

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Viết phương trình mặt cầu

① Dạng 1. Cơ bản $(S): \begin{cases} \square \text{ Tâm } I(a; b; c) \\ \square BK : R \end{cases} \Rightarrow (S): \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}.$

② Dạng 2. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và đi qua điểm A .

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \square \text{ Tâm } I \\ \square BK : R = IA \end{cases} \text{ (dạng 1)}$

③ Dạng 3. Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB , với A, B cho trước.

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \square \text{ Tâm } I \text{ là trung điểm của } AB. \\ \square BK : R = \frac{1}{2} AB \end{cases}$

④ Dạng 4. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với các trục và mp tọa độ.

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \square \text{ Tâm } I \\ \square BK : R = IM \end{cases}$ với M là hình chiếu của I lên trục hoặc mp tọa độ.

⑤ Dạng 5. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) .

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \square \text{ Tâm } I \\ \square BK : R = d[I; (P)] \end{cases}$

$\square$ Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ đến mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ được xác định

bởi công thức:
$$d(M; (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

⑥ Dạng 6. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D .

Phương pháp: Gọi $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì $A, B, C, D \in (S)$ nên tìm được 4 phương trình $\Rightarrow a, b, c, d \Rightarrow (S)$.

⑦ Dạng 7. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua 3 điểm A, B, C và tâm thuộc mp (P) .

Phương pháp: Gọi $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì $A, B, C \in (S)$ nên tìm được 3 phương trình và $I(a; b; c) \in (P)$ là phương trình thứ tư.

Giải hệ bốn phương trình này $\Rightarrow a, b, c, d \Rightarrow (S)$.

⑧ Dạng 8. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r . (dạng này mình sẽ đưa vào bài phương trình mặt phẳng, các bạn học cũng có thể tự tìm để hiểu hơn)

Phương pháp: Dựa vào mối liên hệ $R^2 = d^2_{[I;(P)]} + r^2$ và cần nhớ $C = 2\pi r$ và $S_{\text{cầu}} = \pi r^2$.

Câu 1. (THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1; -4; 3)$ và đi qua điểm $A(5; -3; 2)$.

Lời giải

Mặt cầu có tâm $I(1; -4; 3)$ và đi qua điểm $A(5; -3; 2)$ nên có bán kính $R = IA = 3\sqrt{2}$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 18$.

Câu 2. (Chuyên Sơn La -2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(1; -1; 3)$. Viết phương trình mặt cầu có đường kính AB

Lời giải

Gọi I là tâm của mặt cầu đường kính AB .

Khi đó $I(1;0;2)$.

Bán kính của mặt cầu là: $R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(1-1)^2 + (-1-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{2}$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$.

Câu 3. (Việt Đức Hà Nội 2019) Viết phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?

Lời giải

Vì mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$ nên mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;0)$ và nhận độ dài đoạn thẳng AB là bán kính.

Ta có: $\overline{AB} = (-2; 0; 2)$ $AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Suy ra: $R = 2\sqrt{2}$.

Vậy: $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 8$.

Câu 4. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội -2019) Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 điểm $A(2;0;0), B(1;3;0), C(-1;0;3), D(1;2;3)$. Tính bán kính R của (S) .

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D . Khi đó:

$$\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-3)^2 + c^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a+1)^2 + b^2 + (c-3)^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b = -3 \\ a - c = -1 \\ a - 2b - 3c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0; 1; 1)$$

$$\text{Bán kính: } R = IA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Câu 5. (Sở Bình Phước - 2018) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

Ta có điều kiện xác định mặt cầu là $a^2 + b^2 > c^2$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 + 4m^2 + m^2 - 5m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -5 \\ m > 1 \end{cases}$$

Câu 6. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

Lời giải

Giả sử $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ là phương trình mặt cầu.

Khi đó tâm mặt cầu là $I(2; -m; 0)$, và bán kính $R = \sqrt{4 + m^2 - (3m^2 - 2m)} = \sqrt{-2m^2 + 2m + 4}$ với điều kiện $-2m^2 + 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 2)$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}$

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m bằng 1.

Câu 7. (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 2), B(3; 2; -3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc Ox và đi qua hai điểm A, B

Lời giải

Gọi $I(a; 0; 0) \in Ox \Rightarrow IA(1-a; 1; 2); IB(3-a; 2; -3)$

Do (S) đi qua hai điểm A, B nên $IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(1-a)^2 + 5} = \sqrt{(3-a)^2 + 13}$
 $\Leftrightarrow 4a = 16 \Leftrightarrow a = 4$

$\Rightarrow (S)$ có tâm $I(4; 0; 0)$, bán kính $R = IA = \sqrt{14}$

$\Rightarrow (S): (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2 = 0$.

Câu 8. (Chuyên Nguyễn Đình Thi - Đồng Tháp - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Một mặt cầu (S') có tâm $I'(9; 1; 6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu (S) .

Viết phương trình mặt cầu (S')

Lời giải

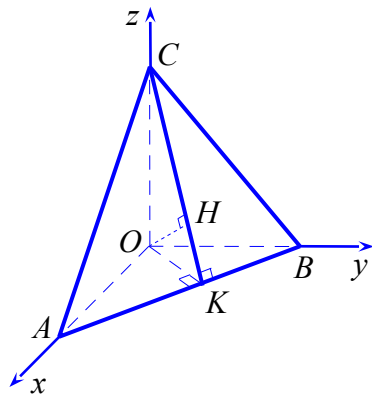
Gọi $I(1;1;0), R=2$. $II'=10$.

Gọi R' là bán kính của mặt cầu (S') . Theo giả thiết, ta có $R'+R=II' \Leftrightarrow R'=II'-R=8$.

Khi đó phương trình mặt cầu (S') : $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=64$.

Câu 9. (Toán Học Tuổi Trẻ 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC . Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) .

Lời giải



Ta có H là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow OH \perp (ABC)$.

Thật vậy :

$$\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp AB \quad (1)$$

Mà $CH \perp AB$ (vì H là trực tâm tam giác ABC) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp (OHC) \Rightarrow AB \perp OH$ (*)

Tương tự $BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp OH$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $OH \perp (ABC)$.

Khi đó mặt cầu tâm O tiếp xúc mặt phẳng (ABC) có bán kính $R=OH=3$.

Vậy mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) là $(S): x^2+y^2+z^2=9$.

Câu 10. (THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2018) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S) . Mặt cầu (S) tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ

$$d(I, (O_{xy})) = d(I, (O_{yz})) = d(I, (O_{xz})) \Leftrightarrow |a| = |b| = |c| = R \quad (1)$$

Mặt cầu (S) đi qua $A(1; -1; 4)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} IA = R \\ a > 0; c > 0; b < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = R^2 \\ a > 0; c > 0; b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-4)^2 = R^2 \\ a = c = -b = R > 0 \quad (do(1)) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (-a+1)^2 + (a-4)^2 = a^2 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 12a + 18 = 0 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 6a + 9 = 0 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 3 \\ b = -3 \\ R = 3 \end{cases} &\Rightarrow (S): (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9 \end{aligned}$$

Dạng 2. Vị trí tương đối mặt phẳng với mặt cầu, đường thẳng

Vị trí tương đối giữa mặt phẳng (P) và mặt cầu (S)

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (P) .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

và có $d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) . Khi đó:

- ⊂ Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.
- ⊂ Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu.

Lúc đó (P) là mặt phẳng tiếp diện của (S) và H là tiếp điểm.

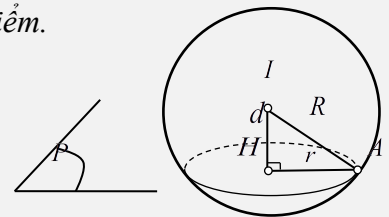
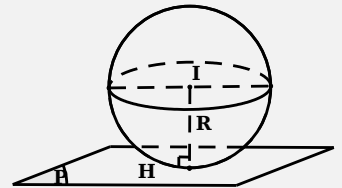
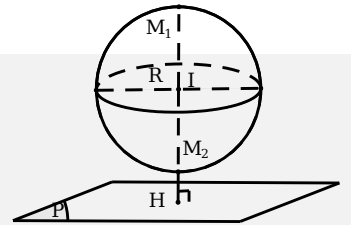
- ⊂ Nếu $d < R$: mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện

là đường tròn có tâm H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$.

Viết phương trình mặt $(P) \parallel (Q): ax + by + cz + d = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu (S) .

Phương pháp:

- ⊂ $V_l(P) \parallel (Q): ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow (P): ax + by + cz + d' = 0$.
- ⊂ Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu.
- ⊂ Vì (P) tiếp xúc (S) nên có $d_{[I, (P)]} = R \Rightarrow d'$.



Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ O_{xyz} , viết mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 2 = 0$

Lời giải

Vì mặt cầu tâm $I(-1; 2; 1)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 2 = 0$ nên bán kính

$$R = d(I, (P)) = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 3 \Rightarrow (S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$$

Câu 12. (Chuyên Nguyễn Huệ- 2019) Viết phương trình mặt cầu tâm $I(3; -2; 4)$ và tiếp xúc với
Lời giải

Ta có:
$$d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 3 - (-2) + 2 \cdot 4 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{20}{3}.$$
 Suy ra mặt cầu tâm $I(3; -2; 4)$ và tiếp xúc với
 $(P): 2x - y + 2z + 4 = 0$ có bán kính $R = \frac{20}{3}.$

Phương trình mặt cầu tâm $I(3; -2; 4)$, bán kính $R = \frac{20}{3}$ là:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = \frac{400}{9}.$$

Câu 13. (Sở Hà Nội 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$
Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 11 = 0$

Lời giải

Ta gọi phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 11 = 0$ có dạng :
 $(Q): 2x - y + 2z + D = 0, (D \neq -11)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2 - 5} = 3$

Vì mặt phẳng tiếp xúc với (S) nên ta có :

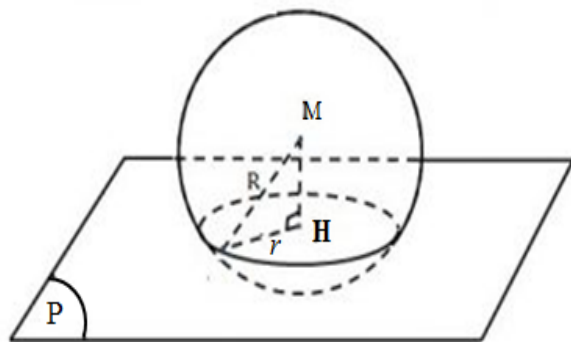
$$d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot (-1) - 2 + 2 \cdot 3 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|2 + D|}{3} = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + D = 9 \\ 2 + D = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 7 \\ D = -11 \end{cases}. \text{ Do } D \neq -11 \Rightarrow D = 7.$$

Vậy mặt phẳng cần tìm là $2x - y + 2z + 7 = 0$.

Câu 14. (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 1 = 0$ và điểm $M(1; -2; 0)$. Mặt cầu tâm M , bán kính bằng $\sqrt{3}$ cắt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Lời giải



Mặt cầu tâm M , bán kính bằng $R = \sqrt{3}$ cắt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm H , bán kính r suy ra $r = \sqrt{R^2 - MH^2}$.

Với $MH = d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - (-2) - 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 1$. Suy ra $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$.

Câu 15. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-1; 2; 1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y - 2z + 8 = 0$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P)

Lời giải

Vì mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) :

$$\Rightarrow R = d(I; (P)) = \frac{|-1 + 4 - 2 + 8|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 3$$

Vậy: $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình của mặt cầu có tâm $I(0; 1; 3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$?

Lời giải

Ta có: Bán kính mặt cầu là: $R = d(I; (P)) = \frac{|-1 - 6 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 3$.

Phương trình mặt cầu là: $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$.

Câu 17. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$, mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α) , (P) song song với giá của vectơ $v = (1; 6; 2)$ và (P) tiếp xúc với (S) . Lập phương trình mặt phẳng (P) .

Lời giải

(S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và bán kính $R = 4$. Véc tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_\alpha = (1; 4; 1)$.

Suy ra VTPT của (P) là $\vec{n}_P = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Do đó (P) có dạng: $2x - y + 2z + d = 0$.

Mặt khác (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I, (P)) = 4$

$$\text{Hay } \frac{|2 + 3 + 4 + d|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 4 \Rightarrow \begin{cases} d = -21 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy (P) cần tìm là $2x - y + 2z + 3 = 0$ và $2x - y + 2z - 21 = 0$.

Câu 18. (THPT Nam Trực - Nam Định - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song với mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 7 = 0$. Biết $mp(Q)$ cắt mặt cầu $(S): x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 25$ theo một đường tròn có bán kính $r = 3$. Viết phương trình mặt phẳng (Q)

Lời giải

Do mặt phẳng $(Q) \parallel (P): 2x - 2y + z - 7 = 0$, suy ra $(Q): 2x - 2y + z + m = 0, (m \neq -7)$.

Ta có $(S): x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 25$ có tâm $I(0; 2; -1)$ bán kính $R = 5$.

$$\text{Gọi } h = d_{(I, (Q))} = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 2 - 1 + m|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|m - 5|}{3}$$

Do (Q) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r = 3$, suy ra: $R^2 = r^2 + h^2$

$$\Leftrightarrow 25 = 9 + \frac{(m - 5)^2}{9} \Leftrightarrow (m - 5)^2 = 144 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 5 = 12 \\ m - 5 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 17 \\ m = -7 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy $mp(Q)$ có phương trình: $2x - 2y + z + 17 = 0$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x}{2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z - 2}{1}$ và hai mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z = 0$; $(Q): x - 2y + 3z - 5 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) . Viết phương trình mặt cầu (S) .

Lời giải

Ta có: $I \in (d) \Rightarrow I(2t; 3 + t; 2 + t)$.

$$I \in (P) \Rightarrow (P): 2t - 2(3 + t) + 2(2 + t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(2; 4; 3)$$

$$(Q) \text{ tiếp xúc với } (S) \text{ nên } R = d(I, (Q)) = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

Vậy $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{7}$.

Câu 20. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3; 3; -3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua M , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ .

Lời giải

Ta có: Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; 5)$, bán kính $R = 10$.

$$d(I, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 5 + 15|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 6 < R \Rightarrow (\alpha) \cap (S) = C(H; r), H \text{ là hình chiếu của } I \text{ lên } (\alpha).$$

Gọi Δ_1 là đường thẳng qua I và vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow \Delta_1$ có VTCP là $\vec{u}_{\Delta_1} = (2; -2; 1)$.

$$\Rightarrow \text{PTTS } \Delta_1: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases} \text{ . Tọa độ } H \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \\ 2x - 2y + z + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \\ z = 3 \end{cases} \\ \Rightarrow H(-2; 7; 3)$$

Ta có AB có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow AB$ là đường kính của $(C) \Leftrightarrow \Delta \equiv MH$.

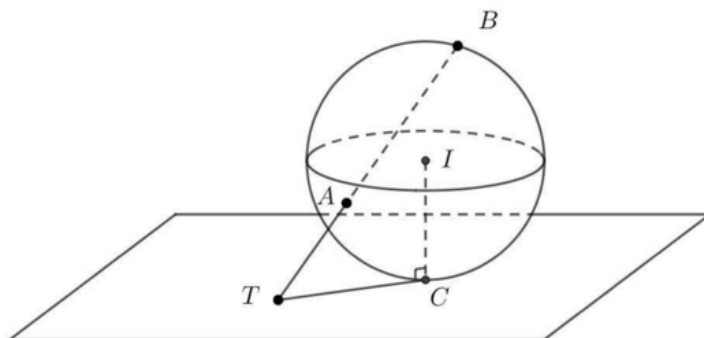
Đường thẳng MH đi qua $M(-3; 3; -3)$ và có VTCP $\vec{MH} = (1; 4; 6)$.

$$\Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}.$$

Suy ra phương trình

Câu 21. (Chuyên Hạ Long 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 2x + y + 2z - 1 = 0$, $A(0; 0; 4), B(3; 1; 2)$. Một mặt cầu (S) luôn đi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại C . Biết rằng, C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính r . Tính bán kính r của đường tròn đó.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB}(3;1;-2)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB .

Phương trình tham số của đường thẳng AB là
$$\begin{cases} x=3t \\ y=t \\ z=4-2t \end{cases}$$
.

Giả sử AB cắt (P) tại $T(3t;t;4-2t)$. Do $T \in (P): 2x+y+2z-1=0 \Rightarrow t=\frac{-7}{3}$.

Khi đó

$$T\left(-7;-\frac{7}{3};\frac{26}{3}\right); \overrightarrow{TA}\left(7;\frac{7}{3};-\frac{14}{3}\right) \Rightarrow TA=\frac{7\sqrt{14}}{3}; \overrightarrow{TB}\left(10;\frac{10}{3};-\frac{20}{3}\right) \Rightarrow TB=\frac{10\sqrt{14}}{3}$$

Ta có $TC^2=TA.TB=\frac{980}{9} \Rightarrow TC=\frac{14\sqrt{5}}{3}$.

Điểm C thuộc mặt phẳng (P) và cách điểm T cố định một khoảng $\frac{14\sqrt{5}}{3}$.

Vậy C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính $r=\frac{14\sqrt{5}}{3}$.

Câu 22. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ với, $A(1;2;3)$, $B(3;1;2)$, $C(4;2;3)$, $D(2;3;4)$. Gọi I là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp. Tính khoảng cách d từ I đến mặt phẳng (SAD) .

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-1;-1)$, $\overrightarrow{AD}=(1;1;1)$ và $\overrightarrow{DC}=(2;-1;-1)$.

Ta thấy: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=2.1-1.1-1.1=0$ và $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ nên tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

Gọi M là trung điểm của AC . Ta có: $M\left(\frac{5}{2};2;3\right)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

Ta có: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]=(0;-3;3)$.

Vector chỉ phương của đường thẳng d là: $u=(0;-1;1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=2-t \\ z=3+t \end{cases}$$
.

Ta có: $\vec{SA} = (0; 3; -3)$. Ta thấy $\vec{SA}$ cùng phương với u nên suy ra $SA \perp (ABCD)$.

Gọi N là trung điểm của SA , ta có: $N\left(1; \frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Do $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ nên

$$\begin{cases} I \in d \\ NI \perp d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I\left(\frac{5}{2}; 2-t; 3+t\right) \\ NI \perp u \end{cases}$$

Mà: $\vec{NI} = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}-t; -\frac{3}{2}+t\right)$. Suy ra: $\vec{NI} \cdot u = 0 \Leftrightarrow t - \frac{3}{2} + t - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Ta có: $[\vec{SA}, \vec{AD}] = (6; -3; -3)$.

Một vector pháp tuyến của (SAD) là: $\vec{n} = \frac{1}{6}[\vec{SA}, \vec{AD}] = (2; -1; -1)$.

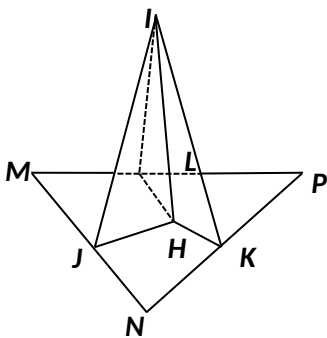
Phương trình tổng quát của mặt phẳng (SAD) là:

$$2(x-1) - (y-2) - (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z + 3 = 0$$

$$\text{Vậy } d(I, (SAD)) = \frac{\left|2 \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - \frac{9}{2} + 3\right|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6; 0; 0)$, $N(0; 6; 0)$, $P(0; 0; 6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 2z + 1 = 0$ cắt nhau theo đường tròn (C) . Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN , NP , PM ?

Lời giải



Nếu điểm $A(x; y; z)$ thuộc (C) thì

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x - 2y - z = 0$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) chứa đường tròn (C) là $3x - 2y - z = 0$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là $x + y + z - 6 = 0$.

Gọi I là tâm mặt cầu thỏa bài toán, H là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (MNP) , J, K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các đường thẳng MN, NP, PM . Ta có $IJ = IK = IL \Rightarrow HJ = HK = HL$.

Suy ra I thuộc đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp hoặc tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác MNP và vuông góc với mặt phẳng (MNP) .

Hình chóp $OMNP$ là hình chóp đều nên đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác MNP và vuông góc với mặt phẳng (MNP) cũng chính là đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (MNP) .

Phương trình đường thẳng d là $x = y = z$.

Dễ thấy $d \subset (\alpha)$ suy ra mọi điểm thuộc d đều là tâm của một mặt cầu thỏa bài toán. Vậy có vô số mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM .

Câu 24. Trong không gian cho mặt phẳng $(P): x - z + 6 = 0$ và hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z + 7 = 0$. Biết rằng tập hợp tâm I các mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ và tâm I nằm trên (P) là một đường cong. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó.

Lời giải

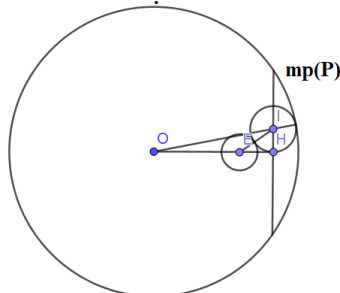
Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0; 0; 0)$ và bán kính $R_1 = 5$. Mặt cầu (S) có tâm $E(-2; 0; 2)$ bán kính

$R_2 = 1$. Ta có $d(O, (P)) = \frac{6}{\sqrt{2}} < R_1$ và $d(E, (P)) = \sqrt{2} > R_2$, $OE = 2\sqrt{2}$, $OE + R_2 < R_1$ nên mặt cầu (S_2) nằm trong mặt cầu (S_1) . Như vậy mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với cả (S_1) và (S_2) thì (S) tiếp xúc trong mặt cầu (S_1) và tiếp xúc ngoài với (S_2) . Gọi R là bán kính của (S) khi đó

$$\begin{cases} OI + R = R_1 \\ EI - R = R_2 \end{cases} \Rightarrow OI + EI = R_1 + R_2 \Rightarrow OI + EI = 6$$

ta có hệ

Hình vẽ minh họa



Nhận xét: $\vec{OE} = (-2; 0; 2)$ nên OE vuông góc với $(P): x - z + 6 = 0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (P) , đặt $IH = x$, điều kiện $x > 0$. Khi đó ta có

$$OI + EI = 6 \Leftrightarrow \sqrt{OH^2 + HI^2} + \sqrt{EH^2 + HI^2} = 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{18 + x^2} + \sqrt{2 + x^2} = 6 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{9} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Vậy điểm I thuộc đường tròn tâm H bán kính $r = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn là:

$$S = \pi r^2 = \frac{7\pi}{9}$$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu:

$$(S_m): x^2 + y^2 + z^2 + (m+2)x + 2my - 2mz - m - 3 = 0$$

Biết rằng với mọi số thực m thì (S_m) luôn chứa một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

Lời giải

Mặt cầu (S_m) có tâm $I\left(-\frac{m+2}{2}; -m; m\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{9m^2 + 8m + 16}}{2}$.

Với m_1, m_2 tùy ý và khác nhau, ta được hai phương trình mặt cầu tương ứng:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + (m_1 + 2)x + 2m_1y - 2m_1z - m_1 - 3 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 + (m_2 + 2)x + 2m_2y - 2m_2z - m_2 - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế, ta được:

$$(m_1 - m_2)x + 2(m_1 - m_2)y - 2(m_1 - m_2)z - (m_1 - m_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m_1 - m_2)(x + 2y - 2z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - 2z - 1 = 0 \quad (3)$$

Dễ thấy (3) là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

$\Rightarrow$ Họ mặt cầu (S_m) có giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) cố định có phương trình: $x + 2y - 2z - 1 = 0$.

$$d = d[I, (P)] = \frac{\left| -\frac{m+2}{2} - 2m - 2m - 1 \right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-9m - 4|}{6}$$

Mặt khác, đặt

$$\Rightarrow r^2 = R^2 - d^2 = \frac{9m^2 + 8m + 16}{4} - \frac{(-9m - 4)^2}{36} = \frac{32}{9} \quad \forall m \in \mathbb{R} \quad \text{Vậy } r = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Câu 26. (THPT Kim Liên - Hà Nội - 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 5 = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -2)$. Biết (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi 8π . Tìm bán kính của mặt cầu (T) chứa đường tròn (C) và (T) đi qua điểm $M(1; 1; 1)$.

Lời giải

Đường tròn (C) có chu vi 8π nên có bán kính $r = 4$.

Gọi J là tâm của mặt cầu (T) , theo đề ta có (P) cắt (S) và (T) theo cùng một giao tuyến là đường tròn (C) do đó $IJ \perp (P)$.

Đường thẳng IJ đi qua điểm I và nhận vector $\vec{n}_{(P)} = (2; 2; 1)$ làm vector chỉ phương nên có

$$\text{phương trình } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Suy ra $J(1 + 2t; 2 + 2t; -2 + t)$.

$$\text{Ta có: } d = d(J; (P)) = \frac{|2(1 + 2t) + 2(2 + 2t) - 2 + t + 5|}{3} = \frac{|9t + 9|}{3} = 3|t + 1|$$

$$\text{Bán kính của mặt cầu } (T): R = JM = \sqrt{4t^2 + (2t + 1)^2 + (t - 3)^2}$$

$$\text{Ta có: } d^2 + r^2 = R^2 \Leftrightarrow 9(t + 1)^2 + 16 = 4t^2 + (2t + 1)^2 + (t - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 + 18t + 25 = 9t^2 - 2t + 10 \Leftrightarrow 20t = -15 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy bán kính của mặt cầu } (T) \text{ là } R = \frac{\sqrt{265}}{4}$$

Câu 27. (Chuyên Sơn La 2022) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ :

$$\begin{cases} x = 1 + 3a + at \\ y = -2 + t \\ z = 2 + 3a + (1 + a)t \end{cases} \text{ . Biết rằng khi } a \text{ thay đổi thì luôn tồn tại một mặt cầu cố định đi qua điểm } M(1; 1; 1) \text{ và tiếp xúc với đường thẳng } \Delta \text{ . Tìm bán kính của mặt cầu đó.}$$

Lời giải

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 3a + at \\ y = -2 + t \\ z = 2 + 3a + (1 + a)t \end{cases} \Rightarrow x + y - z = -3$$

Ta có: . Thế $t = -3$ vào ta thu được: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \\ z = -1 \end{cases}$

Khi đó ta suy ra rằng Δ luôn qua điểm $A(1; -5; -1)$ cố định, và nằm trong mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$. Mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng Δ với mọi a nên mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại A .

Đường thẳng IA vuông góc với (P) có phương trình là:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -5 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Mà $IA = IM$ nên $t^2 + t^2 + t^2 = t^2 + (t - 6)^2 + (t + 2)^2 \Leftrightarrow t = 5 \Rightarrow I(6; 0; -6) \Rightarrow R = IM = 5\sqrt{3}$

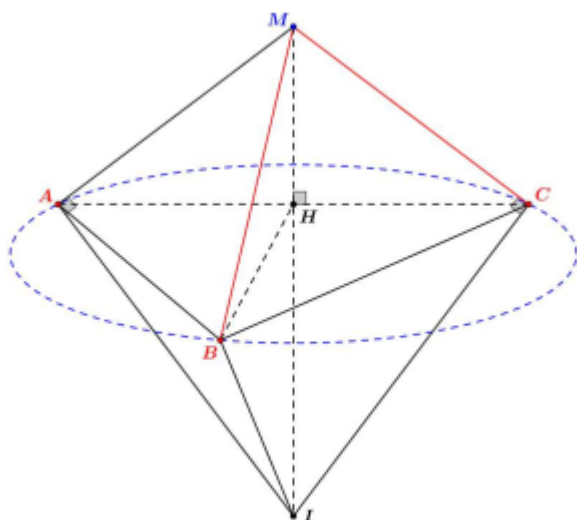
Vậy bán kính của mặt cầu cần tìm là bằng $5\sqrt{3}$.

Câu 28. (Chuyên Biên Hòa – Hà Nam 2022) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 48$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}}$. Điểm $M(a; b; c), (a > 0)$

nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) , (A, B, C là các tiếp điểm) và $\angle AMB = 60^\circ, \angle BMC = 90^\circ, \angle CMA = 120^\circ$. Tính $Q = a + b + c$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 3)$, bán kính $R = 4\sqrt{3}$.

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt cầu (S) .

Đặt $MA = MB = MC = x$ khi đó $AB = x, BC = x\sqrt{2}, CA = x\sqrt{3}$ do đó $\triangle ABC$ vuông tại B nên trung điểm H của AC là tâm đường tròn (C) và H, I, M thẳng hàng.

Vì $\angle CMA = 120^\circ$ nên $\triangle AIC$ đều do đó $x\sqrt{3} = R \Leftrightarrow x = AM = 4$ suy ra $IM = 2AM = 2x = 8$.

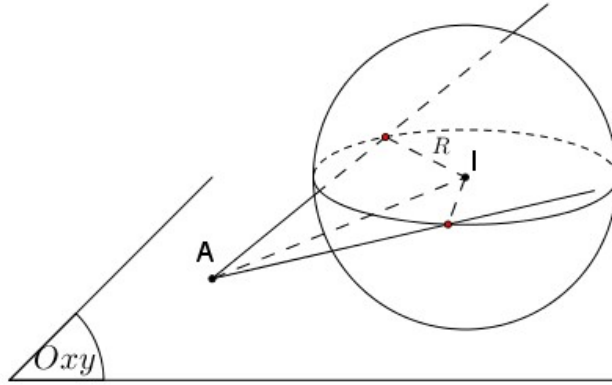
Lại có $M \in d$ nên $M(-1+t; 2+t; 3+\sqrt{2}t), (t > 1)$.

Mà $IM = 8$ nên $t^2 + t^2 + (\sqrt{2}t)^2 = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -4 \end{cases} \Rightarrow M(3; 6; 3+4\sqrt{2}) \Rightarrow a + b + c = 6 + 4\sqrt{2}$.

Dạng 3. Một số bài toán liên quan đến mặt cầu (tiếp tuyến, khoảng cách,...)

Câu 29. (Mã 104 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a, b, c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

Lời giải



Mặt cầu có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Vì $A \in (Oxy)$ nên $c = 0$. Các giao tuyến của A đến mặt cầu (nếu $IA > R$) tạo nên một mặt nón tâm A , để mặt nón này có hai đường sinh vuông góc thì góc của mặt nón này phải $\geq 90^\circ$ hay $IA \leq R\sqrt{2}$.

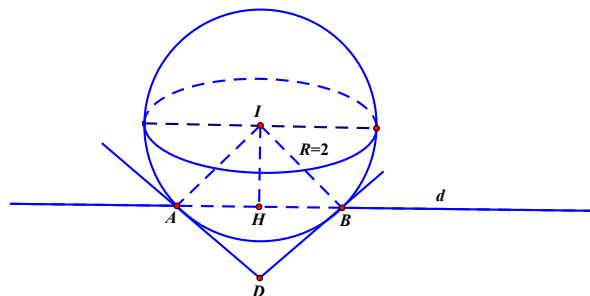
$$\text{Vậy } R \leq IA \leq R\sqrt{2} \Leftrightarrow 5 \leq a^2 + b^2 + 1 \leq 10 \Leftrightarrow 4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$$

Ta có các bộ số thỏa mãn $(0; \pm 2); (0; \pm 3); (\pm 1; \pm 2); (\pm 2; \pm 2); (\pm 2; \pm 1); (\pm 2; 0); (\pm 3; 0)$, 20 bộ số.

Câu 30. (Mã 102-2023) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 4$ và đường thẳng d đi qua $A(1; 0; -2)$, nhận $u = (1; a; 4 - a)$ ($a \in \mathbb{R}$) làm vector chỉ phương. Biết rằng d cắt (S) tại hai điểm phân biệt mà tiếp diện của (S) tại hai điểm đó vuông góc với nhau. Tính a^2

Lời giải

Ta có:



$$(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 4 \quad \text{có} \quad (S): \begin{cases} I(1; -2; -1) \\ R = 2 \end{cases}$$

Đường thẳng d đi qua $A(1; 0; -2)$, nhận $u = (1; a; 4 - a)$ (với $a \in \mathbb{R}$) làm vector chỉ phương

$$\Rightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = at \\ z = -2 + (4 - a)t \end{cases}$$

$$\vec{IA} = (0; 2; -1)$$

$$u = (1; a; 4 - a) \Rightarrow |u| = \sqrt{2a^2 - 8a + 17}$$

$$[\vec{IA}, u] = (8 - a; -1; -2) \Rightarrow \left| [\vec{IA}, u] \right| = \sqrt{a^2 - 16a + 69}$$

Giả sử đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng tiếp diện lần lượt tại A và $B \Rightarrow ((P), (Q)) = 90^\circ$.

$(P) \cap (Q) = d_1$. Gọi D là hình chiếu của I xuống d_1 .

Dễ thấy $(IAB) \perp d_1$ mà $ID \perp d_1 \Rightarrow D \in (IAB)$

+) Vì $(IAB) \perp d_1 \Rightarrow \angle ADB = ((P), (Q)) = 90^\circ$.

Nên suy ra tứ giác $AIBD$ là hình vuông cạnh bằng 2. Gọi H là trung điểm AB .

$$\Rightarrow IH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Mà $IH = d(I; (d))$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{\left| [\vec{IA}, u] \right|}{|u|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2 - 16a + 69}}{\sqrt{2a^2 - 8a + 17}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 - 16a + 69 = 2(2a^2 - 8a + 17)$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 35 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{35}{3} \approx 11,66667$$

Câu 31. (Mã 103 - 2023) Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có tâm $I(5; 6; 12)$ và bán kính R thay đổi. Có bao nhiêu giá trị nguyên của R sao cho ứng với mỗi giá trị đó, tồn tại hai tiếp tuyến của (S) trong mặt phẳng (Oyz) mà hai tiếp tuyến đó cùng đi qua O và góc giữa chúng không nhỏ hơn 60° ?

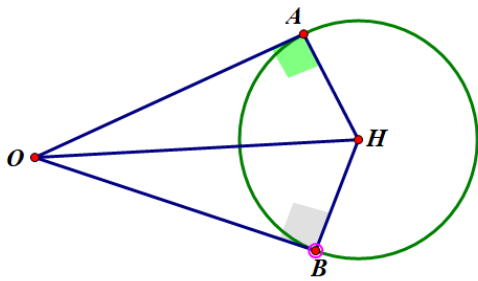
Lời giải

Gọi $H(0; 6; 12)$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (Oyz) .

Khi đó H là tâm đường tròn (C) , với (C) là giao tuyến của (S) và (Oyz) .

Khi đó (C) có bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{R^2 - 25}$.

Gọi A, B là hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến kẻ từ O đến (C)

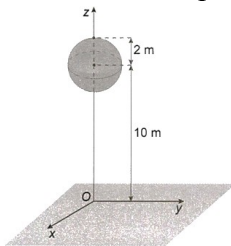


Theo giả thiết:

$$\begin{aligned}
 60^\circ \leq \angle AOB \leq 120^\circ &\Leftrightarrow 30^\circ \leq \angle AOH \leq 60^\circ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \sin \angle AOH \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{AH}{OH} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{R^2 - 25}}{6\sqrt{5}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 70 \leq R^2 \leq 160 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{70} \leq R \leq \sqrt{160} \Rightarrow R \in [9; 10; 11; 12].
 \end{aligned}$$

Dạng 4. Ứng dụng

Câu 32. Một quả bóng hình cầu có bán kính 2 m được treo lơ lửng trên một mặt đất phẳng. Tâm quả bóng cách mặt đất 10 m. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O là hình chiếu vuông góc của tâm quả cầu trên mặt đất, tia Oz chứa tâm của quả cầu, các trục Ox, Oy thuộc mặt đất như hình vẽ. Viết phương trình của mặt cầu bề mặt quả bóng.



Lời giải

Tâm của mặt cầu là $I(0; 0; 10)$. Phương trình của mặt cầu bề mặt quả bóng là:
 $(S): x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = 4$.

Câu 33. Phần mềm mô phỏng thiết bị thám hiểm đại dương có dạng hình cầu trong không gian $Oxyz$. Cho biết tọa độ tâm mặt cầu là $I(360; 200; 400)$ và bán kính $r = 2$ m. Viết phương trình mặt cầu.



Lời giải

Phương trình mặt cầu là $(x - 360)^2 + (y - 200)^2 + (z - 400)^2 = 4$.

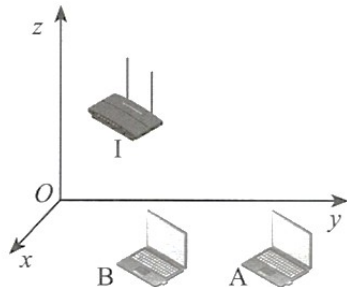
Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, trong khoảng thời gian từ 0 đến 1, một vật thể chuyển động sao cho tại mỗi thời điểm $t \in [0; 1]$, vật thể đó ở vị trí $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t; \sqrt{\sqrt{2}\sin t \cos t}; \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t - \cos t\right)$. Hỏi trong quá trình chuyển động nói trên, vật thể có luôn thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ hay không?

Lời giải

Ta có:
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)^2 + (\sqrt{\sqrt{2}\sin t \cos t})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t - \cos t\right)^2 - 1$$
$$= \frac{1}{2}\sin^2 t + \sqrt{2}\sin t \cos t + \frac{1}{2}\sin^2 t - \sqrt{2}\sin t \cos t + \cos^2 t - 1 = 0$$

Do đó trong quá trình chuyển động, vật thể luôn thuộc mặt cầu (S) .

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một router phát sóng wifi có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(4; 2; 10)$.



a) Cho biết bán kính phủ sóng wifi là 40 m. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.

b) Một người sử dụng máy tính tại điểm $M(6; 12; 0)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên hay không.

c) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng máy tính ở điểm $N(14; 6; 50)$.

Lời giải

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(4; 2; 10)$, bán kính $R = 40$ nên có phương trình là:

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 10)^2 = 1600.$$

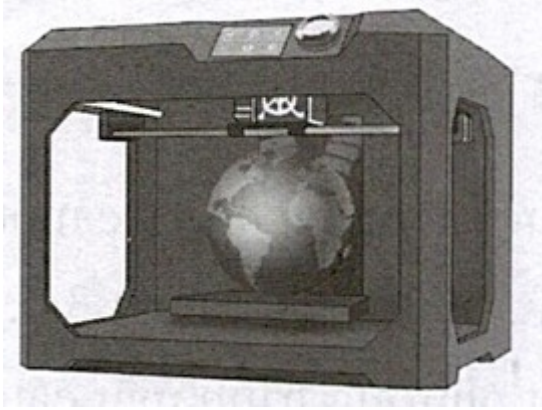
b) Ta có $IM = \sqrt{2^2 + 10^2 + (-10)^2} = \sqrt{204} \approx 14,3 < 40$, suy ra $IM < R$. Do đó, điểm M nằm trong mặt cầu (S) .

Vậy người đó có thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên.

c) Ta có $IN = \sqrt{10^2 + 4^2 + 40^2} = \sqrt{1716} \approx 41,4 > 40$, suy ra $IN > R$. Do đó, điểm N nằm ngoài mặt cầu (S) .

Vậy người đó không thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên.

Câu 36. Trong không gian O_{xyz} (đơn vị trên các trục là centimét). Đầu in phun của một máy in 3 D đang in bề mặt của một mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$.



Tìm:

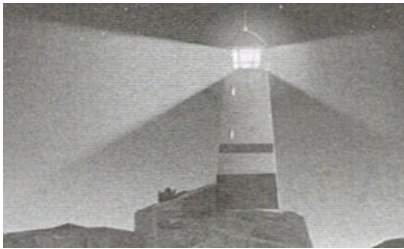
- a) tọa độ tâm và bán kính của tâm mặt cầu;
- b) khoảng cách từ đầu in phun đến tâm của mặt cầu.

Lời giải

a) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a=1; b=2; c=2; d=0$, suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2 - 0} = 3$.

b) Khoảng cách từ đầu in phun đến tâm mặt cầu bằng bán kính của mặt cầu là $3(cm)$.

Câu 37. Trong không gian O_{xyz} (đơn vị trên các trục tọa độ là mét), một ngọn hải đăng có bóng đèn đặt tại điểm $I(20; 40; 60)$.



- a) Cho biết bán kính phủ sáng của đèn trên hải đăng là 3 km, viết phương trình mặt cầu biểu diễn ranh giới của vùng phủ sáng của hải đăng trong không gian.
- b) Một người đi biển đang ở vị trí $M(420; 340; 0)$. Người đó có thể nhìn thấy được ánh sáng của hải đăng hay không? Giải thích.

Lời giải

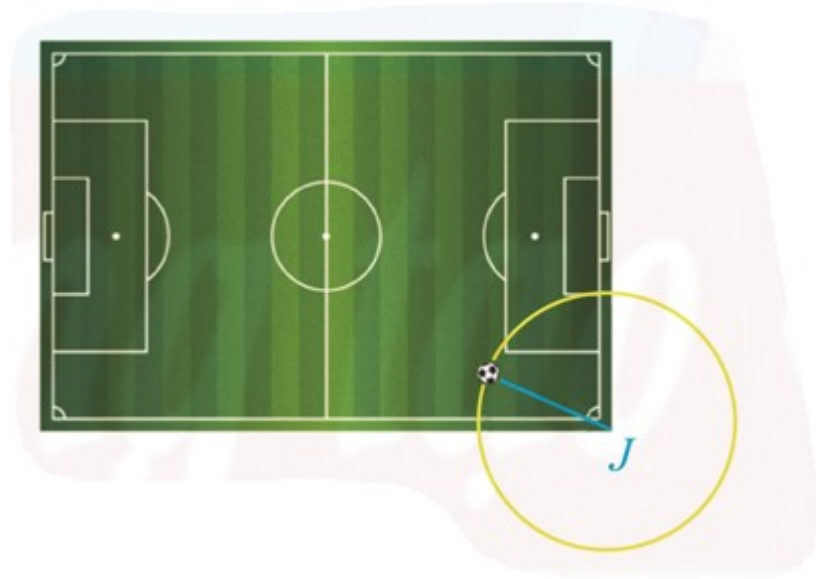
a) Gọi (S) là mặt cầu biểu diễn ranh giới của vùng phủ sáng của đèn trên hải đăng trong không gian O_{xyz} .

Mặt cầu (S) có tâm $I(20; 40; 60)$ và bán kính $R = 3000$, suy ra (S) có phương trình: $(x - 20)^2 + (y - 40)^2 + (z - 60)^2 = 9000000$.

b) Ta có $IM = \sqrt{400^2 + 300^2 + (-60)^2} = 20\sqrt{634} \approx 504 < 3000$, suy ra $IM < R$.

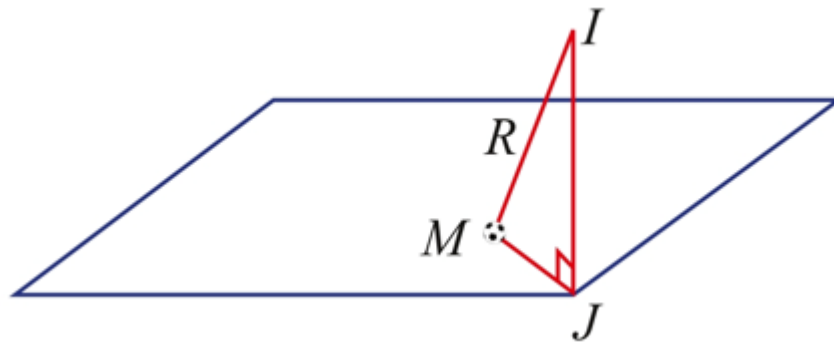
Do đó, người này có thể nhìn thấy được ánh sáng của đèn trên hải đăng.

Câu 38. Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của quả bóng M . Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z=0$, đồng thời thuộc mặt cầu $(S): (x-32)^2 + (y-50)^2 + (z-10)^2 = 109$ (đơn vị độ dài tính theo mét).



- Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc J của tâm I trên mặt sân.
- Tính khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J .

Lời giải



- Mặt cầu (S) có phương trình

$(x-32)^2 + (y-50)^2 + (z-10)^2 = 109$ nên có tâm $I(32;50;10)$ và bán kính $R = \sqrt{109}$.

- Trong không gian $Oxyz$, mặt sân có phương trình $z=0$ trùng với mặt phẳng tọa độ (Oxy) , suy ra hình chiếu vuông góc của điểm $I(32;50;10)$ xuống mặt sân có tọa độ $J(32;50;0)$.

- Trong tam giác vuông IJM , ta có $IJ=10, IM=R$, suy ra

$$JM = \sqrt{IM^2 - IJ^2} = \sqrt{109 - 100} = 3.$$

Vậy khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là $3m$.

Câu 39. Trong không gian O_{xyz} (đơn vị của các trục tọa độ là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6; -1; 4)$.



- a) Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km . Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.
- b) Một người sử dụng điện thoại tại điểm $M(-5; -2; 5)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên hay không.
- c) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng điện thoại ở điểm $N(-1; 0; 1)$.

Lời giải

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-6; -1; 4)$ và bán kính $R=2$ nên có phương trình:

$(x+6)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 4$. b) Ta có $IM = \sqrt{3} < R$, suy ra điểm M nằm trong mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên.

c) Ta có $IN = \sqrt{35} > R$, suy ra điểm N nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó không thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên.

Câu 40. Trong không gian O_{xyz} , một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(2; 0; 0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 1. Hỏi vị trí $M(2; 1; 1)$ có thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên hay không?

Lời giải

Ta có $A(2; 0; 0), M(2; 1; 1) \Rightarrow AM = \sqrt{2} > 1$. Do đó, vị trí của điểm M không thuộc vùng phủ sóng.

Câu 41. Nếu đứng trước biển và nhìn ra xa, người ta sẽ thấy một đường giao giữa mặt biển và bầu trời, đó là đường chân trời đối với người quan sát (H.5.45a). Về mặt Vật lý, đường chân trời là đường giới hạn phần Trái Đất mà người quan sát có thể nhìn thấy được (phần còn lại bị chính Trái Đất che khuất). Ta có thể hình dung rằng, nếu người quan sát ở tại đỉnh của một chiếc nón và Trái Đất được "thả" vào trong chiếc nón đó, thì đường chân trời trong trường hợp này là đường chạm giữa Trái Đất và chiếc nón (H.5.45b). Trong mô hình toán học, đường chân trời đối với người quan sát tại vị trí B là tập hợp những điểm A nằm trên bề mặt Trái Đất sao cho $\angle BAO = 90^\circ$, với O là tâm Trái Đất (H.5.45c). Trong không gian O_{xyz} , giả sử bề mặt Trái Đất (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và người quan sát ở vị trí $B(1; 1; -1)$.

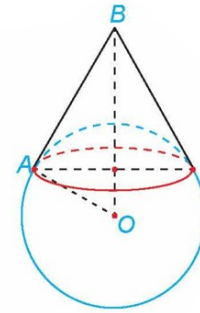
Gọi A là một vị trí bất kì trên đường chân trời đối với người quan sát ở vị trí B . Tính khoảng cách AB .



a)



b)



c)

Lời giải

Ta có $AB^2 = OB^2 - OA^2 = 2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}$. Do 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6371 km trên thực tế nên khoảng cách AB là $\sqrt{2} \cdot 6371 \approx 9010(km)$.

Câu 42. Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian (Hình).



Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, toạ độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm toạ độ. Như vậy, điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho.

Giả sử trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho bốn vệ tinh $A(3; -1; 6)$, $B(1; 4; 8)$, $C(7; 9; 6)$, $D(7; -15; 18)$. Tìm toạ độ của điểm M trong không gian, biết khoảng cách từ các vệ tinh đến điểm M lần lượt là $MA=6, MB=7, MC=12, MD=24$.

Lời giải

Gọi toạ độ của M là $(a; b; c)$. Khi đó, các số a, b, c thoả mãn các phương trình:

$$(a - 3)^2 + (b + 1)^2 + (c - 6)^2 = 6^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 6a + 2b - 12c + 10 = 0 \quad (1)$$

$$(a - 1)^2 + (b - 4)^2 + (c - 8)^2 = 7^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 8b - 16c + 32 = 0 \quad (2)$$

$$(a - 7)^2 + (b - 9)^2 + (c - 6)^2 = 12^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 14a - 18b - 12c + 22 = 0 \quad (3)$$

$$(a - 7)^2 + (b + 15)^2 + (c - 18)^2 = 24^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 14a + 30b - 36c + 22 = 0 \quad (4)$$

Trừ tương ứng theo từng vế của (4) cho (3), (3) cho (1), (2) cho (1), ta có:

$$48b - 24c = 0 \Leftrightarrow c = 2b \quad (5)$$

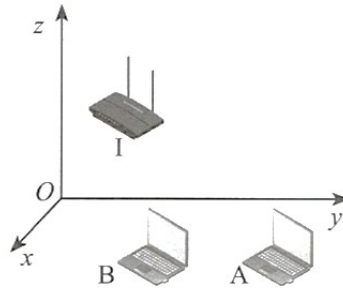
$$-8a - 20b + 12 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-5b + 3}{2} \quad (6)$$

$$4a - 10b - 4c + 22 = 0 \quad (7)$$

Thế (5) và (6) vào (7), ta có: $-10b + 6 - 10b - 8b + 22 = 0 \Leftrightarrow b = 1$.

Suy ra $a = -1, c = 2$. Vậy $M(-1; 1; 2)$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một router phát sóng wifi có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(4; 2; 10)$.



a) Cho biết bán kính phủ sóng wifi là 40 m. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.

b) Một người sử dụng máy tính tại điểm $M(6; 12; 0)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên hay không.

c) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng máy tính ở điểm $N(14; 6; 50)$.

Lời giải

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(4; 2; 10)$, bán kính $R = 40$ nên có phương trình là:

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 10)^2 = 1600.$$

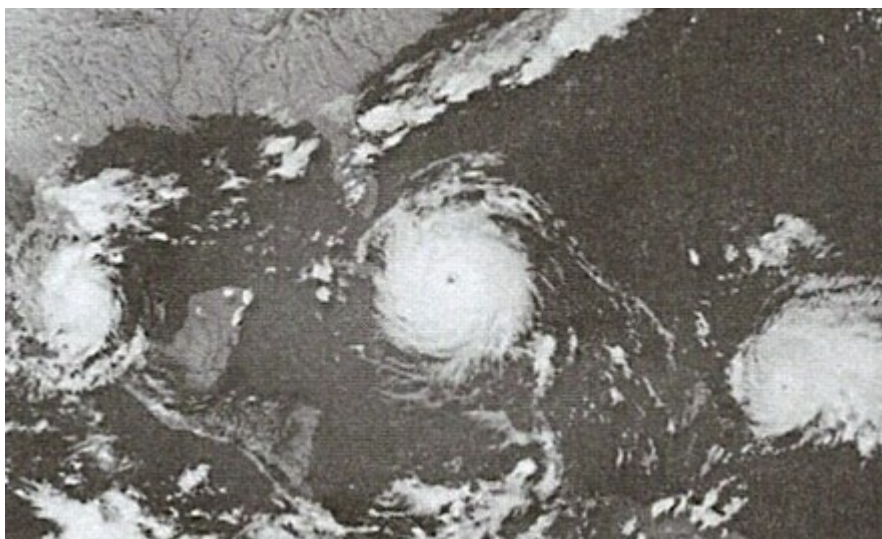
b) Ta có $IM = \sqrt{2^2 + 10^2 + (-10)^2} = \sqrt{204} \approx 14,3 < 40$, suy ra $IM < R$. Do đó, điểm M nằm trong mặt cầu (S) .

Vậy người đó có thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên.

c) Ta có $IN = \sqrt{10^2 + 4^2 + 40^2} = \sqrt{1716} \approx 41,4 > 40$, suy ra $IN > R$. Do đó, điểm N nằm ngoài mặt cầu (S) .

Vậy người đó không thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên.

Câu 44. Tại một thời điểm có bão, khi đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) ở một vị trí phù hợp thì tâm bão có tọa độ $(300; 200; 1)$ (Hình).



a) Lập phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng ảnh hưởng của bão ở cấp độ: bán kính gió mạnh từ cấp 10, giạt từ cấp 12 trở lên khoảng 100 km tính từ tâm bão.

b) Tại một vị trí có tọa độ $(350; 245; 1)$ thì có bị ảnh hưởng bởi cơn bão được mô tả ở câu a hay không?

Lời giải

Trả lời:

a) Phương trình mặt cầu cần tìm là:

$$(x - 300)^2 + (y - 200)^2 + (z - 1)^2 = 100^2.$$

b) Khoảng cách từ vị trí có tọa độ $(350; 245; 1)$ đến tâm bão là:

$$d = \sqrt{(350 - 300)^2 + (245 - 200)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{4525} < 100.$$

Vậy vị trí có tọa độ $(350; 245; 1)$ bị ảnh hưởng bởi cơn bão.

Câu 45. Một nguồn âm phát ra sóng âm là sóng cầu (mặt đầu sóng là mặt cầu). Khi gắn trên hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là mét, vị trí nguồn âm có tọa độ $(2; 3; 1)$, cường độ âm chuẩn phát ra có bán kính 10 m.

a) Lập phương trình mặt cầu mô tả ranh giới nhận được cường độ âm chuẩn.

b) Tại một vị trí có tọa độ $(5; 0; 2)$ có nhận được cường độ âm chuẩn từ nguồn âm trên hay không?

Lời giải

a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 100$

b) Khoảng cách từ vị trí có tọa độ $(5; 0; 2)$ đến nguồn âm là:

$$d = \sqrt{(5 - 2)^2 + (0 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{19} < 10.$$

Vậy tại vị trí có tọa độ $(5; 0; 2)$ có thể nhận được cường độ âm chuẩn từ nguồn âm.

Câu 46. Người ta muốn thiết kế một quả địa cầu trong không gian $Oxyz$ bằng phần mềm 3 D.

Biết phương trình mặt cầu là $(S): (x - 24)^2 + (y - 24)^2 + (z - 24)^2 = 100$ (đơn vị cm) và phương trình đường thẳng trục xoay là $d: \frac{x - 24}{1} = \frac{y - 24}{1} = \frac{z - 24}{3,25}$.



- a)** Tìm tọa độ giao điểm của d và (S) .
b) Tính số đo góc giữa d và trục Oz . Làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ.

Lời giải

Trả lời:

- a)** Đường thẳng d có phương trình tham số
$$\begin{cases} x = 24 + t \\ y = 24 + t \\ z = 24 + 3,25t \end{cases}$$

Xét điểm $M(24 + t; 24 + t; 24 + 3,25t)$ trên đường thẳng d .

Thay tọa độ của M vào phương trình mặt cầu (S) , ta được:

$$(24 + t - 24)^2 + (24 + t - 24)^2 + (24 + 3,25t - 24)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{40\sqrt{201}}{201} \vee t = -\frac{40\sqrt{201}}{201}.$$

Vậy d cắt (S) tại hai điểm $M\left(24 + \frac{40\sqrt{201}}{201}; 24 + \frac{40\sqrt{201}}{201}; 24 + \frac{130\sqrt{201}}{201}\right)$ và $M'\left(24 - \frac{40\sqrt{201}}{201}; 24 - \frac{40\sqrt{201}}{201}; 24 - \frac{130\sqrt{201}}{201}\right)$.

- b)** Vector chỉ phương của d và trục Oz lần lượt là $a = (1; 1; 3,25); k = (0; 0; 1)$. Ta có:
- $$\cos(d, Oz) = \frac{|a \cdot k|}{|a| \cdot |k|} = \frac{3,25}{\sqrt{1+1+3,25^2}} \approx 0,917$$
- , suy ra $(d, Oz) \approx 23,5^\circ$.