

MỤC LỤC

1. MỞ ĐẦU	1
1.1. Lý do chọn đề tài	1
1.2. Mục đích nghiên cứu	1
1.3. Đối tượng nghiên cứu	2
1.4. Phương pháp nghiên cứu	2
2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM	3
2.1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm	3
2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sang kiến kinh nghiệm	4
2.3. Sáng kiến kinh nghiệm khắc phục những hạn chế của học sinh.	4
2.3.1. Một số bài toán về phương trình vô tỉ.	4
2.3.2. Thực nghiệm sư phạm	17
2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm .	18
3. BÀI TẬP THAM KHẢO	18
4. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	20
5. TÀI LIỆU THAM KHẢO	21

1. MỞ ĐẦU

1.1. Lý do chọn đề tài

Qua quá trình công tác giảng dạy ở trường THPT , mà cụ thể là phân môn Đại số 10 các em học sinh đã được tiếp cận với phương trình chứa ẩn dưới dấu căn, tuy nhiên các em chỉ được làm quen với một số cách giải thông thường, đơn giản. Tôi nhận thấy việc học toán nói chung và bồi dưỡng học sinh khá, giỏi toán nói riêng, muốn học sinh rèn luyện được tư duy sáng tạo trong việc học và giải toán thì bản thân mỗi thầy, cô cần phải có nhiều phương pháp và nhiều cách hướng dẫn cho học sinh tiếp thu và tiếp cận bài giải. Từ đó đòi hỏi người thầy cần phải không ngừng tìm tòi nghiên cứu tìm ra nhiều phương pháp và cách giải qua một bài toán để từ đó rèn luyện cho học sinh năng lực hoạt động, tư duy sáng tạo, phát triển bài toán và có thể đề xuất hoặc tự làm các bài toán tương tự đã được nghiên cứu, bồi dưỡng.

Dạy cho học sinh nắm vững kiến thức cơ bản, đảm bảo trình độ thi đỗ đại học đã là khó và rất cần thiết nhưng chưa đủ. Là giáo viên dạy toán ở trường THPT ai cũng mong muốn mình có được nhiều học sinh yêu quý, có nhiều học sinh đỗ đạt, có nhiều học sinh giỏi. Song để thực hiện được điều đó người thầy cần có sự say mê chuyên môn, đặt ra cho mình nhiều nhiệm vụ, truyền sự say mê đó cho học trò. Khai thác sâu một bài toán cũng là một phần việc giúp người thầy thành công trong sự nghiệp của mình. Với chút hiểu biết nhỏ bé của mình cùng niềm say mê toán học tôi viết đề tài sáng kiến kinh nghiệm: “**Một số giải pháp giúp học sinh có kỹ năng giải phương trình vô tỉ**” mong muốn được chia sẻ, trao đổi kinh nghiệm làm toán, học toán và dạy toán với bạn bè trong tỉnh. Hy vọng đề tài giúp ích một phần nhỏ bé cho quý thầy cô trong công tác giảng dạy.

1.2. Mục đích nghiên cứu

-Nhằm nâng cao nghiệp vụ chuyên môn, rút kinh nghiệm trong quá trình giảng dạy, phát triển tư duy linh hoạt, sáng tạo của học sinh, phát hiện và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán.

- Thông qua đề tài này, là tài liệu tham khảo có ích cho giáo viên và học sinh, đặc biệt là đối với học sinh tham gia các kì thi học sinh giỏi cấp Tỉnh, thi đại học, cao đẳng.

1.3. Đối tượng nghiên cứu

- Nghiên cứu phương pháp giải các bài toán thi Đại học theo nhiều cách
- Đề tài hướng tới các đối tượng học sinh lớp chọn, chuyên Toán, học sinh giỏi và học sinh ôn thi Đại học, nhất là học sinh khối 10 .

1.4. Phương pháp nghiên cứu

- Với đề tài này, tác giả sử dụng chủ yếu là phương pháp thống kê, lựa chọn những bài toán hay, độc đáo, có cùng phương pháp giải sau đó phân tích, so sánh, khái quát hóa, đặc biệt hóa để làm nổi bật phương pháp rút ra kết luận

2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

2.1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm

- Môn toán học là bộ môn quan trọng và cần thiết đối với học sinh. Muốn học tốt môn toán các em phải nắm vững những tri thức khoa học ở môn toán một cách có hệ thống, biết vận dụng lý thuyết linh hoạt vào từng dạng bài tập. Điều đó thể hiện ở việc học đi đôi với hành, đòi hỏi học sinh phải có tư duy logic và cách biến đổi. Giáo viên cần định hướng cho học sinh học và nghiên cứu môn toán học một cách có hệ thống trong chương trình học phổ thông, vận dụng lý thuyết vào làm bài tập, phân dạng các bài tập rồi tổng hợp các cách giải.

- Do vậy, tôi mạnh dạn đưa ra sáng kiến kinh nghiệm này với mục đích giúp cho học sinh THPT vận dụng và tìm ra phương pháp giải khi gặp các bài toán giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn.

Trong sách giáo khoa Đại số 10 chỉ nêu phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$ và trình bày phương pháp giải bằng cách biến đổi hệ quả, trước khi giải chỉ đặt điều kiện $f(x) \geq 0$. Nhưng chúng ta nên để ý rằng đây chỉ là điều kiện đủ để thực hiện được phép biến đổi cho nên trong quá trình giải học sinh dễ mắc sai lầm khi lấy nghiệm

và loại bỏ nghiệm ngoại lai vì nhằm tưởng điều kiện $f(x) \geq 0$ là điều kiện cần và đủ của phương trình.

Tuy nhiên khi gặp bài toán giải phương trình vô tỉ, có nhiều bài toán đòi hỏi học sinh phải biết vận dụng kết hợp nhiều kiến thức kỹ năng phân tích biến đổi để đưa phương trình từ dạng phức tạp về dạng đơn giản

Trong giới hạn của SKKN tôi chỉ hướng dẫn học sinh hai dạng phương trình thường gặp một số bài toán vận dụng biến đổi cơ bản và một số dạng bài toán không mẫu mực (*dạng không tường minh*) nâng cao.

* **Dạng 1:** phương trình $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (1)

Phương trình $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$ điều kiện $g(x) \geq 0$ là điều kiện cần và đủ của phương trình (1) sau khi giải phương trình $\sqrt{f(x)} = g^2(x)$ chỉ cần so sánh các nghiệm vừa nhận được với điều kiện $g(x) \geq 0$ để kết luận nghiệm mà không cần phải thay vào phương trình ban đầu để thử để lấy nghiệm.

* **Dạng 2:** phương trình $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ (2)

$$\text{Phương trình } \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 (g(x) \geq 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Điều kiện $f(x) \geq 0 (g(x) \geq 0)$ là điều kiện cần và đủ của phương trình (2). Chú ý ở đây không nhất thiết phải đặt điều kiện đồng thời cả $f(x)$ và $g(x)$ không âm vì $f(x) = g(x)$.

• **Dạng 3:** phương trình $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$ (3).

Bước 1: Đặt điều kiện

Bước 2: Chuyển vế để 2 vế đều dương $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} + \sqrt{h(x)}$.

Bước 3: Bình phương 2 vế

****Dạng bài toán không mẫu mực:***

Loại này được thực hiện qua các ví dụ cụ thể.

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sang kiến kinh nghiệm

Học sinh trường THPT DTNT ở các lớp đặc biệt là lớp 10 nhận thức còn chậm, chưa hệ thống được kiến thức. Khi gặp các bài toán về phương trình vô tỉ chưa phân loại và định hình được cách giải, lúng túng khi đặt điều kiện và biến đổi, trong khi đó phương trình loại này có rất nhiều dạng. Nhưng bên cạnh đó chương trình đại số 10 không nêu cách giải tổng quát cho từng dạng, thời lượng dành cho phần này là rất ít.

Qua việc khảo sát kiểm tra định kỳ và việc học tập, làm bài tập hàng ngày nhận thấy học sinh thường bỏ qua hoặc không giải được hoặc trình bày cách giải đặt điều kiện và lấy nghiệm sai ở phần này.

Kết quả điều tra như sau:

Tổng số HS	Quan niệm sai lầm của HS	Số HS có quan niệm sai lầm	Số không HS có quan niệm sai lầm	Số HS không biết
179		100	59	20

2.3. Sáng kiến kinh nghiệm khắc phục những hạn chế của học sinh.

- Để khắc phục những hạn chế của học sinh khi giải phương trình vô tỉ, tôi đã làm như sau:

+ Đầu tiên tôi đưa ra cho học sinh những bài toán đơn giản nhất mà học sinh giải theo cách sách giáo khoa đưa ra và chỉ ra cho học sinh thấy hạn chế của cách giải.

+ Tiếp đến tôi đưa cho học sinh những ví dụ phức tạp và để học sinh thấy rằng không thể sử dụng cách giải thông thường như vậy để giải được.

2.3.1. Một số bài toán về phương trình vô tỉ.

Một bài toán đơn giản như : Giải phương trình $\sqrt{2x-3} = x-1$ (1) [1]

Nếu giải theo cách của sách giáo khoa, học sinh sẽ giải

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$.

$$(1) \Rightarrow 2x - 3 = (x - 1)^2 \Rightarrow 2x - 3 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Sau đó so sánh điều kiện và thay vào phương trình xem nghiệm có thoả mãn không.

Theo tôi cách giải vừa nêu trên rất phức tạp ở việc thay giá trị của nghiệm vào phương trình ban đầu để thử sau đó loại bỏ nghiệm ngoại lai và dễ dẫn đến sai lầm của một số học sinh khi lấy nghiệm cuối cùng vì nhầm tưởng điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$ là điều kiện cần và đủ. Trong những bài toán phức tạp hơn thì cách giải trên sẽ rất khó khăn.

Hay như bài toán giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 6x - 7} = \sqrt{x + 3}$ [1]

Học sinh thường đặt điều kiện $\begin{cases} 5x^2 + 6x - 7 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases}$ sau đó bình phương 2 vế để giải phương trình. Cách làm như vậy là rối và không cần thiết, vì chỉ cần điều kiện $x + 3 \geq 0$ là đủ.

Ví dụ như các bài toán sau thì chúng ta không thể giải theo cách thông thường như trên được. Tôi xin được đưa ra một số cách giải tối ưu như sau:

Bài toán 1. Trong đề thi Đại học khối D năm 2006 có bài toán sau.

$$\text{Giải phương trình: } \sqrt{2x - 1} + x^2 - 3x + 1 = 0. \quad (1)[2]$$

Lời giải :

Dạng : $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Tuy nhiên tôi sẽ đưa ra một số cách giải mới

Cách 1:

$$\text{ĐK } x \geq \frac{1}{2}. \text{ Khi đó: } (1) \Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} - 2x + 1 + x^2 - x = 0$$

Bài toán 1 được trích từ tài liệu tham khảo [2]

Đặt $\sqrt{2x-1}=t$,

Phương trình đã cho trở thành:

$$t - t^2 + x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ t = 1 - x \end{cases}$$

Trở lại phép đặt ta có.

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} = x \\ \sqrt{2x-1} = 1 - x \end{cases}$$

Giải phương trình, so sánh điều kiện ta được nghiệm của phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Nhận xét: Cách 1 là phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn, với cách làm này ta khai thác rất nhiều bài với cách giải tương tự.

Cách 2.

$$\text{ĐK } x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 2x - 1 - \sqrt{2x-1} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = x \\ \sqrt{2x-1} = 1 - x \end{cases}$$

Giải phương trình, so sánh điều kiện ta được nghiệm của phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Nhận xét: Cách 2 là phương pháp biến đổi về tổng hoặc hiệu hai bình phương, với cách làm này ta khai thác rất nhiều bài với cách giải tương tự.

Cách 3. Cô lập căn thức, đặt điều kiện, bình phương hai vế, giải phương trình bậc

bốn ta cũng tìm được nghiệm là: $\begin{cases} x=1 \\ x=2-\sqrt{2} \end{cases}$

Tuy nhiên **Cách 3** không thú vị, chỉ nên làm khi phương trình có nghiệm đẹp, do có nghiệm đẹp nên có thể suy nghĩ đến phương pháp nhân liên hợp để xuất hiện nhân tử chung.

Không thỏa mãn với 3 cách trên tôi tiếp tục suy nghĩ đến phương án đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại II và tôi đã tìm ra **Cách 4.**

Cách 4.

$$\text{ĐK } x \geq \frac{1}{2} . \quad (1) \Leftrightarrow (1-x)^2 - x = -\sqrt{-(1-x)+x}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} 1-x=u \\ \sqrt{-(1-x)+x}=v \end{cases}$$

$$\text{Theo bài ra ta có: } \begin{cases} u^2 - x = -v \\ v^2 - x = -u \end{cases}$$

Đến đây ta được hệ phương trình đối xứng loại II, giải hệ ta được

$$\begin{cases} u=v \\ u=1-v \end{cases}; \text{ trở lại phép đặt,}$$

$$\text{Giải phương trình, ta được nghiệm của phương trình là: } \begin{cases} x=1 \\ x=2-\sqrt{2} \end{cases}$$

Nhận xét:

Trong **Cách 4** Tôi đã chủ động đề cập tới dạng tổng quát

$$(mx+n)^2 + b = a\sqrt{a(mx+n)-b}.$$

Đây là một cách giải mà tôi khá tâm đắc, với cách giải này khiến tôi mở rộng bài toán trên thành nhiều bài toán thú vị, nhiều bài không làm theo cách này gần như bế tắc.

Với xu hướng ra đề thi như hiện nay thì phần phương trình, hệ phương trình là một câu chặn điểm. Do đó khi dạy học phần phương trình vô tỷ không chỉ cung cấp cho học sinh kiến thức cơ bản, kỹ năng thành thạo còn phải hướng dẫn học sinh đào sâu suy nghĩ từ một bài toán và quan tâm đến các bài toán khó.

Trong khuôn khổ Sáng kiến kinh nghiệm này, tôi tập trung khai thác sâu

Cách 4, từ đó sáng tạo ra các bài toán thú vị.

Bài toán 2. [3]

Giải phương trình $8x^2 - 11x + 1 = (1 - x)\sqrt{4x^2 - 6x + 5}$.

Nhận xét: Bài toán 2 không có nghiệm đẹp do đó việc nhân liên hợp hay bình phương hai vế rất khó khăn; Đặt ẩn phụ không hoàn toàn cũng không đơn giản, nhưng với **Cách 4** ta có lời giải như sau:

Lời giải

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(2 - 3x)^2 - (x^2 - x + 3) = (1 - x)\sqrt{(1 - x)(2 - 3x) + (x^2 - x + 3)}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} 2 - 3x = u \\ \sqrt{4x^2 - 6x + 5} = v \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2 = x^2 - x + 3 + (1 - x)v \\ v^2 = (1 - x)u + x^2 - x + 3 \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = (1 - x)(v - u)$$

$$\text{ta thu được hệ} \quad \Leftrightarrow (u - v)(u + v - x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u + v - x + 1 = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$u = v \Leftrightarrow 2 - 3x = \sqrt{4x^2 - 6x + 5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ 5x^2 - 6x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{14}}{5}.$$

$$u + v - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - 6x + 5} = 4x - 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ 4x^2 - 6x + 5 = 16x^2 - 24x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9 + \sqrt{33}}{12}.$$

Kết luận tập nghiệm $S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{14}}{2}; \frac{9 + \sqrt{33}}{12} \right\}$.

Nhận xét:

Mức độ phức tạp đã tăng thực sự, nguyên do dạng tổng quát

$$(mx + n)^2 - b = a\sqrt{a(mx + n) + b}.$$

Trong đó $a; b$ lúc này theo thứ tự là nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai

$$(2 - 3x)^2 - (x^2 - x + 3) = (1 - x)\sqrt{(1 - x)(2 - 3x) + (x^2 - x + 3)}.$$

Bài toán 2 được trích từ tài liệu tham khảo [3]

Ngoài cách làm trên, có thể đặt ẩn phụ không hoàn toàn cũng thu được kết quả tuy nhiên rất vất vả. Sau đây chúng ta mở rộng tiếp để được những bài toán phức tạp hơn.

Bài toán 3 [3]. Giải phương trình $\frac{16x^2 + 11x + 1}{-x + 4} = \sqrt{4x^2 - 18x - 4}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 4 \\ 2x^2 - 9x - 2 \geq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 16x^2 + 11x + 1 &= (-x + 4)\sqrt{4x^2 - 18x - 4} \\ \Leftrightarrow (-4x - 1)^2 + 3x &= (-x + 4)\sqrt{(-4x - 1)(-x + 4) - 3x} \end{aligned}$$

Đặt $-4x - 1 = u; \sqrt{4x^2 - 18x - 4} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{aligned} \begin{cases} u^2 + 3x = (-x + 4)v \\ v^2 + 3x = (-x + 4)u \end{cases} &\Rightarrow u^2 - v^2 = (-x + 4)(v - u) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u + v - x + 4 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 1 = \sqrt{4x^2 - 18x - 4} \quad (1) \\ \sqrt{4x^2 - 18x - 4} = 5x - 3 \quad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

$$\bullet(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 1 \geq 0 \\ 16x^2 + 8x + 1 = 4x^2 - 18x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{4} \\ 12x^2 + 26x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{13 + \sqrt{109}}{12}$$

$$\bullet(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3 \geq 0 \\ 4x^2 - 18x - 4 = 25x^2 - 30x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{5} \\ 21x^2 - 12x + 13 = 0 \end{cases}$$

(Hệ vô nghiệm)

Kết luận: Phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = -\frac{13 + \sqrt{109}}{12}$.

Bài toán 4 [4]. Giải phương trình $2(x^2 - x + 6) = 5\sqrt{x^3 + 8}$.

Khác với các ví dụ trên biểu thức trong căn là bậc 3, ta sẽ giải theo công thức

$\sqrt{A} = B$ để thu được phương trình bậc bốn.

Lời giải 1

Bài toán 3 được trích từ tài liệu tham khảo [3]

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 8 \geq 0 \\ 4(x^2 - x + 6)^2 = 25(x^3 + 8) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^4 - 33x^3 + 52x^2 - 48x - 56 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (x^2 - 6x - 4)(4x^2 - 9x + 14) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 6x - 4 = 0 \\ 4x^2 - 9x + 14 = 0 \quad \text{VN} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{13} \end{aligned}$$

Lời giải 2: Ta có thể giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ như các ví dụ trên sau khi

biến đổi phương trình về dạng

$$2(x+2) + 2(x^2 - 2x + 4) = 5\sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \quad (1)$$

Đặt

$$u = \sqrt{x+2} \geq 0, v = \sqrt{x^2 - 2x + 4} \geq \sqrt{3}$$

$$(1) \Leftrightarrow 2u^2 + 2v^2 = 5uv \Leftrightarrow 2\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 5\frac{u}{v} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u}{v} = 2 \\ \frac{u}{v} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2v \\ 2u = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 4} \\ 2\sqrt{x+2} = \sqrt{x^2 - 2x + 4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{13}$$

Bài toán 5 [4]. Giải phương trình $\frac{2x^2 - 2x - 3}{-2x + 3} = \sqrt{x^2 - 5x + 7}$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq \frac{3}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2 - 2x - 3 = (-2x + 3)\sqrt{x^2 - 5x + 7}$$

$$\Leftrightarrow (-x + 1)^2 + x^2 - 4 = (-2x + 3)\sqrt{(-2x + 3)(-x + 1) - x^2 + 4}.$$

Đặt $-x + 1 = u$; $\sqrt{x^2 - 5x + 7} = v$, ($v > 0$) ta thu được

$$\begin{cases} u^2 + x^2 - 4 = (-2x + 3)v \\ v^2 + x^2 - 4 = (-2x + 3)u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = (-2x + 3)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u + v - 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

Bài toán 5 được trích từ tài liệu tham khảo [4]

$$\bullet u = v \Leftrightarrow -x + 1 = \sqrt{x^2 - 5x + 7}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = x^2 - 5x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\bullet u + v - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 7} = 3x - 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 4 \\ 8x^2 - 19x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{19 + \sqrt{73}}{16}$$

Kết luận: Phương trình ban đầu có nghiệm . $x = \frac{19 + \sqrt{73}}{16}$

Nhận xét.

Đến đây nhiều bạn có thể thắc mắc: dạng tổng quát: $(mx+n)^2 - b = a\sqrt{a(mx+n)+b}$

“Làm thế nào để tìm được a, b, m, n ” ?

Câu trả lời như sau:

$$2x^2 - 2x - 3 = (-2x+3)\sqrt{x^2 - 5x + 7}$$

$$\Leftrightarrow (-x+n)^2 + x^2 + a.x + b = (-2x+3)\sqrt{(-2x+3)(-x+n) - (x^2 + a.x + b)}.$$

$$\text{Đồng nhất hệ số} \begin{cases} n^2 + b = -3 \\ 3n - b = 7 \\ -2n + a = -2 \\ -2n - 3 - a = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ a = 0 \\ b = -4 \end{cases}$$

Bài toán 6 [3]. Giải phương trình $5 + \frac{3}{x} = \sqrt{2x^2 + x + 1}$

Lời giải

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$5x + 3 = x\sqrt{2x^2 + x + 1} \Leftrightarrow (x+2)^2 - x^2 + x - 1 = x\sqrt{x(x+2) + x^2 - x + 1}.$$

Đặt $x+2=u$; $\sqrt{2x^2 + x + 1}=v$, ($v > 0$) ta thu được

$$\begin{cases} u^2 - x^2 + x - 1 = xv \\ v^2 - x^2 + x - 1 = xu \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = x(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u + v + x = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

Bài toán 6 được trích từ tài liệu tham khảo [3]

$$\bullet u = v \Leftrightarrow x+2 = \sqrt{2x^2 + x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 4x + 4 = 2x^2 + x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 3x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{3 - \sqrt{21}}{2}; \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \right\}.$$

$$\bullet u + v + x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + x + 1} = -2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 2x^2 + x + 1 = 4x^2 + 8x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 2x^2 + 7x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

Kết luận: Phương trình ban đầu có tập nghiệm $x \in \left\{ \frac{3 - \sqrt{21}}{2}; \frac{3 + \sqrt{21}}{2}; -3 \right\}$.

Nhận xét.

Đối với bài toán này ,phía ngoài căn thức có dạng nhị thức bậc nhất nên tạm thời

sử dụng : $5x + 3 = x\sqrt{2x^2 + x + 1} \Leftrightarrow (x + n)^2 - (x^2 + a.x + b) = x\sqrt{x(x + n) + x^2 + a.x + b}$.

$$\text{Đồng nhất hệ số} \quad \begin{cases} n^2 + b = 3 \\ b = 1 \\ n + a = 1 \\ 2n - a = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x + 2)^2 - x^2 + x - 1 = x\sqrt{x(x + 2) + x^2 - x + 1}$$

Bài toán 7 [4]. Giải phương trình $\sqrt{7 - x^2 + x}\sqrt{x + 5} = \sqrt{3 - 2x - x^2} \quad (*)$

Lời giải:

Phương trình có dạng

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$$

Khi đó ta có:

Bài toán 17 được trích từ tài liệu tham khảo [4]

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2 \geq 0 \\ 7-x^2+x\sqrt{x+5} = 3-2x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x+5} = -\frac{x+2}{x} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ -\frac{x+2}{2} \geq 0 \\ x^2(x+5) = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ -2 \leq x < 0 \\ x^3+x^2-16x-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1
\end{aligned}$$

Bài toán 8 [3]. Giải phương trình $\frac{3}{\sqrt{(2x-1)(4x+3)}-6} = 2x+1$

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq -\frac{3}{4} \\ (2x-1)(4x+3) \neq 36 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$3 = (2x+1)(\sqrt{(2x-1)(4x+3)}-6) \Leftrightarrow 12x+9 = (2x+1)\sqrt{8x^2+2x-3}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+8x+4-4x^2+4x+5 = (2x+1)\sqrt{4x^2+6x+2+4x^2-4x-5}$$

$$\Leftrightarrow (2x+2)^2-4x^2+4x+5 = (2x+1)\sqrt{(2x+1)(2x+2)+4x^2-4x-5}$$

Đặt $2x+2=u$; $\sqrt{8x^2+2x-3}=v$, ($v \geq 0$) ta thu được

$$\begin{cases} u^2-4x^2+4x+5 = (2x+1)v \\ v^2-4x^2+4x+5 = (2x+1)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2 = (2x+1)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u+v+2x+1=0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

$$\bullet u=v \Leftrightarrow 2x+2 = \sqrt{8x^2+2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 4x^2+8x+4 = 8x^2+2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 4x^2-6x-7=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{37}}{4} \right\}$$

$$\bullet u+v+2x+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{8x^2+2x-3} = -4x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \leq -3 \\ 8x^2+22x+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{3}{4} \\ x = -\frac{3}{4} \\ x = -2 \end{cases}$$

Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left\{ -\frac{3}{4}; -2; \frac{3 \pm \sqrt{37}}{4} \right\}$.

Bài toán 9 [4]. Giải phương trình $2\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2\sqrt{2x-1}$ (*)

Lời giải

Bài này có dạng $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$.

Điều kiện:

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \geq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

Khi đó :

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 2\sqrt{3x+1} = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 4(3x+1) = x-1 + 4(2x-1) + 4\sqrt{(x-1)(2x-1)} \\ &\Leftrightarrow 4\sqrt{2x^2-3x+1} = 3x+9 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 23x^2-102x-65=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5 (x=5 \geq 1) \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của pt là $x=5$

Vậy nghiệm của pt là $x=5$.

Bài toán 10[4]. Giải phương trình $4x^2 - 9x + 1 = (-4x - 1)\sqrt{8x^2 + 3x - 1}$.

Lời giải.

Bài này nếu chia cả 2 vế cho $-4x-1$ thì có dạng:

$$f(x) = \sqrt{g(x)}$$

Điều kiện $8x^2 + 3x - 1 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $(-2x+1)^2 - 5x = (-4x-1)\sqrt{(-4x-1)(-2x+1)+5x}$.

Đặt $-2x+1=u$; $\sqrt{8x^2+3x-1}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 - 5x = (-4x-1)v \\ v^2 - 5x = (-4x-1)u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = (-4x-1)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u+v=1+4x \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\bullet u = v \Leftrightarrow -2x + 1 = \sqrt{8x^2 + 3x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 1 \geq 0 \\ 4x^2 - 4x + 1 = 8x^2 + 3x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 4x^2 + 7x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1}{4}; -2 \right\}.$$

Bài toán 9,10 được trích từ tài liệu tham khảo [4]

$$\bullet u + v = 1 + 4x \Leftrightarrow 6x = \sqrt{8x^2 + 3x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 36x^2 = 8x^2 + 3x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 28x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{1}{4}; x = -2$.

Bài toán 11 [4]. Giải phương trình $4x^2 + 19x + 6 = x\sqrt{2x^2 - 4x + 3}$

Lời giải.

Điều kiện $2x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $(2x + 3)^2 + 7x - 3 = x\sqrt{x(2x + 3) - 7x + 3}$.

Đặt $2x + 3 = u; \sqrt{2x^2 - 4x + 3} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 + 7x - 3 = xv \\ u^2 + 7x - 3 = xu \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = x(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u + v = -x \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\bullet u = v \Leftrightarrow 2x + 3 = \sqrt{2x^2 - 4x + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ 4x^2 + 12x + 9 = 2x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 2x^2 + 16x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -4 + \sqrt{13}.$$

$$\bullet u + v = -x \Leftrightarrow -\sqrt{2x^2 - 4x + 3} = 3x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 7x^2 + 22x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-11 - \sqrt{79}}{7}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm như trên.

Nhận xét. Các bài toán trên các bạn có thể giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn hoặc nhân liên hợp, nhưng cũng không đơn giản đòi hỏi phải có nhiều kinh nghiệm và kỹ năng thật tốt mới giải quyết được.

Sau đây chúng ta sẽ tiếp tục làm phức tạp hóa bài toán lên, khiến cho các phương pháp khác phải cực kì khó khăn.

Bài toán 12 [5]. Giải phương trình $\frac{x^2+9x+10}{2x^2+3x+3}=\sqrt{2x^3+7x^2+4x}$.

Biến đổi PT về dạng: $(x+2)^2+5x+6=(2x^2+3x+3)\sqrt{(2x^2+3x+3)(x+2)-(5x+6)}$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} x+2=u \\ \sqrt{(2x^2+3x+3)(x+2)-(5x+6)}=v \end{cases}$$

Bài toán 11 được trích từ tài liệu tham khảo [4], bài toán 12 được trích từ tài liệu tham khảo [5]

$$\text{Ta thu được hệ: } \begin{cases} u^2+5x+6=(2x^2+3x+3)v \\ v^2+5x+6=(2x^2+3x+3)u \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ ta được: } \begin{cases} u=v \\ u+v+2x^2+3x+3=0 \end{cases}$$

Đến đây trở lại phép đặt, giải phương trình, đối chiếu điều kiện ta tìm được

$$\text{nghiệm: } \begin{cases} x=-1 \\ x=-1+\sqrt{3} \end{cases}$$

Bài toán 13[6]. Giải phương trình $\frac{9x^2+29x+26}{x^2+x+3}=\sqrt{3x^3+8x^2+15x+14}$

Biến đổi PT về dạng: $(3x+5)^2+1-x=(x^2+x+3)\sqrt{(x^2+x+3)(3x+5)-(1-x)}$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} 3x+5=u \\ \sqrt{(x^2+x+3)(3x+5)-(1-x)}=v \end{cases}$$

$$\text{Ta thu được hệ: } \begin{cases} u^2+1-x=(x^2+x+3)v \\ v^2+1-x=(x^2+x+3)u \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ ta được: } \begin{cases} u=v \\ u+v+x^2+x+3=0 \end{cases}$$

Đến đây trở lại phép đặt, giải phương trình, đối chiếu điều kiện

$$\text{ta tìm được nghiệm: } \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{2\pm\sqrt{37}}{3} \end{cases}$$

Bài toán 14 [7]. Giải phương trình $\frac{x^2 + x + 4}{2x^2 - x + 1} = \sqrt{2x^3 + 7x^2 + 4x + 16}$

Biến đổi PT về dạng: $(x + 4)^2 - 7x - 12 = (2x^2 - x + 1)\sqrt{(2x^2 - x + 1)(x + 4) + (7x + 12)}$

Đặt:
$$\begin{cases} x + 4 = u \\ \sqrt{(2x^2 - x + 1)(x + 4) + (7x + 12)} = v \end{cases}$$

Ta thu được hệ:
$$\begin{cases} u^2 - 7x - 12 = (2x^2 - x + 1)v \\ v^2 - 7x - 12 = (2x^2 - x + 1)u \end{cases}$$

Giải hệ ta được:
$$\begin{cases} u = v \\ u + v + 2x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$$

Đến đây trở lại phép đặt, giải phương trình, đối chiếu điều kiện

ta tìm được nghiệm:
$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Bài toán 15 [8]. Giải phương trình $\frac{x^2 + 10x + 3}{x^2 + x + 1} = \sqrt{x^3 + 4x^2 + 9}$

Biến đổi PT về dạng: $(x + 3)^2 + 4x - 6 = (x^2 + x + 1)\sqrt{(x^2 + x + 1)(x + 3) - (4x - 6)}$

Đặt:
$$\begin{cases} x + 3 = u \\ \sqrt{(x^2 + x + 1)(x + 3) - (4x - 6)} = v \end{cases}$$

Ta thu được hệ:
$$\begin{cases} u^2 + 4x - 1 = (x^2 + x + 1)v \\ v^2 + 4x - 1 = (x^2 + x + 1)u \end{cases}$$

Giải hệ ta được:
$$\begin{cases} u = v \\ u + v + x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

Đến đây trở lại phép đặt, giải phương trình, đối chiếu điều kiện

ta tìm được nghiệm:
$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

2.3.2. Thực nghiệm sư phạm

* Mục đích của thực nghiệm sư phạm:

- Sơ bộ đánh giá hiệu quả của tiến trình dạy học trong việc khắc phục những hạn chế của học sinh.

* Đối tượng thực nghiệm sư phạm:

- Học sinh khối 10 trường THPT Dân Tộc Nội Trú tỉnh Thanh Hoá

* Thời gian, địa điểm và công tác chuẩn bị thực nghiệm sư phạm

- Việc thực nghiệm sư phạm được thực hiện trong năm học 2016-2017

- Thực nghiệm sư phạm được tiến hành ở trường THPT Dân Tộc Nội Trú tỉnh Thanh Hoá

* Kết quả:

Bài toán 15 được trích từ tài liệu tham khảo [8]

- Học sinh được mở rộng thêm kiến thức về phương trình vô tỉ. Qua theo dõi các tiết dạy tôi thấy học sinh hứng thú, tích cực hoạt động thực nghiệm hơn. Điều này được thể hiện cụ thể qua các biểu hiện cụ thể của học sinh qua các tiết học như sau:

+ Sẵn sàng cho việc thực hiện các nhiệm vụ để giải quyết vấn đề.

+ Hăng hái tham ra, đưa các ý tưởng, các giải pháp giải quyết vấn đề.

+ Hợp tác với bạn bè để thực hiện các nhiệm vụ

+ Có ý thức sửa chữa những quan niệm sai của bản thân, giúp đỡ bạn bè sửa chữa những quan niệm sai.

- Để có nhận xét định lượng hơn về việc khắc phục quan niệm sai lầm của học sinh, tôi lại điều tra 179 học sinh lớp 10. Kết quả điều tra như sau:

Tổng số HS	Quan niệm sai lầm của HS	Số HS có quan niệm sai lầm	Số không HS có quan niệm sai lầm	Số HS không biết
179		23	149	7

- Từ bảng kết quả cho thấy số học sinh có quan niệm sai lầm là 23/179. Kết quả này cho thấy số học sinh có quan niệm sai giảm nhiều (trước là 100/179).

- Số học sinh không biết là 7/179 (trước là 20/179).

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm :

Với phương pháp trên tôi đã tổ chức cho học sinh tiếp nhận bài học một cách chủ động, tích cực, tất cả các em đều hứng thú học tập thực sự và hăng hái làm bài tập giao về nhà tương tự. Phương pháp dạy học trên đây dựa vào các nguyên tắc:

- Đảm bảo tính khoa học chính xác
- Đảm bảo tính logic
- Đảm bảo tính sư phạm
- Đảm bảo tính hiệu quả

Khi trình bày tôi đã chú ý đến phương diện sau:

- Phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh
- Phát huy được năng lực tư duy toán học của học sinh

3. BÀI TẬP THAM KHẢO.

1. Giải phương trình: $2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$
2. Giải phương trình: $4x^2 + 7x + 1 = 2\sqrt{x+2}$
3. Giải phương trình: $\frac{3}{\sqrt{(x-1)(2x+3)} - 6} = x + 1$
4. Giải phương trình: $x^2 = 3 + (x-1)\sqrt{x^2 - x + 3}$
5. Giải phương trình: $\frac{2x^2 - x + 1}{\sqrt{6x - 5}} = 2$
6. Giải phương trình: $9x^2 - 5x = (2-x)\sqrt{3x^2 - 8x + 3}$
7. Giải phương trình: $8x^2 + 11x + 1 = (x+1)\sqrt{4x^2 + 6x + 5}$
8. Giải phương trình: $2(2x + \frac{5}{x}) = 2\sqrt{2x^2 + 7x - 9}$
9. Giải phương trình: $2(2x + 3 + \frac{5}{x}) = \sqrt{2x^2 + 9x - 11}$
10. Giải phương trình: $9x + \frac{10}{x} + 5 = 2\sqrt{2x^2 + 3x - 9}$
11. Giải phương trình: $9x + \frac{13}{x} = 18 + 9\sqrt{x^2 - 1}$

12. Giải phương trình: $4(x^2 - x + 12) = (x + 3)\sqrt{2x^2 + 10x - 48}$

13. Giải phương trình: $(x - 1)(x - 2) + 18 = (3x + 1)\sqrt{(x - 2)(3x + 10)}$

14. Giải phương trình: $18x + \frac{13}{2x} = 18 + 9\sqrt{4x^2 - 1}$

15. Giải phương trình: $\frac{8x^2 - 2x + 1}{\sqrt{12x - 5}} = 2$

16. Giải phương trình: $2x + 13 = (2x + 4)\sqrt{2(2x - 1)(2x + 3)}$

17. Giải phương trình: $\frac{3}{\sqrt{(5x - 1)(10x + 3)} - 6} = 5x + 1$

18. Giải phương trình: $(x + 1)^2 + 27 = (x + 3)\sqrt{(x - 2)(x + 9)}$

19. Giải phương trình: $x + 11 = x\sqrt{(x - 1)(2x + 7)}$

20. Giải phương trình: $x + 13 = (x + 4)\sqrt{2(x - 1)(x + 3)}$

4. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Nếu học sinh được biết một phương pháp mới có hiệu quả thì các em sẽ tự tin hơn trong giải quyết các bài toán dạng này và dạng tương tự. Tuy nhiên mỗi bài toán có nhiều cách giải, phương pháp giải này có thể dài hơn các phương pháp khác nhưng nó lại có đường lối nhận biết rõ ràng dễ tiếp cận hơn các phương pháp khác. Hoặc là tiền đề cho ta sáng tạo một dạng bài tập khác. Từ một bài toán thi đại học tôi đã đào sâu suy nghĩ đưa ra được nhiều cách giải và mở rộng thành nhiều bài toán khác độ khó tăng lên rõ rệt. Đó chính là cái hay, cái đẹp của toán học, khiến người ta say mê toán học.

Về phía giáo viên: Tích cực trau dồi chuyên môn nghiệp vụ, trao đổi kinh nghiệm, kiến thức, phương pháp không chỉ ở trong trường mà mở rộng ra cụm trường trong tỉnh và các tỉnh xung quanh, càng trao đổi nhiều thì mình càng thu được nhiều.

Về phía lãnh đạo nhà trường: Tăng cường động viên, khích lệ, khen thưởng đối với những đồng chí GV trẻ, có năng lực chuyên môn tốt tích cực viết sáng kiến, trao đổi kinh nghiệm với các thầy cô đi trước để nhanh chóng trưởng thành.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG
ĐƠN VỊ

Thanh Hoá ngày 15 tháng 5 năm 2017
Tôi xin cam đoan đây là sáng kiến
kinh nghiệm của mình viết, không sao
chép nội dung của người khác.

Người viết SKKN

Bùi Thị Bích

TÀI LIỆU THAM KHẢO.

- [1]. Sách giáo khoa Đại số 10
- [2]. Đề thi tuyển sinh vào Đại Học các năm từ 2001 đến 2015.
- [3]. Chuyên đề phương trình, hệ phương trình của thạc sỹ Lê Văn Đoàn-.*Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội*
- [4]. Đề thi thử THPT Quốc gia năm 2015 của nhiều trường THPT .
- [5]. Tài liệu tập huấn sách giáo khoa - *Nhà xuất bản Giáo dục*
- [6]. Các bài giảng luyện thi môn toán - *Nhà xuất bản giáo dục*
(TG: Phan Đức Chính - Vũ Dương Thụy - Đào Tam - Lê Thống Nhất)
- [7]. Toán nâng cao đại số 10 - *Phan Huy Khải*
- [8]. Báo Toán học tuổi trẻ- *Nhà xuất bản giáo dục*

