB'C} = 2AB'.AC = 2AB.AC$$

Từ đó ta được $MA.BC + MB.CA + MC.AB \ge 2AB.AC > 4S_{ABC}$

Vậy ta luôn có $MA.BC + MB.CA + MC.AB \ge 4S_{ABC}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC không tù và M là trực tam tam giác ABC.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC và D là một điểm nằm trên cạnh BC. Trên cạnh AB và AC lấy lần lượt các điểm N và M. Qua M và N kẻ các đường thẳng song song với AD cắt BC tại P và Q.

Chứng minh rằng $S_{MNPQ} \le \max\{S_{ABD}, S_{ACD}\}$

Phân tích tìm lời giải

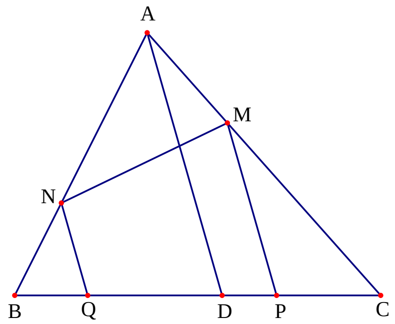
Do M và N nằm trên BC nên ta có $\dfrac{AM}{AC} = m < 1; \dfrac{AN}{AB} = n < 1$. Từ đó $\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{AN.AM}{AB.AC} = m.n$. Chú ý là $S_{MNQP} = S_{ABC} - S_{AMN} - S_{CMP} - S_{BNQ}$ nên để chứng minh được bài toán ta đi biểu diễn diện tích các tam giác CMP, BNQ theo m, n. Dễ thấy $\dfrac{MC}{AC} = \dfrac{CP}{CD} = 1 - m$ và $\dfrac{BN}{AB} = \dfrac{BQ}{BD} = 1 - n$ nên ta tính được $S_{CMP} = (1-m)^2 S_{ACD}$ và $S_{BNQ} = (1-n)^2 S_{BAD}$. Như vậy ta được

$$S_{MNQP} = (2m - mn - m^2)S_{CAD} + (2n - mn - n^2)S_{ABD}$$

Do đó ta được $S_{MNQP} \le \left[(2m - mn - m^2) + (2n - mn - n^2)\right].\max\{S_{CAD}, S_{ABD}\}$. Như vậy để kết thúc chứng minh ta cần chỉ ra được $(2m - mn - m^2) + (2n - mn - n^2) \le 1$.

Lời giải

Do M và N nằm trên BC nên ta có



$$\frac{AM}{AC}=m<1;\ \frac{AN}{AB}=n<1$$

Ta có $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\frac{AN.AM}{AB.AC}=m.n$ nên ta được

$S_{AMN}=m.n.S_{ABC}$

Do MP//AD nên ta có

$$\frac{MC}{AC}=\frac{CP}{CD}=\frac{AC-MC}{AC}=1-m$$

Tương tự ta có $\frac{BN}{AB}=\frac{BQ}{BD}=1-n$

Do đó ta được $S_{BNQ}=\frac{BN.BQ}{BD.BA}.S_{BAD};\ S_{CMP}=\frac{CM.CP}{AC.DC}.S_{CAD}$

Nên ta được $S_{CMP}=(1-m)^2S_{ACD}$ và $S_{BNQ}=(1-n)^2S_{BAD}$

Từ đó ta được $S_{MNQP}=S_{ABC}-S_{AMN}-S_{CMP}-S_{BNQ}=S_{ACD}+S_{BAD}-S_{AMN}-S_{CMP}-S_{BNQ}$

Suy ra

$$\begin{aligned}S_{MNQP}&=\left[(1-mn)-(1-m)^2\right]S_{CAD}+\left[(1-mn)-(1-n)^2\right]S_{ABD}\\&=\left(2m-mn-m^2\right)S_{CAD}+\left(2n-mn-n^2\right)S_{ABD}\end{aligned}$$

Do $2m-mn-m^2;\ 2n-mn-n^2$ là các số dương nên ta được

$$\begin{aligned}S_{MNQP}&\le\left[\left(2m-mn-m^2\right)+\left(2n-mn-n^2\right)\right].\max\left\{S_{CAD},S_{ABD}\right\}\\&=\left[1-(m+n-1)^2\right].\max\left\{S_{CAD},S_{ABD}\right\}\le\max\left\{S_{CAD},S_{ABD}\right\}\end{aligned}$$

Do $S_{MNPQ}=\max\left\{S_{ABD},S_{ACD}\right\}$ nên ta được $S_{ABD}=S_{ACD}$ và $m+n=1$

Suy ra ta được $CD=BD$ và $\frac{AM}{AC}+\frac{AN}{AB}=1$.

Ví dụ 9. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2\ge2\sqrt{3}S_{ABCD}+\frac{AC^2-BD^2}{2}$

Phân tích tìm lời giải

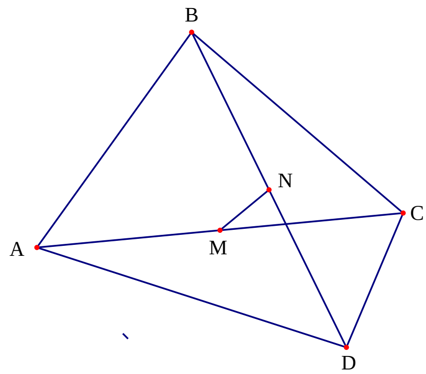
Giả sử trong tứ giác ABCD ta lấy M và N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Khi đó theo công thức về đường trung tuyến cho các tam giác ABC, ADC, MBD ta được $4BM^2=2\left(AB^2+BC^2\right)-AC^2$, $4DM^2=2\left(AD^2+DC^2\right)-AC^2$ và $4MN^2=2\left(BM^2+DM^2\right)-BD^2$. Từ đó ta thu được đẳng thức $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2$. Như vậy để chứng minh bất đẳng thức của bài toán ta cần chỉ ra được $AC^2+BD^2+4MN^2 \ge \sqrt{3}.S_{ABCD}+\dfrac{AC^2-BD^2}{2}$. Chú ý đến $S_{ABCD} \le \dfrac{1}{2}AC.BD$ và $AC^2+BD^2+4MN^2 \ge AC^2+BD^2$. Kết hợp hai bất đẳng thức trên với đánh giá sau

$$AC^2+BD^2=\frac{AC^2}{2}+\frac{3BD^2}{2}+\frac{AC^2-BD^2}{2} \ge \sqrt{3}AC.BD+\frac{AC^2-BD^2}{2}$$

Đến đây thì bài toán xem như được chứng minh.

Lời giải

Giả sử trong tứ giác ABCD ta lấy M và N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Khi đó áp dụng tính chất đường trung tuyến ta có: Trong tam giác ABC có BM là đường trung tuyến nên $4BM^2=2\left(AB^2+BC^2\right)-AC^2$ và trong tam giác ADC có DM là đường trung tuyến nên



$$4DM^2=2\left(AD^2+DC^2\right)-AC^2$$

Do đó ta được

$$4BM^2+4DM^2=2\left(AB^2+BC^2+AD^2+DC^2\right)-2AC^2$$
$$\Leftrightarrow 2\left(BM^2+DM^2\right)=AB^2+BC^2+AD^2+DC^2-AC^2$$

Trong tam giác MBD có MN là đường trung tuyến nên $4MN^2=2\left(BM^2+DM^2\right)-BD^2$

Do đó ta được $4MN^2=2\left(BM^2+DM^2\right)-BD^2=AB^2+BC^2+AD^2+DC^2-AC^2-BD^2$

Hay $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2$

Khi đó ta được $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2 \ge AC^2+BD^2$

Mà ta có $AC^2+BD^2=\dfrac{AC^2}{2}+\dfrac{3BD^2}{2}+\dfrac{AC^2-BD^2}{2} \ge \sqrt{3}AC.BD+\dfrac{AC^2-BD^2}{2}$

Lại có $S_{ABCD} \le \dfrac{1}{2}AC.BD$ nên ta được $AC^2+BD^2 \ge 2\sqrt{3}S_{ABCD}+\dfrac{AC^2-BD^2}{2}$

Từ đó suy ra $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 \ge 2\sqrt{3}S_{ABCD}+\dfrac{AC^2-BD^2}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} M \equiv N \\ AC = \sqrt{3}BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Leftrightarrow$ Tứ giác ABCD là hình thoi có

$\begin{cases} A = C = 60^0 \\ B = D = 120^0 \end{cases}$

Nhận xét:

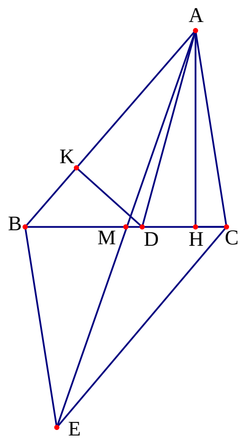
+ Ta có thể sử dụng bất đẳng thức $2MN \ge |AB - CD|$; $2MN \ge |AD - BC|$

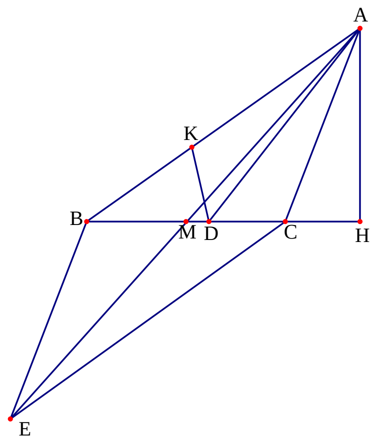
Khi đó ta có bất đẳng thức mạnh hơn là $(AB + CD)^2 + (AD + BC)^2 \ge 3\sqrt{3}S_{ABCD} + AC^2 - BD^2$

+ Ngoài ra nếu sử dụng bất đẳng thức trong tam giác $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3}.S$ *cũng cho ta kết quả cần chứng minh.*

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC có $AB > AC$. Đặt $AB = c; BC = a; CA = b$. Gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC và $l_a; m_a$ lần lượt là đường phân giác và đường trung tuyến hạ từ đỉnh A của tam giác ABC. Chứng minh rằng $p - a < l_a < m_a < \frac{1}{2}(b + c)$

Lời giải





Kéo dài AM lấy điểm E sao cho $ME = MA$, khi đó dễ dàng chứng minh được $\Delta AMC = \Delta EMB$

Từ đó ta được $AC = BE \Rightarrow 2AM = AE$

Theo bất đẳng thức tam giác ta có $AE < AB + BE = AB + AC = b + c$ nên ta được $AM < \frac{b + c}{2}$.

Lại có $AB < AD + BD$ và $AC < AD + DC$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $AB + AC < 2AD + BC \Rightarrow AB + AC - BC < 2AD$

Nên ta được $AD > \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{b + c - a}{2} = p - a$ hay $l_a > p - a$.

Hạ AH vuông góc với BC tại H. Do $AB > AC$ nên ta được $BH > CH$ suy ra $BM < BH$ hay điểm M thuộc đoạn BH. Lại từ $AB > AC$ ta được $ADB > ACD \Rightarrow ADB > 90^0$ nên điểm D thuộc đoạn BH.

Trên cạnh AB lấy điểm K sao cho $AK = AC$, từ đó ta được $\Delta ADC = \Delta ADK$

Từ đó suy ra $DC = DK$ và $ACD = AKD$.

+ Nếu $ACB \le 90^0$ thì ta được $AKD \le 90^0$ nên $BKD \ge 90^0 \ge ACB > KBD$

Từ đó suy ra $BD > KD = CD \Rightarrow BM < BD \Rightarrow MH > DH$ nên $AM > AD$

+ Nếu $ACB > 90^0$ thì ta được $AKD > 90^0$ nên $BKD = ACH > ADC > ABC$

Từ đó suy ra $BD > KD = CD \Rightarrow BM < BD \Rightarrow MH < DH$ nên $AM > AD$

Vậy ta luôn có $AM > AD$ hay $m_a > l_a$

Kết hợp các kết quả trên ta được $p - a < l_a < m_a < \frac{1}{2}\left(b + c\right)$.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC có m_a, l_b, l_c và p theo thứ tự là độ dài đường trung tuyến hạ từ đỉnh A, độ dài đường phân giác trong hạ tứ đỉnh B, C và nửa chu vi của tam giác. Chứng minh rằng $m_a + l_b + l_c \le p\sqrt{3}$

Phân tích tìm lời giải

Bất đẳng thức liên quan đến $m_a; l_b; l_c$ và p nên ta sẽ biểu diễn $m_a; l_b; l_c$ theo p.

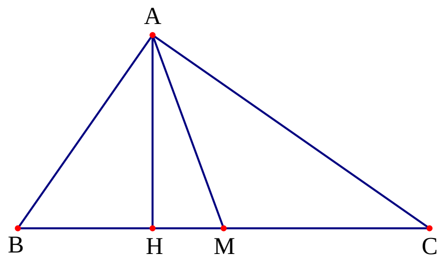
Theo công thức về đường phân giác ta có $l_b = \dfrac{2ca\cos\frac{B}{2}}{c + a} \le \sqrt{ca}.\cos\frac{B}{2} \Rightarrow l_b^2 \le ac.\cos^2\frac{B}{2}$, chú ý là $\cos^2\frac{B}{2} = \frac{1 + \cos B}{2}$ và $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ nên $l_b^2 \le \frac{ac}{2}\left(1 + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right) = p\left(p - b\right)$. Theo công thức đường trung tuyến ta có $4m_a^2 = \left(b + c + \sqrt{\left(p - b\right)\left(p - c\right)}\right)\left(b + c - \sqrt{\left(p - b\right)\left(p - c\right)}\right) \le 2p\left[2p - \left(\sqrt{p - a} - \sqrt{p - b}\right)^2\right]$. Từ đó ta được $\sqrt{p\left(p - b\right)} + \sqrt{p\left(p - c\right)} \le \sqrt{2\left(p^2 - m_a^2\right)}$ hay $l_b + l_c \le \sqrt{2\left(p^2 - m_a^2\right)}$. Đến đây bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $m_a + \sqrt{2\left(p^2 - m_a^2\right)} \le p\sqrt{3}$.

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề:

Với mọi $0 < \alpha < 45^0$ ta luôn có

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$



Thật vậy, xét tam giác ABC vuông tại A có $C = \alpha$ và đường cao AH, đường trung tuyến

AM. Trong tam giác AHM có

$$AHM = 90^0; AMH = 2\alpha \quad \cos 2\alpha = \frac{HM}{AM}$$

Do đó $1 + \cos 2\alpha = 1 + \frac{HM}{AM} = \frac{AM + HM}{AM} = \frac{CM + HM}{AM} = \frac{HC}{AM}$

Ta có $2\cos^2 \alpha = \left(\frac{CH}{AC}\right)^2 = \frac{2CH^2}{BC.CH} = \frac{2CH}{BC} = \frac{2CH}{2AM} = \frac{CH}{AM}$

Từ đó ta được $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán: Đặt $AB = c;\ BC = a;\ CA = b$, khi đó theo công thức về đường phân giác ta có

$$l_b = \frac{2ca\cos\frac{B}{2}}{c + a} \le \sqrt{ca}.\cos\frac{B}{2} \Rightarrow l_b^2 \le ac.\cos^2\frac{B}{2}$$

Áp dụng bổ đề trên ta có $\cos^2\frac{B}{2} = \frac{1 + \cos B}{2}$, từ đó ta được $l_b^2 \le ac\left(\frac{1 + \cos B}{2}\right)$

Mà theo công thức về đường trung tuyến ta có $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

Suy ra $l_b^2 \le \frac{ac}{2}\left(1 + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right) = p(p - b) \Rightarrow l_b \le \sqrt{p(p - a)}$. Tương tự ta có $l_c \le \sqrt{p(p - c)}$

Cũng theo công thức về đường trung tuyến ta có

$$\begin{aligned} 4m_a^2 &= 2b^2 + 2c^2 - a^2 = (b + c)^2 - \left[a^2 - (b - c)^2\right] \\ &= \left(b + c + \sqrt{(p - b)(p - c)}\right)\left(b + c - \sqrt{(p - b)(p - c)}\right) \end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có

$$b + c + 2\sqrt{(p - b)(p - c)} \le b + c + 2p - b - c = 2p$$

$$b + c - 2\sqrt{(p - b)(p - c)} = 2p - \left(\sqrt{p - b} + \sqrt{p - c}\right)^2$$

Do đó ta được $4m_a^2 \le 2p\left[2p - \left(\sqrt{p - a} - \sqrt{p - b}\right)^2\right] \Rightarrow \sqrt{p(p - b)} + \sqrt{p(p - c)} \le \sqrt{2(p^2 - m_a^2)}$

Suy ra $l_b + l_c \le \sqrt{2(p^2 - m_a^2)}$

Do đó ta được $m_a + l_b + l_c \le m_a + \sqrt{2(p^2 - m_a^2)} \le \sqrt{(1 + 2)(m_a^2 + p^2 - m_a^2)} = p\sqrt{3}$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 12. Cho tam giác nhọn ABC có h_a, h_b, h_c và l_a, l_b, l_c tương ứng là các đường cao và đường phân giác hạ từ đỉnh A, B, C. Gọi r và R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\left(\frac{h_a}{l_a} - \sin\frac{A}{2}\right)\left(\frac{h_b}{l_b} - \sin\frac{B}{2}\right)\left(\frac{h_c}{l_c} - \sin\frac{C}{2}\right) \le \frac{r}{4R}$

Phân tích tìm lời giải

Để chứng minh bất đẳng thức trên, ta đi tìm mối liên hệ của $\frac{h_a}{l_a} - \sin\frac{A}{2}$ với các cạnh của tam giác ABC. Để ý đến tam giác ABC ta được

$S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a$; $S_{ABA'} = \frac{1}{2}b.l_a.\sin\frac{A}{2}$; $S_{ACA'} = \frac{1}{2}c.l_a.\sin\frac{A}{2}$. Khi đó ta được

$\frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}(b+c)l_a.\sin\frac{A}{2} \Rightarrow \frac{h_a}{l_a} = \frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$. Từ đó $\frac{h_a}{l_a} - \sin\frac{A}{2} = \frac{2(p-a)}{a}.\sin\frac{A}{2}$. Từ đó

$\left(\frac{h_a}{l_a} - \sin\frac{A}{2}\right)\left(\frac{h_b}{l_b} - \sin\frac{B}{2}\right)\left(\frac{h_c}{l_c} - \sin\frac{C}{2}\right) \le \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. Để làm xuất hiện R và r ta chú ý đến các công thức $S_{ABC} = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Đến đây ta quy bài toán về chứng minh $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$, đây là một bất đẳng thức quen thuộc và ta xem như một bổ đề.

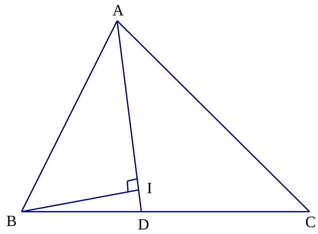
Lời giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề: Trong tam giác nhọn ABC ta luôn có $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$

Thật vậy, vẽ đường phân giác AD ta có $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{BD+CD}{AB+AC} = \frac{BC}{AB+AC}$.

Vẽ $BI \perp BC \Rightarrow BI \le BD$. Tam giác ABI có

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{BI}{AB} \le \frac{BD}{AB} = \frac{BC}{AB+AC} \le \frac{BC}{2\sqrt{AB.AC}}$$



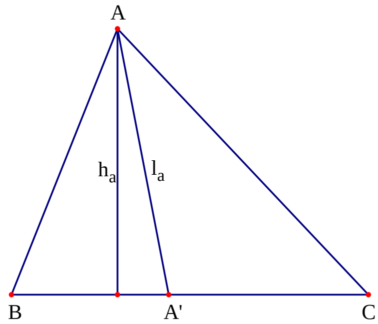
Chứng minh tương tự ta có

$$\sin\frac{B}{2} \le \frac{AC}{2\sqrt{AB.BC}};\quad \sin\frac{C}{2} \le \frac{AB}{2\sqrt{AC.BC}}$$

Nhân vế với vế của các bất đẳng thức trên ta được $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$

Gọi AA′ là đường phân giác hạ từ đỉnh A, gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC. Đặt

$AB = c;\ BC = a;\ CA = b$



Ta có $S_{ABC} = S_{ABA'} + S_{ACA'}$ mà ta lại có

$S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a$; $S_{ABA'} = \frac{1}{2}b.l_a.\sin\frac{A}{2}$; $S_{ACA'} = \frac{1}{2}c.l_a.\sin\frac{A}{2}$

Do đó $\frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}(b+c)l_a.\sin\frac{A}{2} \Rightarrow \frac{h_a}{l_a} = \frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$

Suy ra $\frac{h_a}{l_a} - \sin\frac{A}{2} = \left(\frac{b+c}{a} - 1\right)\sin\frac{A}{2} = \frac{b+c-a}{a}.\sin\frac{A}{2} = \frac{2(p-a)}{a}.\sin\frac{A}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{h_b}{l_b} - \sin\frac{B}{2} = \frac{2(p-b)}{b}.\sin\frac{B}{2}$; $\frac{h_c}{l_c} - \sin\frac{C}{2} = \frac{2(p-c)}{c}.\sin\frac{C}{2}$

Do đó ta được

$$\left(\frac{h_a}{l_a} - \sin\frac{A}{2}\right)\left(\frac{h_b}{l_b} - \sin\frac{B}{2}\right)\left(\frac{h_c}{l_c} - \sin\frac{C}{2}\right) = \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Mà theo bổ đề $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$ và theo các công thức về diện tích là $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$

Và công thức Heron $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ta được

$$\frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{S}{4Rp} = \frac{r}{4R}$$

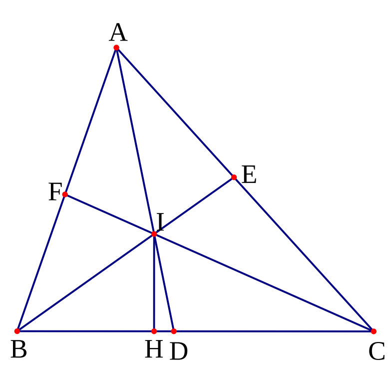
Do đó ta được $\left(\frac{h_a}{l_a} - \sin\frac{A}{2}\right)\left(\frac{h_b}{l_b} - \sin\frac{B}{2}\right)\left(\frac{h_c}{l_c} - \sin\frac{C}{2}\right) \le \frac{r}{4R}$

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC có các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại I. Gọi r là bán kính kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $AK + BK + CK \ge 6r$.

Phân tích tìm lời giải

Theo tính chất đường phân giác ta được $CD.c = b(BC - CD) \Rightarrow CD = \frac{a.b}{b+c}$. Mà CI là đường phân giác của tam giác ADC nên $\frac{AI}{DI} = \frac{AC}{CD} = \frac{b}{CD}$. Từ đó $\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$ nên $AI = ID.\frac{b+c}{a}$. Chú ý rằng $ID \ge IH = r$ nên áp dụng tương tự ta quy bài toán về chứng minh $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \ge 6$.

Lời giải



Đặt $BC = a; CA = b; AB = c$. Áp dụng tính chất đường phân giác ta được $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{CD}{BC - CD} = \frac{b}{c}$, do đó ta được

$$CD.c = b(BC - CD) \Rightarrow CD = \frac{a.b}{b+c}$$

Mặt khác ta có CI là đường phân giác của tam giác ADC nên $\frac{AI}{DI} = \frac{AC}{CD} = \frac{b}{CD}$. Từ đó $\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$ nên

$AI = ID.\frac{b+c}{a}$

Gọi H là hình chiếu của I trên BC khi đó ta có

$ID \ge IH = r$

Do đó ta được $AI = ID.\frac{b+c}{a} \ge r.\frac{b+c}{a}$. Tương tự ta chứng minh được

$BI \ge r.\frac{a+c}{b}; CI \ge r.\frac{a+b}{c}$

Từ đó ta được $AI + BI + CI \ge r\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right)$

Mà ta có $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \ge 6$

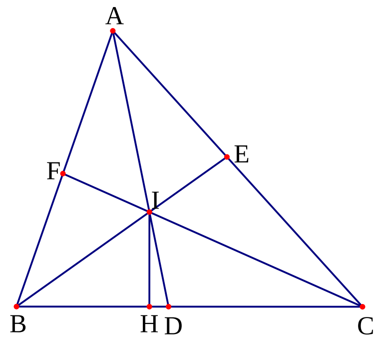
Do đó ta được $AK + BK + CK \ge 6r$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC có các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại I. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{DI}{AI}} + \sqrt{\frac{EI}{BI}} + \sqrt{\frac{FI}{CI}} > 2$$

Lời giải

Đặt $BC = a; CA = b; AB = c$. Áp dụng tính chất đường phân giác ta được



$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{CD}{BC - CD} = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow CD.c = b\left(BC - CD\right) \Rightarrow CD = \frac{a.b}{b+c}$$

Mặt khác ta có CI là đường phân giác của tam giác ADC nên $\frac{AI}{DI} = \frac{AC}{CD} = \frac{b}{CD}$. Từ đó $\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$

hay $\frac{DI}{AI} = \frac{a}{b+c}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{EI}{BI} = \frac{b}{c+a}; \frac{FI}{CI} = \frac{c}{a+b}$

Khi đó ta được $\sqrt{\frac{DI}{AI}} + \sqrt{\frac{EI}{BI}} + \sqrt{\frac{FI}{CI}} = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+c}}$

Ta cần chứng minh được $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+c}} > 2$

Thật vậy, vì a là độ dài cạnh tam giác nên a là số thực dương, do đó $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}} = \dfrac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2}$ ta được $\dfrac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \ge \dfrac{2a}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{\dfrac{b}{c+a}} \ge \dfrac{2b}{a+b+c}; \sqrt{\dfrac{c}{a+b}} \ge \dfrac{2c}{a+b+c}$

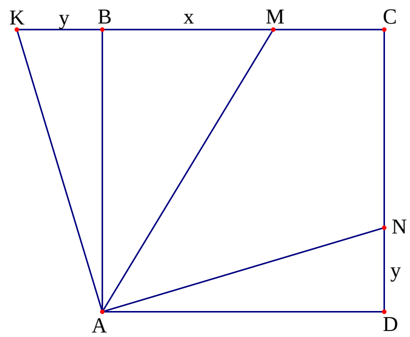
Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}} + \sqrt{\dfrac{b}{c+a}} + \sqrt{\dfrac{c}{a+b}} \ge 2$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 0$, điều này trái với giả thiết a, b, c là các cạnh của tam giác. Do vậy đẳng thức không xẩy ra.

Tức là ta được $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}} + \sqrt{\dfrac{b}{c+a}} + \sqrt{\dfrac{c}{a+b}} > 2$. Vậy ta được $\sqrt{\dfrac{DI}{AI}} + \sqrt{\dfrac{EI}{BI}} + \sqrt{\dfrac{FI}{CI}} > 2$.

Ví dụ 15. Cho hình vuông ABCD có cạnh a và hai điểm M, N thay đổi lần lượt trên BC, CD sao cho góc $MAN = 45^0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.

Lời giải



Đặt $BM = x;\ DN = y\ (0 \le x; y \le a)$.

Khi đó ta có $S_{AMN} = S_{ABCD} - (S_{ABM} + S_{ADN} + S_{CMN})$

Hay ta được

$$S_{AMN} = a^2 - \frac{1}{2}\left[ax + ay + (a-x)(a-y)\right] = \frac{1}{2}\left(a^2 - xy\right)$$

Trên tia đối của tia BM lấy điểm K sao cho $BK = y$, khi đó ta được $\Delta ABK = \Delta ADN$. Từ đó $AN = AK$ và $BAK = DAN$.

Để ý là $BAM + DAN = 45^0$ nên ta được $BAK + BAM = KAM = 45^0$. Dễ thấy $\Delta AKM = \Delta AMN$ nên ta được $MN = MK = x + y$. Mặt khác từ tam giác vuông CMN có $MN^2 = (a-x)^2 + (a-y)^2$

Từ đó suy ra $(x+y)^2 = a^2 - 2ax + x^2 + a^2 - 2ay + y^2 \Leftrightarrow xy = a^2 - a(x+y) \Leftrightarrow a(x+y) = a^2 - xy$

Do vậy $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}a(x+y) = \dfrac{1}{2}at$ với $t = x + y$. Đến đây ta nhận thấy nếu t lớn nhất thì diện tích tam giác AMN lớn nhất và ngược lại. Như vậy ta cần tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của t.

Để ý là ta đang có $x+y=a$ và $x.y=a^2-at$. Khi đó thaeo hệ thức Vi – et ta có x, y là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2-tX+a^2-at=0$. Để phương trình trên có hai nghiệm x, y ta cần có

$$\Delta=t^2-4\left(a^2-at\right)\ge 0\Leftrightarrow\left(t+2a\right)^2-8a^2\ge 0\Leftrightarrow t+2a\ge 2\sqrt{2}a\Leftrightarrow t\ge 2a\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Khi $t=2a\left(\sqrt{2}-1\right)$ thì phương trình bậc hai có nghiệm kép

$$X_1=X_2=\frac{t}{2}=\frac{2a\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}=a\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Điều này có nghĩa là $x=y=a\left(\sqrt{2}-1\right)$ và $\text{Min}t=2a\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Vậy ta được $\text{Min}_{S_{AMN}}=\frac{1}{2}a.2a\left(\sqrt{2}-1\right)=a^2\left(\sqrt{2}-1\right)$

Lại có $xy=a^2-at\Leftrightarrow at=a^2-xy$ nên suy ra $at\le a^2\Rightarrow t\le a$

Điều này có nghĩa là $\text{Max}t=a$, khi đó $\text{Max}_{S_{AMN}}=\frac{1}{2}a.a=\frac{a^2}{2}$

Trong trường hợp này ta được $x=a;\ y=0$ hoặc $x=0;\ y=a$ hay $M\equiv B;N\equiv C$ hoặc $M\equiv C;N\equiv D$

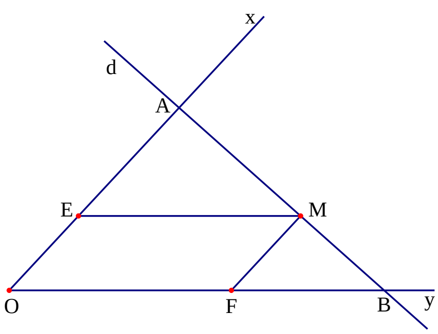
Ví dụ 16. Cho góc xOy và điểm M nằm trong góc đó. Đường thẳng d quaM cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A, B. Tìm vị trí của đường thẳng d để:

a) Diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tổng $OA+OB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Do xOy không đổi và $S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB.\sin xOy$ nên diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi tích OA.OB đạt giá trị nhỏ nhất. Qua M kẻ các đường thẳng song song với Oy, Ox cắt Ox, Oy lần lượt tại E và F.



Khi đó các điểm E và F cố định và $\frac{OE}{OA}+\frac{OF}{OB}=1$

.

Từ đó ta được $1=\left(\frac{OE}{OA}+\frac{OF}{OB}\right)^2\ge 4\frac{OE}{OA}.\frac{OF}{OB}$.

Suy ta $OA.OB \ge 4OE.OF$ không đổi. Dấu bằng xảy ra khi $\frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} OA = 2OE \\ OB = 2OF \end{cases} \Leftrightarrow$ đường thẳng d đi qua M và A thỏa mãn điều kiện $OA = 2OE;\ OB = 2OF$. Vậy khi đường thẳng d đi qua M và A thỏa mãn điều kiện $OA = 2OE;\ OB = 2OF$ thì diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Cũng từ $\frac{OE}{OA} + \frac{OF}{OB} = 1$ ta được $OA + OB = \left(OA + OB\right)\left(\frac{OE}{OA} + \frac{OF}{OB}\right) \ge OE + OF + 2\sqrt{OE.OF}$

Hay ta được $OA + OB \ge OE + OF + 2\sqrt{OE.OF} = \left(\sqrt{OE} + \sqrt{OF}\right)^2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{OB}{OA}.OE = \frac{OA}{OB}.OF \Leftrightarrow \frac{OA}{OB} = \sqrt{\frac{OE}{OF}}$

Để ý là từ $\frac{OE}{OA} + \frac{OF}{OB} = 1$ ta được $\frac{OF}{OB} = \frac{OA - OE}{OA} \Leftrightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA - OE}{OF}$

Từ $\frac{OA}{OB} = \sqrt{\frac{OE}{OF}}$ ta được $\frac{OA - OE}{OF} = \sqrt{\frac{OE}{OF}} \Leftrightarrow OA = OE + \sqrt{OE.OF}$. Khi đó $OB = OF + \sqrt{OE.OF}$

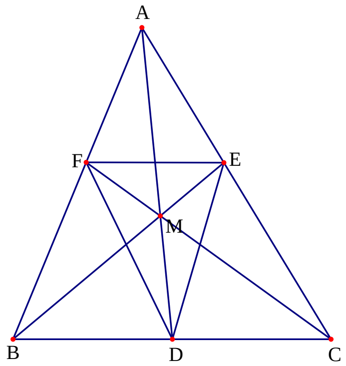
Vậy tổng $OA + OB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\left(\sqrt{OE} + \sqrt{OF}\right)^2$ khi đường thẳng d đi qua M và A thỏa mãn điều kiện $OA = OE + \sqrt{OE.OF}$.

Ví dụ 17. Cho tam giác nhọn ABC và một điểm M nằm trong tam giác. Tia AM, BM, CM cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng $S_{DEF} \le \frac{1}{4}S_{ABC}$.

Phân tích tìm lời giải

Đặt $x = \frac{EA}{EC};\ y = \frac{DC}{DB};\ z = \frac{BF}{AF}$ với $x;y;z > 0$. Chú ý là $S_{DEF} = S_{ABC} - \left(S_{AEF} + S_{BDF} + S_{CDE}\right)$ nên để chứng minh $S_{DEF} \le \frac{1}{4}S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} \le \frac{1}{4}$, trước hết ta đi biểu diễn diện tích các tam giác AEF, BDF, CDE theo x, y, z. Ta có $\frac{S_{EAF}}{S_{ABC}} = \frac{x}{\left(x+1\right)\left(z+1\right)};\frac{S_{CED}}{S_{ABC}} = \frac{y}{\left(y+1\right)\left(x+1\right)};\frac{S_{BDF}}{S_{ABC}} = \frac{z}{\left(z+1\right)\left(y+1\right)}$. Khi đó ta được $\frac{S_{AEF} + S_{ECD} + S_{BDF}}{S_{ABC}} = \frac{x\left(y+1\right) + y\left(z+1\right) + z\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(y+1\right)\left(z+1\right)}$. Do AD, BE, CF đồng quy tại M nên theo định lí Ceva nên $xyz = 1$ và bất đẳng thức $\left(x+1\right)\left(y+1\right)\left(z+1\right) \ge 8$. Khi đó biến đổi đồng nhất biểu thức trên ta được $\frac{S_{AEF} + S_{ECD} + S_{BDF}}{S_{ABC}} \ge \frac{3}{4}$. Đến đây thì bài toán xem như được chứng minh.

Lời giải



Đặt $x=\frac{EA}{EC};\ y=\frac{DC}{DB};\ z=\frac{BF}{AF}$ với $x;y;z>0$

Khi đó ta được

$$\frac{EA}{EC}=x\Rightarrow\frac{EA}{EA+EC}=\frac{x}{x+1}\Rightarrow\frac{EA}{AC}=\frac{x}{x+1}$$

Do đó ta tính được $\frac{EC}{AC}=1-\frac{EA}{CA}\Rightarrow\frac{EC}{CA}=\frac{1}{x+1}$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có

$$\frac{DC}{BC}=\frac{y}{y+1};\ \frac{DB}{BC}=\frac{1}{y+1};\ \frac{FB}{AB}=\frac{z}{z+1};\ \frac{FA}{AB}=\frac{1}{z+1}$$

Do AD, BE, CF đồng quy tại M nên theo định lí Ceva ta thu được $\frac{EA}{EC}.\frac{DC}{DB}.\frac{FB}{FA}=1$ hay $xyz=1$.

Ta ta có $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin BAC$ và $S_{EAF}=\frac{1}{2}EA.FA.\sin EAF$

Do đó suy ra $\frac{S_{EAF}}{S_{ABC}}=\frac{AF}{AB}.\frac{AE}{AC}=\frac{1}{z+1}.\frac{x}{x+1}=\frac{x}{(x+1)(z+1)}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{S_{CED}}{S_{ABC}}=\frac{y}{(y+1)(x+1)};\ \frac{S_{BDF}}{S_{ABC}}=\frac{z}{(z+1)(y+1)}$. Do đó ta được

$$\frac{S_{AEF}+S_{ECD}+S_{BDF}}{S_{ABC}}=\frac{x}{(x+1)(z+1)}+\frac{y}{(y+1)(x+1)}+\frac{z}{(z+1)(y+1)}$$
$$=\frac{x(y+1)+y(z+1)+z(x+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

Để ý đến $xyz=1$ ta có biến đổi như sau

$$\frac{x(y+1)+y(z+1)+z(x+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)}=\frac{(x+1)(y+1)(z+1)-2}{(x+1)(y+1)(z+1)}=1-\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $(x+1)(y+1)(z+1)\ge 8$

Từ đó ta được $\frac{S_{AEF}+S_{ECD}+S_{BDF}}{S_{ABC}}=1-\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}\ge 1-\frac{2}{8}=\frac{3}{4}$

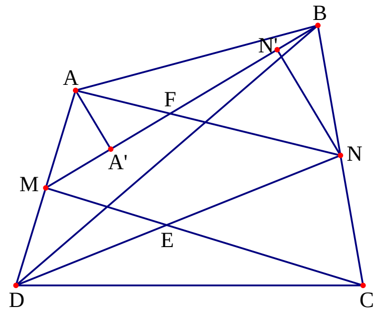
Mà ta có $S_{DEF}=S_{ABC}-(S_{AEF}+S_{ECD}+S_{BDF})\Rightarrow\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=1-\frac{S_{AEF}+S_{ECD}+S_{BDF}}{S_{ABC}}$

Từ đó suy ra $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}\le 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ hay ta được $S_{DEF}\le\frac{1}{4}S_{ABC}$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$ hay M là trọng tâm tam giác ABC.

Ví dụ 18. Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Gọi giao điểm của CM và DN là E, giao điểm của BM và AN là F. Chứng minh rằng $\frac{AF}{NF}+\frac{BF}{MF}+\frac{CE}{ME}+\frac{DE}{NE}\ge 4$.

Lời giải



Do M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC nên ta được

$$S_{BMD}=\frac{1}{2}S_{BAD} \text{ và } S_{BND}=\frac{1}{2}S_{BCD}$$

Do đó $S_{BMD}+S_{BCD}=\frac{1}{2}\left(S_{BAD}+S_{BCD}\right)$ nên $S_{BNDM}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$

Hoàn toàn tương tự ta được $S_{ANCM}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$

Từ đó suy ra $S_{ANCM}+S_{BNCM}=S_{ABCD}$ nên ta được

$$S_{MFNE}+S_{ANCD}-\left(S_{ABF}+S_{DCE}\right)=S_{ANCD}\Rightarrow S_{MFNE}=S_{ABF}+S_{DCE}\Rightarrow S_{ABN}+S_{DCN}=S_{MBC}$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng được $S_{ABM}+S_{DCM}=S_{MAD}$

Vẽ $AA'\perp MB;\ NN'\perp MB\left(A'\in MB; N'\in MB\right)$, do đó AA′//NN′

Từ đó ta được $\frac{AA'}{NN'}=\frac{AF}{NF}$. Mà ta có $\frac{AA'}{NN'}=\frac{S_{MAB}}{S_{BMN}}=\frac{2S_{MAB}}{S_{MBC}}$ nên $\frac{AF}{NF}=\frac{2S_{MAB}}{S_{MBC}}$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $\frac{BF}{MF}=\frac{2S_{NAB}}{S_{MBC}};\ \frac{CE}{ME}=\frac{2S_{NDC}}{S_{NAD}};\ \frac{DE}{NE}=\frac{2S_{MDC}}{S_{MBC}}$. Do đó ta suy ra

$$\frac{AF}{NF}+\frac{BF}{MF}+\frac{CE}{ME}+\frac{DE}{NE}=\frac{2S_{MAB}}{S_{MBC}}+\frac{2S_{NAB}}{S_{MBC}}+\frac{2S_{NDC}}{S_{NAD}}+\frac{2S_{MDC}}{S_{MBC}}$$

$$=2\left(\frac{S_{MAB}+S_{MCD}}{S_{MBC}}+\frac{S_{NAB}+S_{NCD}}{S_{NAD}}\right)=2\left(\frac{S_{NAD}}{S_{MBC}}+\frac{S_{MBC}}{S_{NAD}}\right)\ge 4$$

Hay ta được $\frac{AF}{NF}+\frac{BF}{MF}+\frac{CE}{ME}+\frac{DE}{NE}\ge 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $S_{MBC}=S_{NAD}$.

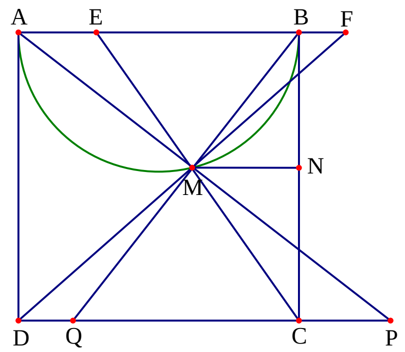
Ví dụ 19. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB<BC$. Vẽ nửa đường tròn đường kính AB trên nửa mặt phẳng chứa CD có bờ là đường thẳng AB. Gọi M là điểm bất kì trên nửa đường tròn $\left(M\ne A,B\right)$. Các đường thẳng MA và MB cắt CD lần lượt tại P và Q. Các đường thẳng MC, MD cắt đường thẳng AB lần lượt tại E và F.

Xác định ví trí của M để $PQ+EF$ có giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Phân tích tìm lời giải

Để tính được giá trị nhỏ nhất của $PQ+EF$ ta đi tính PQ và EF theo các cạnh của hình chữ nhật. Vẽ MN vuông góc với BC, khi đó ta tính được $PQ=\frac{AB.CN}{BN}=\frac{a.CN}{BN}$ và $EF=\frac{CD.BN}{CN}=\frac{a.BN}{CN}$ do đó ta được $PQ+EF=a\left(\frac{CN}{BN}+\frac{BN}{CN}\right)$. Như vậy ta cần tìm được giá nhỏ nhất của $S=\frac{CN}{BN}+\frac{BN}{CN}$. Chú ý bài toán cho $AB<BC$ và M thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên $BN<\frac{BC}{2};CN>\frac{BC}{2}$ do đó ta không thể sử dụng bất đẳng thức $S=\frac{CN}{BN}+\frac{BN}{CN}\ge 2$ được. Từ đó một suy nghĩ rất tự nhiên đó là biểu diễn BN, CN theo AB, BC. Đặt $AB=CD=a,\ BC=b\left(a<b\right)$. Khi đó ta được $NB\le\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$ và $CN\ge\frac{2b-a}{2}$. Ta có biến đổi $S=\frac{CN}{BN}+\frac{BN}{CN}=\frac{b^2}{CN.BN}-2$ nên $1-\frac{4}{S+2}=\frac{\left(CN-BN\right)^2}{b^2}$, suy ra $S\ge\frac{4b^2-4ab+2a^2}{2ab-a^2}$. Từ đó ta được $EF+PQ\ge\frac{4b^2-4ab+2a^2}{2b-a}$. Đến đây bài toán được giải quyết xong.

Lời giải



Đặt $AB=CD=a,\ BC=b\left(a<b\right)$. Kẻ $MN\perp BC\left(N\in BC\right)$, khi đó theo định lí Talet ta có

$$\frac{PQ}{AB}=\frac{QM}{BM}=\frac{CN}{BN}\text{ và }\frac{EF}{CD}=\frac{EM}{MC}=\frac{BN}{CN}$$

Suy ra $PQ=\frac{AB.CN}{BN}=\frac{a.CN}{BN}$ và

$EF=\frac{CD.BN}{CN}=\frac{a.BN}{CN}$

Do đó ta được $PQ+EF=a\left(\frac{CN}{BN}+\frac{BN}{CN}\right)$

Đặt $S=\frac{CN}{BN}+\frac{BN}{CN}$, khi đó

$$S=\frac{CN}{BN}+\frac{BN}{CN}=\frac{CN^2+BN^2}{CN.BN}=\frac{\left(CN+BN\right)^2-2CN.BN}{CN.BN}=\frac{b^2}{CN.BN}-2$$

Do đó ta được $\frac{1}{S+2}=\frac{CN.BN}{b^2}$ nên ta được $1-\frac{4}{S+2}=\frac{\left(CN+BN\right)^2-4CN.BN}{b^2}=\frac{\left(CN-BN\right)^2}{b^2}$

Do M nằm trên đường tròn đường kính AB nên ta được $NB\le\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$, suy ra $CN\ge\frac{2b-a}{2}$

Do đó ta được $1-\frac{4}{S+2}\ge\frac{\left(b-a\right)^2}{b^2}\Rightarrow\frac{4}{S+2}\le\frac{2ab-a^2}{b^2}$, nên ta có $S\ge\frac{4b^2-4ab+2a^2}{2ab-a^2}$.

Từ đó ta suy ra $EF + PQ \ge \dfrac{4b^2 - 4ab + 2a^2}{2b - a}$, đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $NB = \dfrac{a}{2}$ hay M nằm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB.

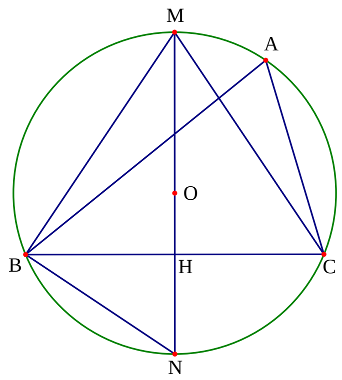
Vậy giá trị nhỏ nhất của $PQ + EF$ là $\dfrac{4b^2 - 4ab + 2a^2}{2b - a}$, xảy ra khi M nằm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB.

Ví dụ 20. Trong các tam giác nội tiếp đường tròn (O; R) cho trước, tìm tam giác có chu vi lớn nhất.

Phân tích tìm lời giải

Từ nhận đó ta dựng tam giác MBC cân tại M và kẻ đường kính MN của đường tròn (O). Khi đó ta chứng minh được $p \le p_1$ và $p_1^2 = (MB + BH)^2 \le 3\left(\dfrac{MB^2}{4} + \dfrac{MB^2}{4} + BH^2\right) = 3\left(\dfrac{MB^2}{2} + BH^2\right)$ với p và p_1 lần lượt là nửa chu vi của tam giác ABC và MBC. Bây giờ ta cần tìm giá trị lớn nhất của $\dfrac{MB^2}{2} + BH^2$. Dễ dàng tính được $MB^2 = MN.MH = 2R.h$ và $BH^2 = MH.MH = h(2R - h)$ với $MH = h$. Khi đó ta được $\dfrac{MB^2}{2} + BH^2 = Rh + h(2R - h) = h(3R - h) \le 2\left(\dfrac{3R}{2}\right)^2 = \dfrac{27R^2}{4}$. Dấu bằng của bất đẳng thức xẩy ra khi tam giác MBC đều. Đến đây bài toán xem như được giải quyết xong.

Lời giải



Xét tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Giả sử điểm M là điểm chính giữa cung BAC. Kẻ đường kính MN của đường tròn (O; R), khi đó MN vuông góc với BC tại trung điểm H của BC và $MBN = 90^0$. Đặt $MH = h$. Trong tam giác vuông MBN có BH là đường cao nên

$MB^2 = MN.MH = 2R.h$ và $BH^2 = MH.MH = h(2R - h)$

Gọi p và p_1 lần lượt là nửa chu vi của tam giác ABC và MBC, theo bài ra ta có $p \le p_1$ và dấu bằng xẩy ra khi A và M trùng nhau.

Ta có $p_1^2 = (MB + BH)^2 = \left(\dfrac{MB}{2} + \dfrac{MB}{2} + BH\right)^2 \le 3\left(\dfrac{MB^2}{4} + \dfrac{MB^2}{4} + BH^2\right) = 3\left(\dfrac{MB^2}{2} + BH^2\right)$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\dfrac{MB}{2} = BH$ hay $MB = BC$

Theo như trên ta có $3\left(\frac{MB^2}{2}+BH^2\right)=3\left[Rh+h\left(2R-h\right)\right]=3h\left(3R-h\right)\le 2\left(\frac{3R}{2}\right)^2=\frac{27R^2}{4}$

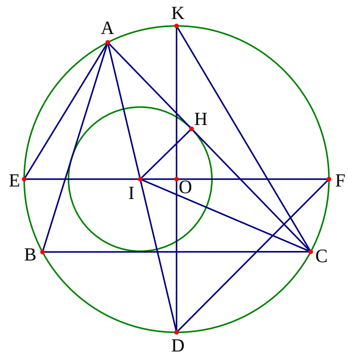
Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $h=3R-h\Leftrightarrow h=\frac{3}{2}R$

Do đó $p_1^2\le\frac{27}{4}R^2$ hay $p_1\le\frac{3\sqrt{3}}{2}R$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}MB=BC\\ MH=\frac{3}{2}R\end{cases}$ hay tam giác MBC đều.

Từ đó ta được $2p\le 3\sqrt{3}R$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $A\equiv M$ và tam giác MBC đều hay tam giác ABC đều. Vậy trong các tam giác nội tiếp đường tròn (O; R) thì tam giác đều có chu vi lớn nhất và chu vi lớn nhất bằng $3\sqrt{3}R$.

Ví dụ 21. Cho tam giác ABC có R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng $R\ge 2r$, dấu bằng xẩy ra khi nào?

Lời giải



Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC.

Gọi giao điểm của OI với đường tròn (O) là E, F(I nằm giữa E va O), AI cắt đường tròn (O) tại D khác A, DO cắt đường tròn (O) tại K khác D. Vẽ IH vuông góc với AC tại H. Xét hai tam giác IEA và IFD có $AIE=DIF$ và

$EAI=IFD=\frac{1}{2}sdDE$

Do đó $\Delta IAE\backsim\Delta IFD$ nên ta được

$\frac{IA}{IF}=\frac{IE}{ID}\Rightarrow IA.ID=IE.IF$

Mà ta có $IE.IF=\left(R-OI\right)\left(R+OI\right)=R^2-OI^2$. Do đó ta được $IA.ID=R^2-OI^2$

Mặt khác ta lại có $DIC=DAC+ICA$, mà ta có $ICB=ICA;IAC=BCD$ và $ICD=ICB+BCD$

Nên ta được $DIC=ICD\Rightarrow ID=DC$.

Hai tam giác vuông HAI và CKD có $HAI=DKC$ nên $\Delta HAI\backsim\Delta CKD$

Từ đó ta được $\frac{IH}{DC}=\frac{IA}{DK}\Rightarrow IH.DK=IA.DC=r.2R$

Kết hợp các kết quả lại ta được $R^2-OI^2=2r.R\Rightarrow OI^2R\left(R-2r\right)$

Do $OI^2\ge 0\Rightarrow R-2r\ge 0\Rightarrow R\ge 2r$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $OI=0$ tức là điểm O và I trùng nhau, điều này tương đương với tam giác ABC đều.

Ví dụ 22. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R), lấy điểm P nằm trong tam giác ABC và $OP = x$. Chứng minh rằng $OA.OB.OC \le (R+x)^2(R-x)$.

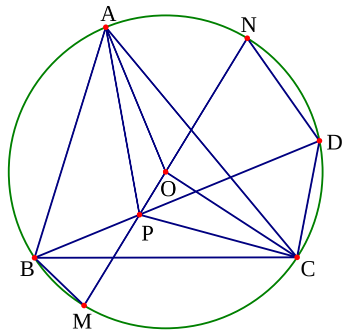
Lời giải

Giả sử xẩy ra các bất đẳng thức

$PBA + PCA < BAC;\ PAB + PCB < ABC;\ PAC + PBC < ACB$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được.

$$BAC + ABC + ACB < BAC + ABC + ACB$$



Điều này là vô lí, do đó trong ba bất đẳng thức trên có ít nhất một bất đẳng thức trên là sai. Không mất tính tổng quát ta giả sử trong các bất đẳng thức trên thì

$PBA + PCA < BAC$ là bất đẳng thức sai. Khi đó ta được

$PBA + PCA \ge BAC$.

Kéo dài BP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Ta có $BDC = BAC; ACD = ABD$

Suy ra $PCD = PCA + ACD = PCA + ABD = PCA + ABP \ge BAC = BDC = PDC$

Hay ta được $PCD \ge PDC \Rightarrow PD \ge PC$.

Kéo dài OP cắt đường tròn (O) tại M và N. Khi đó ta có

$PB.PD = PN.PM = (R-x)(R+x) = R^2 - x^2$

Do đó ta được $PB.PC \le PB.PD = (R-x)(R+x)$

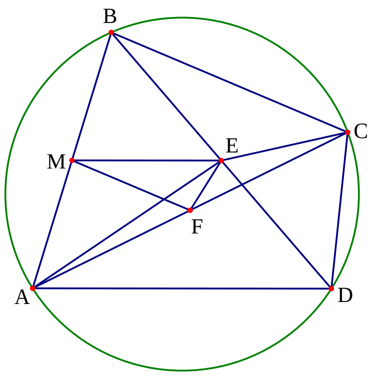
Lại có $PA \le PO + OA = R + x$ nên ta được $OA.OB.OC \le (R+x)^2(R-x)$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi ba điểm O, P, A thẳng hàng và $PC = PD$. Điều này xẩy ra khi và chỉ khi hai điểm P và O trùng nhau.

Ví dụ 23. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Chứng minh rằng $|AB - CD| \ge |AC - BD|$.

Lời giải

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, BD. Khi đó ta có áp dụng công thức về đường trung tuyến của tam giác ta được



$$AB^2 + AD^2 = 2AE^2 + \frac{1}{2}BD^2$$

$$BC^2 + CD^2 = 2CE^2 + \frac{1}{2}BD^2$$

$$EA^2 + EC^2 = 2EF^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2\left(AE^2+EF^2\right)+BD^2$$
$$=BD^2+AC^2+4EF^2$$

Do tứ giác ABCD nội tiếp nên theo định lí Ptoleme ta được $AC.BD=AB.CD+AD.BC$

Từ đó ta được $\left(AB-CD\right)^2+\left(AD-BC\right)^2=\left(AC-BD\right)^2+4EF^2$

Gọi M là trung điểm của AB, khi đó ta được $AD=2ME;BC=2MF$

Từ đó suy ra $2\left|ME-MF\right|=\left|AD-BC\right|$.

Mà trong tam giác MEF ta có $EF\ge\left|ME-MF\right|\Rightarrow 2EF\ge\left|AD-BC\right|\Rightarrow 4EF^2\ge\left(AD-BC\right)^2$

Do đó kết hợp với đẳng thức trên ta được

$$\left(AB-CD\right)^2+\left(AD-BC\right)^2\ge\left(AC-BD\right)^2+\left(AD-BC\right)^2$$

Suy ra $\left(AB-CD\right)^2\ge\left(AC-BD\right)^2\Rightarrow\left|AB-CD\right|\ge\left|AC-BD\right|$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $EF=\left|ME-MF\right|\Leftrightarrow$ ba điểm M, E, F thẳng hàng, điều này dẫn đến tứ giác ABCD là hình thang hoặc hình chữ nhật.

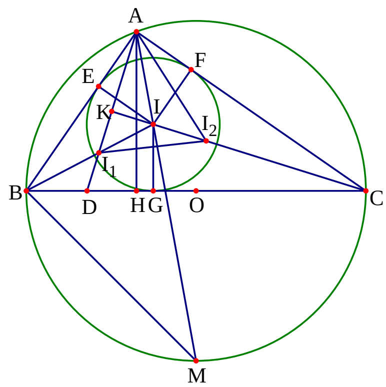
Ví dụ 24. Cho nửa đường tròn (O; R) có đường kính BC. Điểm A di động trên nửa đường tròn. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Gọi $\left(I;r\right),\left(I_1;r_1\right),\left(I_2;r_2\right)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, HAB, HAC. Tìm vị trí của điểm A để

a) Tổng $r+r_1+r_2$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Độ dài I_1I_2 đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Giả sử đường tròn (I; r) tiếp xúc với AB, AC, CB lần lượt tại E, F, G. Tứ giác EAFI là hình chữ nhật có $IE=IF=r$ nên là hình vuông.



Do đó $AE+AF=2r$, mà ta lại có $BE=BG;CF=CG$ nên

$$AB+AC-BC=\left(AE+BE\right)+\left(AF+CF\right)-\left(BG+CG\right)$$
$$=AE+AF=2r$$

Xét tương tự đối với tam giác HAB, HAC có

$$HA+HB-AB=2r_1 \text{ và } HA+HC-AC=2r_2$$

Mà ta có $BH+CH=BC$, suy ra $2AH=2\left(r+r_1+r_2\right)$,

từ đó ta được $AH=r+r_1+r_2$

Lại có $AH\le AO=R$ không đổi nên ta được

$r+r_1+r_2\le R$.

Do đó tổng $r+r_1+r_2$ đạt giá trị lớn nhất là R, dấu bằng xẩy ra kh và chỉ khi điểm A nằm chính giữa nửa đường tròn.

b) Ta có $BAD+DAC=90^0$ và $DAH+ADC=90^0$ nên ta được $DAC=ADC$ hay tam tam giác CAD cân tại C, mà CK là đường phân giác của nên đồng thời là đường cao, suy ra $CK\perp AD$. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $BI\perp AI_2$. Từ đó suy ra I là trực tâm tam giác AI_1I_2 nên $AI\perp I_1I_2$

Ta có $KAI_2=KAH+HAI_2=\frac{1}{2}\left(BAH+HAC\right)=45^0$. Do đó tam giác KAI_2 vuông cân tại K, từ đó suy ra $AK=KI_2$.

Gọi M là giao điểm của AI với nửa đường tròn (O) còn lại.

Xét hai tam giác KAI và KI_2I_1 có $AKI=I_2KI_1, KA=KI_2$ và $KAI=KI_2I_1$ nên $\Delta KAI=\Delta KI_2I_1$. Từ đó ta được $AI=I_1I_2$.

Ta có $BIM=ABI+BAI$ và $BAM=MAC=MBC$ do đó $BIM=IBM$ nên suy ra $MB=MI$

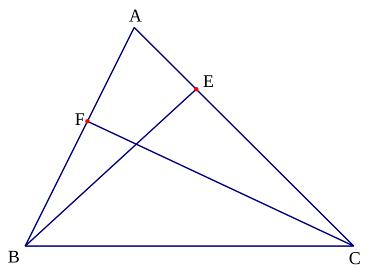
Ta có $I_1I_2=AI=AM-IM=AM-MB\le 2R-MB=2R-R\sqrt{2}=R\left(2-\sqrt{2}\right)$

Hay ta được $I_1I_2\le R\left(2-\sqrt{2}\right)$. Vậy I_1I_2 đạt giá trị lớn nhất là $\left(2-\sqrt{2}\right)R$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi A là điểm chính giữa nửa đường tròn (O).

Ví dụ 25. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA theo thứ tự tại F, E, D. Đường phân giác trong của góc BIC cắt BC tại M và AM cắt EF tại P. Chứng minh rằng $PD\ge\frac{1}{2}\sqrt{4DE.DE-EF^2}$

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề: Cho tam giác ABC nhọn có $AB=c$ và $AC=b$. Khi đó ta có $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

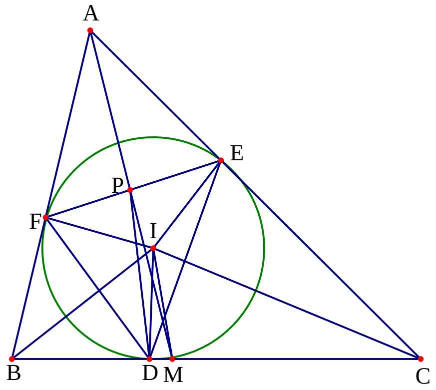


Thật vậy, vẽ các đường cao BE và CF của tam giác ABC, khi đó ta luôn có $\Delta ABE\backsim\Delta ACF\Rightarrow\frac{BE}{AB}=\frac{CF}{AC}\Leftrightarrow BE.AC=BF.AB$

Tính BE theo sinC và BF theo sinB ta được $BE=BC.\sin C; BF=BC.\sin B$

Thay vào hệ thức trên ta được $AC.\sin C = AB.\sin B$ hay $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$. Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán: Áp dụng bổ đề trên cho các tam giác APE và APF ta được



$$\frac{PE}{\sin PAE} = \frac{PA}{\sin AEF}; \frac{PE}{\sin PAF} = \frac{PA}{\sin AFE}$$

Do đó ta được $\dfrac{PE}{PF} = \dfrac{\sin PAE}{\sin PAF}$.

Tương tự áp dụng bổ đề trên cho hai tam giác AMC và AMB ta được

$$\frac{MC}{\sin MAC} = \frac{MA}{\sin C}; \frac{MB}{\sin MAB} = \frac{MA}{\sin B}$$

Do đó $\dfrac{MC}{MB} = \dfrac{\sin MAC}{\sin MAB}.\dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{\sin PAE}{\sin PAF}.\dfrac{\sin B}{\sin C}$

Từ đó ta được theo tính chất đường phân giác trong của tam giác BIC ta có

$$\frac{IC}{IB} = \frac{MC}{MB} = \frac{\sin PAE}{\sin PAF}.\frac{\sin B}{\sin C} \Rightarrow \frac{\sin PAE}{\sin PAF} = \frac{IC.\sin C}{IB.\sin B}$$

Dễ thấy $BF = BD$ và $BDF = DIB$ nên áp dụng bổ đề trên cho tam giác BDF ta được

$$\frac{DF}{\sin B} = \frac{BF}{\sin DFB} = \frac{BD}{\sin BID} = IB \Rightarrow DF = IB.\sin B$$

Tương tự ta được ta được $DE = IC.\sin C$. Do đó ta được $\dfrac{IC.\sin C}{IB.\sin B} = \dfrac{DE}{DF}$

Từ đó ta được $\dfrac{PE}{PF} = \dfrac{DE}{DF}$ nên DP là đường phân giác của tam giác DEF.

Áp dụng công thức về đường phân giác ta có

$$DP^2 = \frac{DE.DF(DE+DF+EF)(DE+DF-EF)}{(DE+DF)^2} = \frac{DE.DF\left[(DE+DF)-EF^2\right]}{(DE+DF)^2}$$

$$= DE.DF - \frac{DE.DF.EF^3}{(DE+DF)^2} \geq DE.DF - \frac{EF^2}{4}$$

Hay ta được $PD \geq \dfrac{1}{2}\sqrt{4DE.DE - EF^2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $DE = DF$ và do đó $AB = AC$ hay tam giác ABC cân tại A.

Ví dụ 26. Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính r. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tiếp điểm của đường tròn I với các cạnh BC, CA, AB. Các tia AI, AI, CI cắt đường tròn tâm I lần lượt tại A′, B′, C′. Đặt

$A_iB_i = c_i$, $B_iC_i = a_i$, $C_iA_i = b_i$ với $i = 1, 2$. Chứng minh rằng $\dfrac{a_2^3b_2^2c_2^3}{a_1^2b_1^2c_1^2} \ge \dfrac{216r^6}{abc}$, dấu đẳng thức xẩy ra khi nào?

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề: Trong tam giác nhọn ABC ta luôn có

$\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$

Thật vậy, xét ta giác nhọn ABC có AD là đường phân giác trong, khi đó ta có

$$AD = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c} \Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}.\frac{b+c}{bc} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

Ngoài ra ta chú ý đến nhận xét: Trong tam giác ABC thì $\sin\dfrac{A+B}{2} \ge \dfrac{\sin A + \sin B}{2}$.

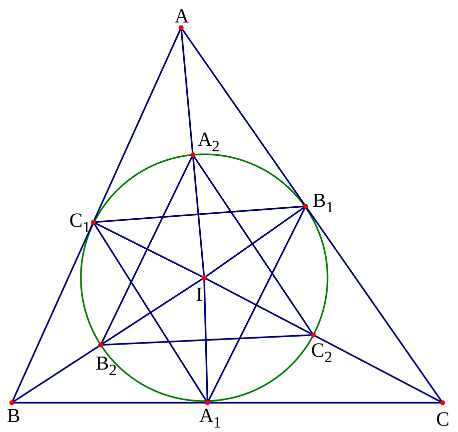
Gọi A, B, C lần lượt là số đo các góc

BAC; ABC; ACB, $A_1; B_1; C_1$ lần lượt là số đo góc

$B_1A_1C_1; A_1B_1C_1; A_1C_1B_1$,

$A_2; B_2; C_2$ lần lượt là số đo góc

$B_2A_2C_2; A_2B_2C_2; A_2C_2B_2$



Gọi p và S lần lượt là nửa chu vi và diện tích tam giác ABC. Dễ dàng tính được

$A_2 = \dfrac{B_1+C_1}{2}$; $B_2 = \dfrac{C_1+A_1}{2}$; $C_2 = \dfrac{A_1+B_1}{2}$.

Khi đó áp dụng nhận xét trên ta được

$$\begin{aligned} a_2b_2c_2 &= 8r^2.\sin A_2.\sin B_2.\sin C_2 = 8r^3.\sin\frac{B_1+C_1}{2}.\sin\frac{C_1+A_1}{2}.\sin\frac{A_1+B_1}{2} \\ &\ge r^3\left(\sin B_1 + \sin C_1\right)\left(\sin C_1 + \sin A_1\right)\left(\sin A_1 + \sin B_1\right) \\ &\ge 8r^3.\sqrt{\sin B_1.\sin C_1}.\sqrt{\sin C_1.\sin A_1}.\sqrt{\sin A_1.\sin B_1} \\ &= 8r^3.\sin A_1.\sin B_1.\sin C_1 = a_1b_1c_1 \end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra $\dfrac{a_2^3b_2^2c_2^3}{a_1^2b_1^2c_1^2} \ge a_1b_1c_1 = 8r^3.\sin A_1.\sin B_1.\sin C_1$

Ta lại có $A_1 = \dfrac{B+C}{2}$; $B_1 = \dfrac{C+A}{2}$; $C_1 = \dfrac{A+B}{2}$ và để ý là $\sin A_1 = \sin\dfrac{B+C}{2} = \cos\dfrac{A}{2}$

Nên ta được $\dfrac{a_2^3b_2^2c_2^3}{a_1^2b_1^2c_1^2} \ge a_1b_1c_1 = 8r^3.\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}$. Áp dụng bổ đề trên ta được

$$\frac{a_2^3b_2^2c_2^3}{a_1^2b_1^2c_1^2} \ge 8r^3.\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}.\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} = \frac{8r^3.p.S}{abc} = \frac{8r^3.p^2}{abc}$$

Để ý ta luôn có $p \ge 3\sqrt{3}r$, do đó ta được $\frac{a_2^3b_2^2c_2^3}{a_1^2b_1^2c_1^2} \ge \frac{216r^6}{abc}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều

Ví dụ 27. Cho đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC. Các tiếp tuyên với (O) song song với cá cạnh của ram giác ABC với sáu điểm M, N, P, Q, R, S sao cho $M,S \in AB; N,P \in AC; Q,R \in BC$. Gọi l_1, l_2, l_3 lần lượt là các đường phân giác trong xuất phất từ đỉnh A, B, C của các tam giác AMN, BSR, CPQ. Gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2} \ge \frac{81}{p^2}$

Phân tích tìm lời giải

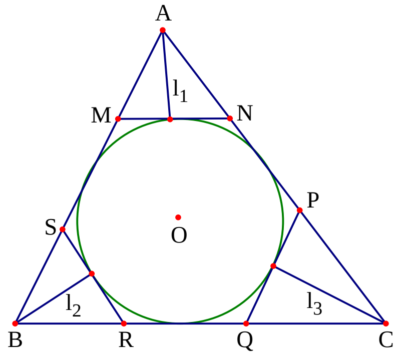
Gọi l_a, l_b, l_c theo thứ tự là độ dài các đường phân giác trong xuất phát từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC khi đó ta có $l_a = \frac{AB.AC.\cos\frac{A}{2}}{AB+AC}$ và $l_1 = \frac{AM.AN.\cos\frac{A}{2}}{AM+AN}$. Gọi p_1, p_2, p_3 lầ lượt là nửa chu vi của tam giác AMN, BSR, CPQ . Khi đó ta được $\frac{AM}{AB} = \frac{p_1}{p}$ nên suy ra

$$l_a = \frac{p}{p_1}.\frac{AM.AN.\cos\frac{A}{2}}{AM+AN} = \frac{p}{p_1}.l_1.$$

Hoàn toàn tương tự ta thu được $\frac{l_a}{l_1}+\frac{l_b}{l_2}+\frac{l_c}{l_3} = p\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được $\left(\frac{l_a}{l_1}+\frac{l_b}{l_2}+\frac{l_c}{l_3}\right)^2 \le \left(l_a^2+l_b^2+l_c^2\right)\left(\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2}\right)$. Và chú ý là $l_a^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}.p(p-a) \le p(p-a)$. Đến đây ta được $81^2 \le p^2\left(\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2}\right)$ và bất đẳng thức trên được chứng minh.

Lời giải

Gọi l_a, l_b, l_c theo thứ tự là độ dài các đường phân giác trong xuất phát từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Áp dụng công thức về đường phân giác cho các tam giác ABC và AMN ta có



$$l_a = \frac{AB.AC.\cos\frac{A}{2}}{AB+AC} \text{ và } l_1 = \frac{AM.AN.\cos\frac{A}{2}}{AM+AN}$$

Gọi p_1, p_2, p_3 lầ lượt là nửa chu vi của tam giác AMN, BSR, CPQ

Do NM//BC nên theo định lí Talet ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{AM+AN+MN}{AB+AC+BC} = \frac{p_1}{p}$

Suy ra $AB = AM.\frac{p}{p_1}$; $AC = AN.\frac{p}{p_1}$

Do đó $l_a = \dfrac{2\left(\frac{p}{p_1}\right)AM.\left(\frac{p}{p_1}\right)AN.\cos\frac{A}{2}}{\frac{p}{p_1}\left(AM+AN\right)} = \frac{p}{p_1}.\dfrac{AM.AN.\cos\frac{A}{2}}{AM+AN} = \frac{p}{p_1}.l_1$

Hoàn toàn tương tự ta được $l_b = \frac{p}{p_2}.l_2$; $l_c = \frac{p}{p_3}.l_3$. Do đó $\frac{l_a}{l_1} + \frac{l_b}{l_2} + \frac{l_c}{l_3} = p\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right)$

Mà theo tính chất các tiếp tuyến cắt nhau ta được $p = p_1 + p_2 + p_3$

Và lại có $\left(p_1+p_2+p_3\right)\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right) \ge 9$, do đó $\frac{l_a}{l_1} + \frac{l_b}{l_2} + \frac{l_c}{l_3} \ge 9$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được $\left(\frac{l_a}{l_1} + \frac{l_b}{l_2} + \frac{l_c}{l_3}\right)^2 \le \left(l_a^2 + l_b^2 + l_c^2\right)\left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2}\right)$

Với $AB = c, BC = a, CA = b$, theo công thức về đường phân giác ta có $l_a = \frac{2bc}{b+c}.\frac{\sqrt{p\left(p-a\right)}}{\sqrt{bc}}$

Do đó $l_a^2 = \frac{4bc}{\left(b+c\right)^2}.p\left(p-a\right) \le p\left(p-a\right)$. Tương tự $l_b^2 \le p\left(p-b\right)$; $l_c^2 \le p\left(p-c\right)$

Do đó ta được $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \le p\left(p-a+p-b+p-c\right) = p^2$

Suy ra $\left(\frac{l_a}{l_1} + \frac{l_b}{l_2} + \frac{l_c}{l_3}\right)^2 \le p^2\left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2}\right)$ nên ta được $81^2 \le p^2\left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2}\right)$

Do đó ta suy ra được $\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2} \ge \frac{81}{p^2}$.

Ví dụ 28. Cho tam giác ABC có $BC = a; CA = b; AB = c$. Gọi O và R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi $I_a; I_b; I_c$ lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc ở A, B, C. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2R} \le \frac{OI_a}{(a+b)(a+c)} + \frac{OI_b}{(b+c)(a+b)} + \frac{OI_c}{(c+a)(b+c)} \le \frac{1}{4r}$$

Lời giải

Gọi $AA_1; BB_1; CC_1$ là các đường phân giác của tam giác ABC. Dựng $EI_a \perp AB$ tại E, $FI_a \perp AC$ tại F. $OM \perp EI_a$ tại M, $ON \perp FI_a$ tại N, $OP \perp AB$ tại P. Khi đó ta được

$B_1AC_1 = BAC = MON$ (1)

Dễ thấy E và F là các tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với AB và AC nên ta được

$$AE = AF = p; OM = PE = p - \frac{c}{2} = \frac{a+b}{2}; ON = p - \frac{b}{2} = \frac{a+c}{2} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Khi đó ta được $\frac{OM}{ON} = \frac{a+b}{a+c}$ (2).

Theo tính chất đường phân giác ta được $AB_1 = \frac{bc}{c+a}$; $AC_1 = \frac{bc}{a+b}$. Do đó suy ra

$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{a+b}{a+c}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được $\Delta AB_1C_1 \backsim \Delta OMN$ nên suy ra $\frac{B_1C_1}{MN} = \frac{AB_1}{OM} = \frac{2bc}{(a+b)(a+c)}$

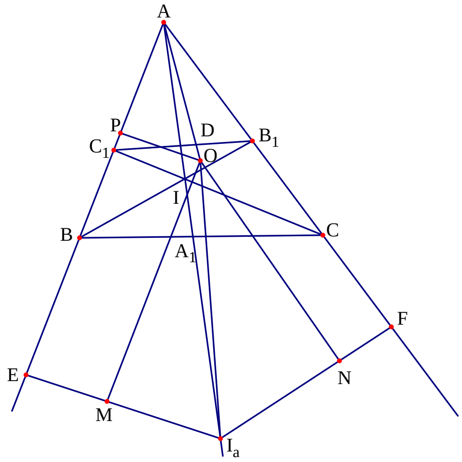
Từ đó suy ra $B_1C_1 = \frac{2bc.MN}{(a+b)(a+c)} = \frac{2bc.OI_a.\sin MON}{(a+b)(a+c)} = \frac{2bc.OI_a.\sin BAC}{(a+b)(a+c)} = \frac{abcOI_a}{R.(a+b)(a+c)}$

Do đó $OI_a = \frac{R(a+b)(a+c)B_1C_1}{abc}$

Hoàn toàn tương tự $OI_b = \frac{R(b+c)(a+b)A_1C_1}{abc}$; $OI_c = \frac{R(b+c)(c+a)A_1B_1}{abc}$

Từ đó ta được $Q = \frac{OI_a}{(a+b)(a+c)} + \frac{OI_b}{(b+c)(a+b)} + \frac{OI_c}{(c+a)(b+c)} = \frac{R}{abc}(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1)$

+ Trước hết ta chứng minh $Q \ge \frac{1}{2R}$



- Trường hợp 1: Tam giác ABC không tù.

Gọi giao điểm của OA và B_1C_1 là D, khi đó ta được

$$R.B_1C_1 = OA.B_1C_1 \ge 2S_{OB_1AC_1}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$R.C_1A_1 \ge 2S_{OC_1BA_1};\ R.A_1B_1 \ge 2S_{OB_1CA_1}$$

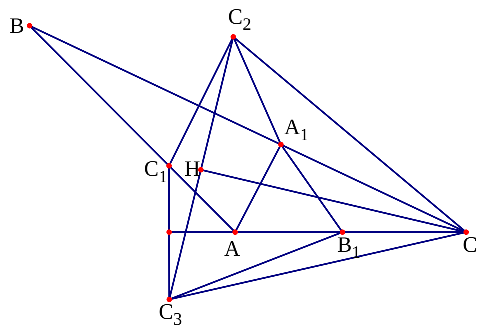
Do đó ta được $R\left(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1\right) \ge 2S_{ABC}$.

Mà lại có $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$. Từ đó ta được $Q \ge \frac{1}{2R}$.

- Trường hợp 2: Tam giác ABC tù, không mất tính tổng quát ta giả sử $BAC > 90^0$.

Khi đó gọi C_2 và C_3 là các điểm đối xứng với C_1 qua BC và AB.

Từ đó $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \ge C_2C_3$.



Dựng $AH \perp C_2C_3$. Do $ACB < 90^0$ và

$C_2CC_3 = 2ACB$ nên suy ra

$CC_1 = CC_2 = CC_2 > CA$

Từ đó suy ra $C_2C_3 = 2CC_3 \sin ACB > 2b\sin C$.

Do đó $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \ge 2b\sin C$.

Tương tự ta cũng có

$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \ge 2c\sin B$.

Nên ta suy ra $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \ge b\sin C + c\sin B = \frac{bc}{2R} + \frac{bc}{2R} \ge \frac{2S_{ABC}}{R}$. Từ đó ta được

$Q > \frac{1}{2R}$.

Kết hợp cả hai trường hợp ta được $Q \ge \frac{1}{2R}$.

+ Chứng minh $Q \le \frac{1}{4r}$. Theo định lí cosin ta được $B_1C_1^2 = AB_1^2 + AC_1^2 - 2AB_1.AC_1.\cos A.$. Từ đó suy ra

$$B_1C_1^2=\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a+b}\right)-2\frac{b^2c^2}{(a+b)(a+c)}.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{b^2c}{c+a}\left(\frac{c}{c+a}-\frac{b}{b+a}\right)+\frac{bc^2}{b+a}\left(\frac{b}{b+a}-\frac{c}{c+a}\right)+\frac{b^2c^2}{(b+a)(c+a)}$$

$$=\frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)}-\frac{abc(a+b+c)(b-c)^2}{(a+b)^2(a+c)^2}$$

$$\le\frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)}\le\frac{a^2bc}{4\sqrt{ab}.\sqrt{ac}}=\frac{\sqrt{ab}.\sqrt{ac}}{4}\le\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}}{2}\right)^2\le\frac{1}{36}\left(\frac{2a+b+c}{2}\right)^2$$

Do đó suy ra $B_1C_1\le\frac{2a+b+c}{8}$. Hoàn toàn tương tự ta được

$C_1A_1\le\frac{2b+c+a}{8};A_1B_1\le\frac{2a+b+c}{8}$.

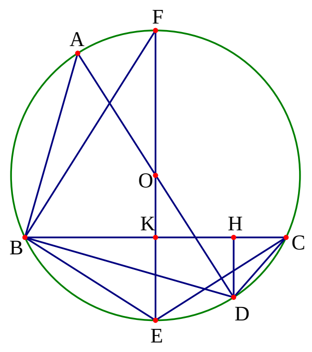
Từ đó suy ra $A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1\le\frac{a+b+c}{2}=p$. Do đó ta được $Q\le\frac{Rp}{abc}=\frac{1}{4r}$.

Như vậy ta được $\frac{1}{2R}\le\frac{OI_a}{(a+b)(a+c)}+\frac{OI_b}{(b+c)(a+b)}+\frac{OI_c}{(c+a)(b+c)}\le\frac{1}{4r}$.

Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 29. Cho đường tròn tâm O bán kính R và dây cung BC(với $BC<R$). Điểm A di động trên cung lớn BC và điểm D di động trên cung nhỏ BC. Xác định vị trí của A và D để $\frac{1}{DA}+\frac{1}{DB}+\frac{1}{DC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



Với A, D bất kì ta luôn có $AD\le 2R$. Với mỗi điểm D trên cung nhỏ BC ta luôn tìm được điểm A trên cung lớn BC sao cho $AD=2R$ để $\frac{1}{AD}=\frac{1}{2R}$ có giá trị bé nhất.

Kẻ DH vuông góc với BC tại H. Kẻ đường kính EF vuông góc với BC tại K. Khi đó các điểm E, F, K là các điểm cố định. Do $ABD=CHD=90^0$ và $DAB=DCB$ nên ta được $\Delta ABD\backsim\Delta CHD$.Từ đó suy ra

$$\frac{BD}{DA}=\frac{DH}{DC}\Rightarrow DB.DC=AD.DH\Rightarrow DB.DC=2R.DH$$

Ta có $HD+OK\le OD=OE=EK+OK\Rightarrow DK\le EK$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{1}{DB}+\frac{1}{DC}\ge 2\sqrt{\frac{1}{CB.CD}}=2\sqrt{\frac{1}{2R.DH}}\ge\frac{2}{\sqrt{2R.EK}}$

Từ đó ta được $\frac{1}{DA}+\frac{1}{DB}+\frac{1}{DC}\ge\frac{1}{2R}+\frac{2}{\sqrt{2R.EK}}=\frac{1}{2R}+\frac{2}{BE}$

Dễ thấy $\frac{1}{2R}+\frac{2}{BE}$ là một hằng số. Do đó $\frac{1}{DA}+\frac{1}{DB}+\frac{1}{DC}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{2R}+\frac{2}{BE}$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi DA trùng với đường kính EF.

Nhận xét: *Có nhiều cách để tìm giá nhị nhỏ nhất của* $T=\frac{1}{BD}+\frac{1}{CD}$ *như:*

- *Ta có* $DH\le EK$ *nên* $EH.BC\le EK.BC\Leftrightarrow S_{DBC}\le S_{EBC}$*, điều này dẫn đến*

$$DB.DC.\sin\left(180^0-BDC\right)\le EB.EC.\sin\left(180^0-BEC\right)$$

Mà ta có $BEC=BDC$ *và* $EB=EC$ *nên ta được* $BD.CD\le BE^2$

- *Kéo dài BD một đoạn* $DG=DC$*, ta được* $BD+DC=BD+DG\le BE+EG=BE+EC=2EB$

Do đó ta được $\frac{1}{BD}+\frac{1}{DC}\ge\frac{4}{BD+CD}=\frac{2}{BE}$

- *Áp dụng định lí Ptoleme cho tứ giác nội tiếp BFCD ta được*

$$BD.CF+CD.BF=BC.DF\Rightarrow\left(DB+CD\right)BF\le BC.2R$$

Từ đó suy ra $\frac{1}{BD}+\frac{1}{DC}\ge\frac{4}{BD+CD}=\frac{2BF}{R.BC}$.

Ví dụ 30. Cho tam giác ABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $AM+BN+CP\le 4R+r$.

Phân tích và lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề: Cho tam giác ABC nhọn có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Khi đó ta có $OM+ON+OP=R+r$.

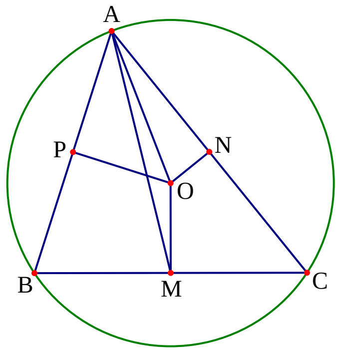
Thật vậy, đặt $BC=a=2PN; CA=b=2PM; AB=c=2MN$

Áp dụng định lí Ptoleme cho các tứ giác nội tiếp APON, BMOP, CNOM ta được

$$ON.\frac{c}{2}+OP.\frac{b}{2}=OA.\frac{a}{2}=R.\frac{a}{2};\ OP.\frac{a}{2}+OM.\frac{b}{2}=OB.\frac{b}{2}=R.\frac{c}{2};\ OM.\frac{b}{2}+ON.\frac{a}{2}=OC.\frac{c}{2}=R.\frac{c}{2}$$

Mặt khác ta lại có $OM.\frac{a}{2}+ON.\frac{b}{2}+OP.\frac{c}{2}=r.\frac{a+b+c}{2}$. Từ đó ta được $OM+ON+OP=R+r$

Trở lại bài toán: Ta xét các trường hợp sau



+ Trường hợp 1: Xét trường hợp tam giác ABC nhọn.

Với các kí hiệu như trên ta có

$AM \le AO + OM \Rightarrow AM \le R + OM$

Hoàn toàn tương tự ta được $BN \le R + ON;\ CP \le R + OP$

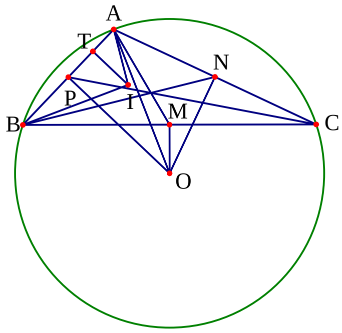
Khi đó ta được

$AM + BN + CP \le 3R + OM + ON + OP = 4R + r$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi O thuộc đồng thời AM, BN, CP hay O là trọng tâm của tam giác ABC, điều này xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

+ Trường hợp 2: Xét trường hợp tam giác ABC không nhọn, không mất tính tổng quát ta giả sử $A \ge 90^0$

Với các kí hiệu như trên ta có



$$AM \le \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$$

$$BP < NP + PB = \frac{a}{2} + \frac{c}{2}$$

$$CP < PN + CN = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

Khi đó ta được $AM + BN + CP < 2a + \frac{1}{2}\left(b + c - a\right)$

Dễ thấy $2a \le 4R$.

Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và (I) tiếp xúc với AB tại T.

Vì $A \ge 90^0$ nên ta có $TAI \ge 45^0 \Rightarrow TIA \le 45^0$ nên ta được $TA \le TI = \frac{1}{2}\left(b + c - a\right) \le r$

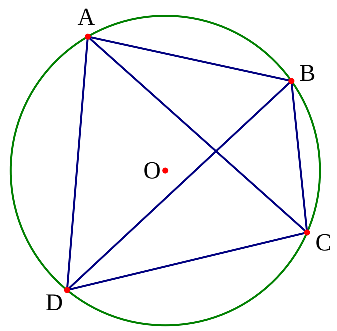
Từ đó ta được $AM + BN + CP < 4R + r$

Ví dụ 31. Cho đường tròn (O; R) và một điểm I nằm bên trong đường tròn. Gọi AC và BD là hai dây cung bất kì đi qua I. Xác định vị trí của AC và BD để $\frac{AB.AD + BC.CD}{AB.BC + DA.CD}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Phân tích tìm lời giải

Bài toán yêu cầu xác định vị trí củaAC và BD để $\frac{AB.AD + BC.CD}{AB.BC + DA.CD}$ tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất nên trước hết ta đi biểu diễn biểu thức đó theo tỉ số của dây cung AC, BD. Chú ý đến $\Delta IDC \backsim \Delta IAB$ và $\Delta IAD \backsim \Delta IBC$ ta được $\frac{ID}{IA} = \frac{IC}{IB} = \frac{CD}{AD}$ và $\frac{IA}{IB} = \frac{ID}{IC} = \frac{AD}{BC}$. Từ đó $\frac{ID}{IB}=\frac{ID}{IA}.\frac{IA}{IB}=\frac{AD.DC}{AB.BC}$ nên ta suy ra được $BD=\frac{AB.BC+DA.CD}{AB.BC}.IB$. Và $AC=\frac{AB.DA+BC.CD}{AB.DA}.AI$ và chú ý là $\frac{IA}{IB}=\frac{AD}{BC}$ ta thu được $\frac{AB.AD+BC.CD}{AB.BC+DA.CD}=\frac{AC}{BD}$. Đến đây xét các vị trí của AC và BD để có được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức trên.

Lời giải



Xét hai tam giác IDC và IAB có $DIC=AIB$ và $IDC=IAB$ nên ta được $\Delta IDC\backsim\Delta IAB$. Từ đó ta được $\frac{ID}{IA}=\frac{IC}{IB}=\frac{CD}{AD}$

Chứng minh tương tự ta được $\Delta IAD\backsim\Delta IBC$ nên $\frac{IA}{IB}=\frac{ID}{IC}=\frac{AD}{BC}$ Từ đó $\frac{ID}{IB}=\frac{ID}{IA}.\frac{IA}{IB}=\frac{AD.DC}{AB.BC}$. Suy ra ta được $\frac{ID+IB}{IB}=\frac{AB.BC+DA.CD}{AB.BC}$ hay

$$BD=\frac{AB.BC+DA.CD}{AB.BC}.IB$$

Mặt khác ta lại có $\frac{IC}{IA}=\frac{IC}{IB}:\frac{IA}{IB}=\frac{BC.CD}{AB.DA}$

Suy ra $\frac{IC+IA}{IA}=\frac{AB.DA+BC.CD}{AB.DA}$ hay $AC=\frac{AB.DA+BC.CD}{AB.DA}.AI$

Từ các kết quả trên ta được $\frac{AC}{BD}=\frac{\frac{AB.DA+BC.CD}{AB.DA}.AI}{\frac{AB.BC+DA.CD}{AB.BC}.IB}$.

Chú ý là $\frac{IA}{IB}=\frac{AD}{BC}$ ta thu được $\frac{AB.AD+BC.CD}{AB.BC+DA.CD}=\frac{AC}{BD}$. Đến đây ta được

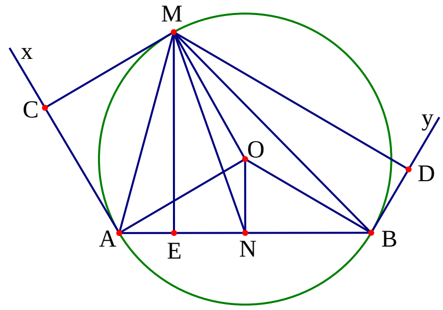
+ $\frac{AB.AD+BC.CD}{AB.BC+DA.CD}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi AC lớn nhất đồng thời BD nhỏ nhất, điều này tương đương với AC đi qua O và BD vuông góc với OI

+ $\frac{AB.AD+BC.CD}{AB.BC+DA.CD}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi AC nhỏ nhất đồng thời BD lớn nhất nhất, điều này tương đương với BD đi qua O và AC vuông góc với OI.

Ví dụ 32. Cho AB là một dây cung cố định khác đường kính của đường tròn (O; R). Vẽ các tia Ax By là các tia tiếp tuyến của đường tròn (O). Một điểm do động trên cung lớn AB. Vẽ MC vuông góc với Ax tại C, MD vuông góc với By tại D. Xác định vị trí của M để $AC.BD+MC.MD$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Vẽ ME vuông AB tại E và ON vuông góc với AB tại N.



Xét các tam giác MAC và MEB có

$\widehat{MCA} = \widehat{MEB} = 90^0$ và $\widehat{MAC} = \widehat{MBE} = \frac{1}{2}\text{sd}\,AM$

Do đó $\Delta MCA \backsim \Delta MEB$ nên suy ra

$\frac{MC}{ME} = \frac{AC}{BE} = \frac{MA}{MB}$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được

$\Delta MAE \backsim \Delta MBD$ suy ra $\frac{ME}{MD} = \frac{AE}{BD} = \frac{MA}{MB}$

Kết hợp hai kết quả trên ta được $MC.MD = ME^2$ và $AC.BD = AE.BE$

Lại có $ME \le MN$ và $MN \le MO + ON$ do đó $MC.MD = ME^2 \le (OM + ON)^2 = (R + ON)^2$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta được $AE.BE \le \left(\frac{AE + BE}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4}$

Do đó ta được $AC.BD + MC.MD = AE.BE + ME^2 \le \frac{AB^2}{4} + (ON + R)^2$ không đổi.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} AE = BE \\ E \equiv N \\ MN = OM + ON \end{cases} \Leftrightarrow$ M nằm chính giữa cung lớn AB

Do đó giá trị lớn nhất của $AC.BD + MC.MD$ là $\frac{AB^2}{4} + (ON + R)^2$, đạt được khi M là điểm chính giữa cung lớn AB.

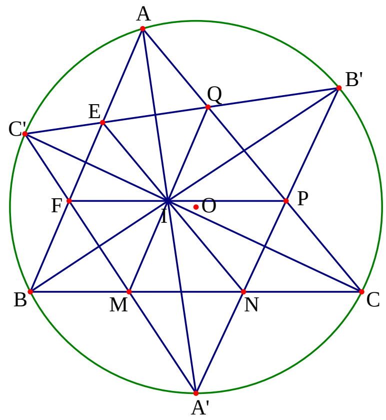
Ví dụ 33. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi A′, B′, C′ lầ lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ $BC; CA; AB$ của đường tròn (O). Gọi E, Q lần lượt là giao điểm của B′C′ với AB, AC; M, F lần lượt là giao điểm của A′C′ với BC, AB; P, N lần lượt là giao điểm của A′B′ với AC, BC. Chứng minh rằng $\frac{2}{3}S_{ABC} \le S_{MNPQEF}$

Phân tích và lời giải

+ Trước hết ta chứng minh các đường thẳng MQ, NE, PF đồng quy tại một điểm.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó ba đường thẳng AA′, BB′, CC′ đồng quy tại I.

Thật vậy, sử dụng tính chất góc nội tiếp và góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn ta có



$$B'AI = \frac{1}{2}sdB'A' = \frac{1}{2}sdB'C + \frac{1}{2}sdA'C$$

$$B'IB = \frac{1}{2}sdB'A + \frac{1}{2}sdA'B$$

Mà ta lại có $sdB'C = sdB'A;\ sdA'C = sdA'B$.

Từ đó ta được $B'AI = B'IA$ nên tam giác B’IA cân tại B’, suy ra $B'I = B'A$. Chứng minh tương tự ta được $C'I = C'A$. Từ đó suy ra B’C’ là đường trung trực của đoạn thẳng AI

Lặp lại cách chứng minh như trên ta được C’A’ và A’B’ lần lượt là đường trung trực của đoạn thẳng IB, IC.

Theo tính chất điểm nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng ta thu được $MB = MI$ và $FB = FI$.

Từ đó suy ra tam giác BMI cân tại M và tam giác FBI cân tại F. Do đó ta được

$MBI = MIB;\ FBI = FIB$.

Mà ta lại có $MBI = FBI$ nên ta được $FBI = MIB = MBI = FIB$, suy ra IM//BF và IF//BM

Kết hợp với $MBI = FBI$ ta suy ra được tứ giác BMIF là hình thoi. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được các tứ giác AQIE và CNIP là hình thoi. Từ đó ta được IF//BC và IP//CN nên IP//BC, suy ra FP đi qua điểm I. Chứng minh tương tự ta được QM, NE cũng đi qua điểm I. Vậy MQ, NE, PF đồng quy tại điểm I.

+ Chứng minh $\frac{2}{3}S_{ABC} \le S_{MNPQEF}$.

Từ các kết quả trên ta thu được PF//BC, NE//AC, MQ//AB. Đặt $AB = c; BC = a; CA = b$

Khi đó ta có $\frac{IP}{IF} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{IP}{IF} = \frac{PQ}{PA} = \frac{b}{b+c}$

Ta có $\frac{S_{PIQ}}{S_{AFP}} = \frac{PI}{PF}.\frac{PQ}{PA} = \frac{b^2}{(b+c)^2}$. Tương tự ta cũng có $\frac{S_{FIE}}{S_{AFP}} = \frac{c^2}{(b+c)^2}$

Do đó $\frac{S_{AEIF}}{S_{AFP}} = 1 - \frac{b^2}{(b+c)^2} - \frac{c^2}{(b+c)^2} = \frac{2bc}{(b+c)^2}$. Suy ra $\frac{S_{AEQ}}{S_{AFP}} = \frac{\frac{1}{2}S_{AEID}}{S_{AFP}} = \frac{1}{2}.\frac{2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2}$.

Mặt khác ta lại có $\frac{AI}{AB} = \frac{A'I}{A'B} = \frac{AA'}{AB + A'B}$

Từ đó ta được $\frac{AP}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{FP}{BC} = \frac{AI}{AA'} = \frac{AB}{AB + A'B} = \frac{c}{c + \frac{ca}{b+c}} = \frac{b+c}{a+b+c}$.

Do đó ta thu được $\frac{S_{AFP}}{S_{ABC}} = \frac{AP}{AC}.\frac{AF}{AB} = \left(\frac{FP}{BC}\right)^2 = \frac{(b+c)^2}{(a+b+c)^2}$

Kết hợp các kết quả trên ta được $\frac{S_{AEQ}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AEQ}}{S_{AFP}}.\frac{S_{AFP}}{S_{ABC}} = \frac{bc}{(b+c)^2}.\frac{(b+c)^2}{(a+b+c)^2} = \frac{bc}{(a+b+c)^2}$

Lặp lại các chứng minh như trên ta được $\frac{S_{AFM}}{S_{ABC}} = \frac{ca}{(a+b+c)^2}; \frac{S_{CPN}}{S_{ABC}} = \frac{ab}{(a+b+c)^2}$

Ta có $S_{MNPQEF} = S_{ABC} - (S_{AEQ} + S_{BFM} + S_{CPN})$ nên ta được $\frac{S_{MNPQEF}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}$

Do $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$ nên ta có $1 - \frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2} \ge 1 - \frac{ab+bc+ca}{3(ab+bc+ca)} = \frac{2}{3}$

Từ đó suy ra $\frac{S_{MNPQEF}}{S_{ABC}} \ge \frac{2}{3}$ hay $\frac{2}{3}S_{ABC} \le S_{MNPQEF}$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

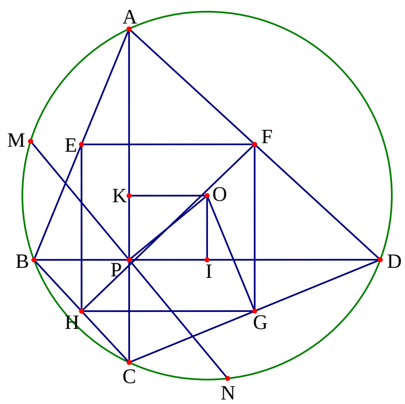
Ví dụ 34. Cho đường tròn (O) và điểm P cố định nằm trong đường tròn (O)(P không trùng với O). Hai dây cung AC và BD thay đổi của đường tròn (O) vuông góc với nhau tại P. Tìm vị trí của các dây cung AC và BD sao cho:

a) Diện tích tứ giác ABCD lớn nhất, nhỏ nhất.

b) Chu vi tứ giác ABCD lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải

a) Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm AB, AD, CD, CB. Khi đó dễ dàng chứng minh được tứ giác EFGH là hình chữ nhật có tâm là trung điểm của đoạn OP.



Ta cần chứng minh $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 = 4R^2$

Thật vậy do $AC \perp BD$ nên dễ dàng suy ra

$\Delta OEA = \Delta DGO$, do đó suy ra $OG = EA = \frac{AB}{2}$.

Ta có $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{CD}{2}\right)^2 = OG^2 + DG^2 = R^2$ nên ta được $AB^2 + CD^2 = 4R^2$

Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được $AD^2 + BC^2 = 4R^2$.

Hạ OK vuông góc với AC và OI vuông góc với BD. Khi đó ta có $ID^2 = R^2 - OI^2$

Do đó ta được $BD^2 = 4(R^2 - OI^2)$. Tương tự ta cũng có $AC^2 = 4(R^2 - OK^2)$

Từ đó suy ra $AC^2 + BD^2 = 4R^2 - 4\left(OI^2 + OK^2\right) = 8R^2 - 4OP^2$ không đổi

Từ đây ta được $EF^2 + FG^2 = EG^2 \Rightarrow EG^2 = \frac{1}{4}\left(AC^2 + BD^2\right)$ không đổi.

Suy ra hình chữ nhật EFGH là hình chữ nhật thay đổi trên một đường tròn cố định có tâm là trung điểm của OP.

Để ý là $S_{EFGH} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Do đó

$$S_{EFGH} = EF.GH \le \frac{EF^2 + GH^2}{2} = \frac{1}{8}\left(AC^2 + BD^2\right) = \frac{1}{8}\left(8R^2 - 4OP^2\right)$$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tứ giác EFGH là hình vuông nên $AC = BD$.

Lại có $S_{EFGH} = EF.FG = \frac{1}{2}\left[EF^2 + FG^2 - \left(EF - FG\right)^2\right] = \frac{1}{8}\left(8R^2 - 4OP^2\right) - \frac{1}{2}\left(EF - FG\right)^2$

Để S_{EFGH} đạt giá trị nhỏ nhất thì $\left|EF - FG\right|$ phải đạt giá trị lớn nhất.

Mà ta có $AC \le 2R \Rightarrow FG \le R$ và $BD \ge MN$ với MN đi qua P.

Do đó $EF \ge \frac{1}{2}MN$ nên $\left|EF - FG\right| \le R - \frac{MN}{2}$

Do đó S_{EFGH} đạt giá trị nhr nhất khi AC là đường kính của đường tròn (O)

Vậy S_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất khi $AC = BD$ và S_{ABCD} đạt giá trị nhỏ nhất khi $AC = 2R$.

b) Đặt $m = AB + BC + CD + DA$ khi đó ta được

$$m^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 + 2\left(AB.BC + BC.CD + CD.DA + DA.AB + AB.BC + BC.AD\right)$$

Mà ta có $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$ có giá trị không đổi.

Áp dụng định lí Ptoleme cho tứ giác nội tiếp AEOF ta có $AE.OF + OE.AF = R.EF$

Hay ta được $\frac{AB.BC}{4} + \frac{CD.DA}{4} = \frac{R.BD}{2}$. Tương tự ta cũng có $\frac{AB.AD}{4} + \frac{CD.BC}{4} = \frac{R.AC}{2}$

Do đó ta được $2R\left(BD + AC\right) = AB.BC + CD.DA + AB.AD + CD.BC$

Như vậy việc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của m tương đương với tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $S = AB.CD + AD.BC + 2R\left(AC + BD\right)$.

Cũng theo định lí Ptoleme thì trong tứ giác ABCD nội tiếp ta có $AB.CD + AD.BC = AC.BD$

Do đó suy ra $S = AC.BD + 2R\left(AC + BD\right)$.

Ta có $S = AC.BD + 2R\left(AC + BD\right) \le \frac{AC^2 + BD^2}{2} + 2R.\sqrt{2\left(AC^2 + BD^2\right)}$ không đổi

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $AC = BD$

Lại có $S = \frac{1}{2}\left[AC^2 + BD^2 - \left(AC - BD\right)^2\right] + 2R.\sqrt{2\left(AC^2 + BD^2\right) - \left(AC - BD\right)^2}$

Mà ta có $AC \le 2R$; $BD \ge MN \Rightarrow |AC - BD| \le 2R - MN$

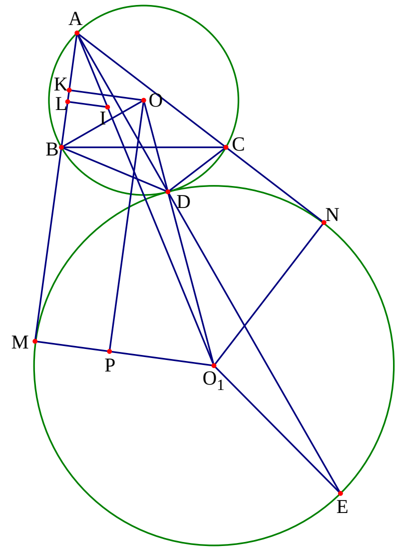
Suy ra $S \ge \frac{1}{2}\left[AC^2 + BD^2 - (2R - MN)^2\right] + 2R.\sqrt{2(AC^2 + BD^2) - (2R - MN)^2}$ không đổi

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $AC = 2R$

Vậy $m = AB + BC + CD + DA$ đạt giá trị lớn nhất khi $AC = BD$ và đạt giá trị nhỏ nhất khi $AC = 2R$.

Ví dụ 35. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn có bán kính r. Gọi O_1, R_1; O_2, R_2; O_3, R_3 theo thứ tự là tâm và bán kính của đường tròn tiếp xúc ngoài với đường tròn (O) đồng thời tiếp xúc với AB, AC; BC, BA; CA, CB tương ứng. Chứng minh rằng $R_1 + R_2 + R_3 \ge 12r$

Lời giải



Giả sử đường tròn $(O_1; R_1)$ tiếp xúc ngoài với đường tròn $(O; R)$ tại D và tiếp xúc với hai tia AB, AC lần lượt tại M, N. Tia AD cắt đường tròn $(O_1; R_1)$ tại điểm thứ hai là E.

Khi đó ta có $OO_1 = OD + O_1D = R + R_1$, lại có OA song song với EO_1 và $AM^2 = AN^2 = AD.AE$

Từ đó $\frac{AD^2}{AM^2} = \frac{AD}{AE} = \frac{OD}{OO_1}$ hay ta được

$$\frac{AD^2}{AM^2} = \frac{R}{R + R_1}$$

Chứng minh tương tự ta cũng được

$$\frac{BD^2}{BM^2} = \frac{CD^2}{CN^2} = \frac{R}{R + R_1}$$

Từ đó ta thu được $\frac{AD}{AM} = \frac{BD}{BM} = \frac{CD}{CN}$. Mặt khác tứ giác ABDC nội tiếp nên theo định lí Ptoleme ta có $AB.CD + AC.BD = AD.BC$. Kết hợp với kết quả trên ta thu được $AB.CN + AC.BM = BC.AM$.

Đặt $BC = a; CA = b; AB = c$ ta được $BM = AM - c$; $CN = AN - b = AM - b$

Khi đó từ hệ thức trên ta được $AM = AN = \frac{2bc}{b + c - a}$.

Gọi L là tiếp điểm của AB với đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC.

Khi đó ta có $\frac{O_1M}{IL} = \frac{AM}{AL}$ hay ta được $\frac{R_1}{r} = \frac{AM}{AL}$

Thay $AL = p - a = \frac{1}{2}(b+c-a)$ và $AM = \frac{2bc}{b+c-a}$ tỉ lệ thức trên ta được $\frac{R_1}{r} = \frac{4bc}{(b+c-a)^2}$.

Chứng minh tương tự ta cũng được $\frac{R_2}{r} = \frac{4ac}{(c+a-b)^2}$; $\frac{R_3}{r} = \frac{4ab}{(a+b-c)^2}$

Từ đó ta được $\frac{R_1+R_2+R_3}{r} = \frac{4bc}{(b+c-a)^2} + \frac{4ac}{(c+a-b)^2} + \frac{4ab}{(a+b-c)^2}$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{4bc}{(b+c-a)^2} + \frac{4ac}{(c+a-b)^2} + \frac{4ab}{(a+b-c)^2} \ge 12\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{(b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2}}$$

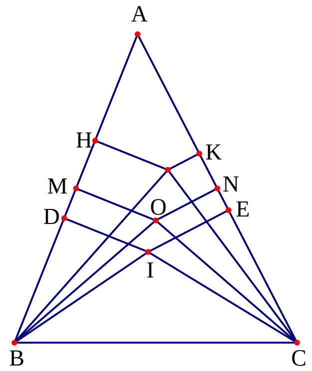
Chú ý là $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc$, do đó ta được $\frac{R_1+R_2+R_3}{r} \ge 12$

Hay ta được $R_1+R_2+R_3 \ge 12r$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $R_1 = R_2 = R_3$ và $a = b = c$ hay tam giác ABC đều.

Ví dụ 36. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} < 60^0$. Gọi P là điểm bất kì trong tam giác. Gọi H, K là hình chiếu của P lần lượt trên cạnh AB và cạnh AC. Giả sử $AC + AH = BC + BH$ và $AB + AK = BC + CK$. Chứng minh rằng $\widehat{BPC} < 120^0$.

Lời giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm AB và AC. Khi đó ta có $OM \perp AB; ON \perp AC$.



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và D, E lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với cạnh AB, AC. Khi đó ta được $ID \perp AB; IE \perp AC$. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có

$AD = AE = \frac{CA + AB - BC}{2}$. Từ đó suy ra

$$BD = AB - AD = AB - \frac{CA + AB - BC}{2} = \frac{AB + BC - CA}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $AB + AK = BC + CK \Rightarrow AK = \frac{BC + CA - AB}{2}$

Từ đó ta được $BD = AH \Rightarrow MN = MD$ và tương tự ta cũng có $NE = NK$.

Do O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên ta có $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$.

Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên ta tính được $BIC = 90^0 + \frac{1}{2}A$.

Theo giả thiết $BAC < 60^0 \Rightarrow 2A < 90^0 + \frac{1}{2}BAC \Rightarrow BOC < BIC$

Do đó suy ra $BPC < BOC = 2A < 120^0$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

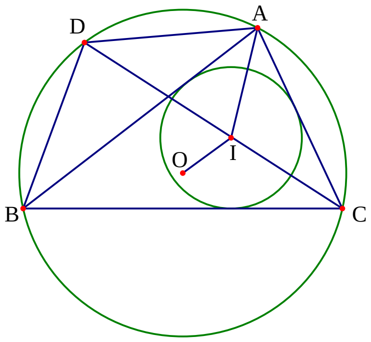
Ví dụ 37. Cho tam giác ABC không cân. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Giả sử giao điểm thứ hai khác C của phân giác ACB với đường tròn (O) nằm trên đường trung trực của đoạn IO. Chứng minh góc ACB lớn thứ hai trong tam giác ABC.

Phân tích tìm lời giải

Yêu cầu chứng minh tương đường với $\text{Min}\left(BAC;\ ABC\right) \le ACB \le \text{Max}\left(BAC;\ ABC\right)$.

Muốn vậy ta cần chứng minh được $ACB = 60^0$, điều này sẽ được khẳng định nếu ta chỉ ra được các tam giác DOB, DOA đều.

Lời giải



Gọi D là giao điểm thứ hai của phân giác góc ACB với (O)

Đầu tiên ta chứng minh $DI = DA = BD$.

Thật vậy, theo tính chất góc ngoài và tính chất đường phân giác ta có

$$DIA = IAC + ICA = \frac{1}{2}\left(BAC + ACB\right)$$

Mặt khác theo tính chất tứ giác nội tiếp và tính chất đườngphân giác ta có

$$DAI = BAI + DCB = \frac{1}{2}\left(BAC + ACB\right)$$

Kết hợp hai điều trên ta được $DIA = DAI$ nên tam giác DAI cân tại D, suy ra $DA = DI$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $BD = DI$.

Do thuộc đường trung trực của đoạn thẳng OI nên ta có $DO = DI$. Từ đó suy ra $DO = DA = DB$.

Từ đó ta dễ dàng có được các tam giác DOB, DOA đều.

Điều này dẫn đến $BOA = 120^0$ nên ta được $ACB = 60^0$

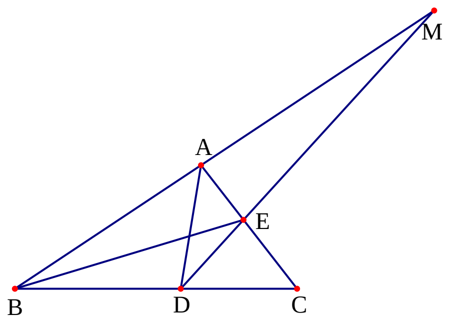
Mà ta lại có $ABC + BAC + ACB = 180^0$ nên dễ thấy

$$\text{Min}\left(\text{BAC};\ \text{ABC}\right) \le 60^0 = \text{ACB} \le \text{Max}\left(\text{BAC};\ \text{ABC}\right)$$

Do đó góc ACB lớn thứ hai trong tam giác ABC

Ví dụ 38. Cho tam giác ABC không cân có AD và BE là đường phân giác. Chứng minh rằng góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng AB và DE không vượt qua $\dfrac{\left|A-B\right|}{3}$.

Phân tích và lời giải



Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử trong tam giác ABC có $A > B$. Gọi M là giao điểm của AB và DE, khi đó góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng AB và DE chính là góc BMD.

Ta cần chứng minh được $\text{BMD} \le \dfrac{1}{2}\left(\text{BAC} - \text{ABC}\right)$

Thật vậy, áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABC với ba điểm M, D, E thẳng hàng ta có

$$\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{DC}{DB}.\frac{EA}{EC}$$

Để ý là AD và BE là các đường phân giác của tam giác ABC nên ta được

$\dfrac{DC}{DB} = \dfrac{AC}{AB};\ \dfrac{EA}{EC} = \dfrac{BA}{BC}$

Từ đó ta được $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{AC}{AB}.\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{CA}{BC}$. Từ đó suy ra CM chính là đường phân giác ngoài tại đỉnh C của tam giác ABC. Do đó ta được $\text{BMC} = 180^0 - \text{MCB} - \text{MBC} = \dfrac{1}{2}\left(\text{BAC} - \text{ABC}\right)$

Do đó suy ra $\text{BMD} + \text{CMD} = \dfrac{1}{2}\left(\text{BAC} - \text{ABC}\right)$.

Giả sử $\text{BMD} > \dfrac{1}{2}\left(\text{BAC} - \text{ABC}\right)$, khi đó rõ ràng ta có

$$\text{CMD} = \frac{1}{2}\left(\text{BAC} - \text{ABC}\right) - \text{BMD} < \frac{1}{6}\left(\text{BAC} - \text{ABC}\right) < \frac{1}{3}\text{BMD}$$

Từ đó ta được $\dfrac{\sin \text{BMD}}{\sin \text{CMD}} > \dfrac{\sin 2\text{CMD}}{\sin \text{CMD}} = \dfrac{2\sin \text{CMD}.\cos \text{CMD}}{\sin \text{CMD}} = 2\cos \text{CMD}$.

Mặt khác áp dụng định lí sin cho các tam giác BMD và CMD ta được

$$\frac{\sin BMD}{\sin CMD}=\frac{\dfrac{BD\sin ABC}{MD}}{\dfrac{CD\sin MCD}{MD}}=\frac{BD\sin ABC}{CD\sin MCD}$$

Lai có $\frac{DB}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sin ACB}{\sin ABC}$ nên ta được $\frac{\sin BMD}{\sin CMD}=\frac{\sin ACB}{\sin ABC}.\frac{\sin ABC}{\sin MCD}=2\sin\frac{ACB}{2}$

Từ đó ta suy ra $\sin\frac{ACB}{2}>\cos CMD=\sin\left(90^0-CMD\right)$

Nên ta được $\frac{ACB}{2}>90^0-CMD\Rightarrow CMD>90^0-\frac{ACB}{2}=\frac{1}{2}\left(BAC+ABC\right)$, điều này vô lí.

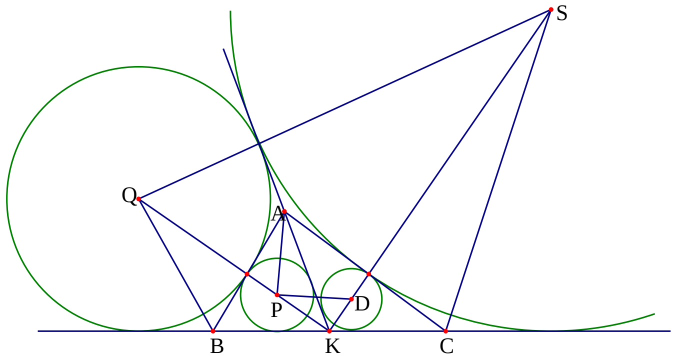
Do đó điều ta giả sử là sai. Nên ta được $BMD\le\frac{1}{2}\left(BAC-ABC\right)$.

Vậy góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng AB và DE không vượt qua $\frac{\left|A-B\right|}{3}$.

Ví dụ 39. Cho tam giác ABC và một điểm K bất kì trên cạnh AC. Gọi P tâm là đường tròn nội tiếp tam giác ABK và Q tâm là đường tròn bàng tiếp góc K của tam giác ABK. Gọi D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCK và S là tâm đường tròn bàng tiếp góc K của tam giác BCK. Chứng minh rằng $KDP>DQP$.

Lời giải

Trước hết ta nhận thấy ba điểm K, P, Q thẳng hàng và ba điểm K, D, S thẳng hàng.



Ta cần chứng minh tứ giác QSDP nội tiếp, điều này tương đường với chứng minh hệ thức $KD.KS=KP.KQ$.

Thật vậy, xét hai tam giác KPB và KAQ có $BKQ=AKQ$.

Mặt khác biến đổi góc ta lại có

$$QAK=QAP+PAK=90^0+\frac{1}{2}BAK=90^0+\frac{1}{2}\left(180^0-ABK-AKB\right)$$

$$=90^0+\left(90^0-\frac{1}{2}ABK-\frac{1}{2}AKB\right)=180^0-PAK-PKB=BPK$$

Do đó hai tam giác KPB và KAQ đồng dạng với nhau.

Từ đó ta được $\frac{KP}{KA}=\frac{KB}{KQ}$ nên ta được $KP.KQ=KA.KB$

Mà ta có $KA=KC$ nên suy ra $KP.KQ=KB.KC$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $KD.KS=KB.KC$

Do đó ta được $KD.KS=KP.KQ$. Điều này có nghĩa là tứ giác QSDP nội tiếp đường tròn.

Do đó suy ra $DSP=DQP$. Mà KDP là góc ngoài của tam giác DSP nên ta được

$KDP>DSP$

Từ đó ta được $KDP>DQP$. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 40. a) Cho n điểm phân biệt $A_1;A_2;A_3;...;A_n$ không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tồn tại không qua một điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M đến $A_1;A_2;A_3;...;A_n$ có giá trị bé nhất.

b) Cho n điểm phân biệt $A_1;A_2;A_3;...;A_n$ cùng nằm trên một đường thẳng. Tìm các điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M đến $A_1;A_2;A_3;...;A_n$ có giá trị bé nhất.

Lời giải

a) Giả sử tồn tại các điểm $M_1;M_2$ thỏa mãn

$$M_1A_1+M_1A_2+...+M_1A_n=M_2A_1+M_2A_2+...+M_2A_n=\text{Min}\left(MA_1+MA_2+...+MA_n\right)=m$$

Gọi M_0 là trung điểm của M_1M_2, khi đó ta có $M_1A_i+M_2A_i\ge 2M_0A_i$ với $i=1;2;...;n$

Vì $A_1;A_2;A_3;...;A_n$ không cùng nằm trên một đường thẳng nên có một điểm A_k trong số các điểm trên không nằm trên đường thẳng M_1M_2. Khi đó ta được $M_1A_k+M_2A_k>M_0A_k$

Khi đó $M_1A_1+M_1A_2+...+M_1A_n+M_2A_1+M_2A_2+...+M_2A_n>M_0A_1+M_0A_2+...+M_0A_n$

Do đó suy ra $2\left(M_0A_1+M_0A_2+...+M_0A_n\right)<2m$ hay

$$M_0A_1+M_0A_2+...+M_0A_n<m=\text{Min}\left(MA_1+MA_2+...+MA_n\right)$$

Điều này là vô lí.

Do đó không qua một điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M đến $A_1;A_2;A_3;...;A_n$ có giá trị bé nhất.

b) Giả sử n điểm phân biệt $A_1;A_2;A_3;...;A_n$ thẳng hàng và sắp xếp theo thứ tự đó. Ta xét hai trường hợp n chẵn và n lẻ.

+ Trường hợp 1: Với n số chẵn, đặt $n=2k$. Khi đó với mọi điểm M ta luôn có

$$MA_1+MA_{2k}\ge A_1A_{2k};\ MA_2+MA_{2k-1}\ge A_2A_{2k-1};...;\ MA_k+MA_{k+1}\ge A_kA_{k+1}$$

Dấu bằng xẩy ra ở các bất đẳng thức trên lần lượt là M thuộc $A_1A_{2k};A_2A_{2k-1};...;A_kA_{k+1}$

Cộng các bất đẳng thức trên ta được

$$MA_1+MA_2+...+MA_{2k-1}+MA_{2k}\ge A_1A_{2k}+A_2A_{2k-1}+...+A_kA_{k+1}$$

Đặt $A_1A_{2k}+A_2A_{2k-1}+...+A_kA_{k+1}=m$ là hằng số

Do đó ta được $MA_1+MA_2+...+MA_{2k-1}+MA_{2k}\ge m$

Dấu bằng xẩy ta khi M đồng thời thuộc các đoạn thẳng $A_1A_{2k};A_2A_{2k-1};...;A_kA_{k+1}$ hay M thuộc đoạn thẳng A_kA_{k+1}.

Vậy $MA_1+MA_2+...+MA_{2k-1}+MA_{2k}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng m khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng A_kA_{k+1}.

+ Trường hợp 2 Với n là số lẻ, đặt $n=2k+1$. Thực hiệm tương tự như trên ta được

$$MA_1+MA_{2k+1}\ge A_1A_{2k+1};\ MA_2+MA_{2k}\ge A_2A_{2k};...;\ MA_k+MA_{k+2}\ge A_kA_{k+2}$$

Dấu bằng xẩy ra ở các bất đẳng thức trên lần lượt là M thuộc $A_1A_{2k+1};A_2A_{2k};...;A_kA_{k+2}$

Từ đó ta được $MA_1+MA_2+...+MA_{2k}+MA_{2k+1}\ge A_1A_{2k+1}+A_2A_{2k}+...+A_kA_{k+2}+MA_{k+1}$

Mà ta lại có $MA_{k+1}\ge 0$ nên ta được

$$MA_1+MA_2+...+MA_{2k}+MA_{2k+1}\ge A_1A_{2k+1}+A_2A_{2k}+...+A_kA_{k+2}$$

Vậy $MA_1+MA_2+...+MA_{2k}+MA_{2k+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $A_1A_{2k+1}+A_2A_{2k}+...+A_kA_{k+2}$

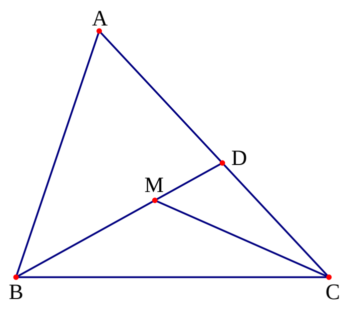
Dấu bằng xẩy ta khi M đồng thời thuộc các đoạn thẳng $A_1A_{2k};A_2A_{2k-1};...;A_kA_{k+1}$ và $MA_{k+1}=0$ hay M trùng với điểm A_{k+1}.

Ví dụ 41. Cho đa giác có 2015 đỉnh là $A_1;A_2;...;A_{2015}$. Giả sử $M_1;M_2$ là hai điểm nằm bên trong đa giác $A_1A_2...A_{2015}$ sao cho $M_1M_2=1$(đvđd). Chứng minh rằng:

$$\left|\left(M_1A_1+M_1A_2+...+M_1A_{2015}\right)-\left(M_2A_1+M_2A_2+...+M_2A_{2015}\right)\right|<2013$$

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và cứng minh bổ đề: Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác, khi đó ta có $MB+MC<AB+AC$.



Thật vậy, giả sử tia BM cắt AC tại D. Khi đó áp dụng bất đẳng thức tam giác cho tam giác ABD có

$BD<AB+AD$

Do đó ta được $MB+MD<AB+AD$. Mà trong tam giác MCD ta lại có $MC<MD+DC$.

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$MB+MD+MC<AB+AD+MD+DC\Rightarrow MB+MC<AB+AC$$

Vậy bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán: Vì M_2 nằm trong đa giác $A_1A_2...A_{2015}$ nên M_2 nằm bên trong của một trong các tam giác

$$M_1A_1A_2;\ M_1A_2A_3;\ M_1A_3A_4;...;\ M_1A_{2015}A_1$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử M_2 thuộc miền trong của tam giác $M_1A_1A_2$, khi đó theo bổ đề trên ta được $M_2A_1 + M_2A_2 < M_1A_1 + M_1A_2$ hay $\left(M_2A_1 + M_2A_2\right) - \left(M_1A_1 + M_1A_2\right) < 0$.

Mặt khác theo bất đẳng thức tam giác ta có

$$M_1A_1 - M_2A_1 < M_1M_2;\ M_1A_2 - M_2A_2 < M_1M_2;...;\ M_1A_{2015} - M_2A_{2015} < M_1M_2$$

Do đó ta được $\left(M_2A_3 + M_2A_4 + ... + M_2A_{2015}\right) - \left(M_1A_3 + M_1A_4 + ... + M_1A_{2015}\right) < 2013M_1M_2$

Từ đó $\left(M_2A_1 + M_2A_2 + ... + M_2A_{2015}\right) - \left(M_1A_1 + M_1A_2 + ... + M_1A_{2015}\right) < 2013M_1M_2 = 2013$

Do vài trò của M_1 và M_2 như nhau nên ta cũng có

$$\left(M_1A_1 + M_1A_2 + ... + M_1A_{2015}\right) - \left(M_2A_1 + M_2A_2 + ... + M_2A_{2015}\right) < 2013$$

Như vậy ta được $\left|\left(M_1A_1 + M_1A_2 + ... + M_1A_{2015}\right) - \left(M_2A_1 + M_2A_2 + ... + M_2A_{2015}\right)\right| < 2013$