**Bài 4. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Dạng toán 1. Dạng toán áp dụng công thức cộng**



|  |
| --- |
| **Bài 1**. Tính giá trị các biểu thức  a/  b/  c/  d**/** e/  g/   |
| **Lời giải**a/  b/  c/  d**/**  e/   g/  *🖎Lưu ý**Xét mối quan hệ về tổng, hiệu của các góc lượng giác đã cho trong biểu thức xem tổng ( hiệu ) đó có = các giá trị đặc biệt không*  |
| **Bài 2.** a) Cho Tính b) Cho  và . Tính  |
| **Lời giải**a) Áp dụng công thức cộng, ta cób)  |

**Dạng toán 2. Dạng toán áp dụng công thức nhân đôi, công thức hạ bậc**

**Công thức nhân đôi**



**Công thức hạ bậc**



|  |
| --- |
| **Bài 1.**Tính các giá trị lượng giác của cung 2α trong các trường hợp sau  |
| a) Biết **Lời giải**Ta có:  Khi đó    | b) Biết   **Lời giải**Ta có:  Khi đó    |

**Dạng toán 3. Dạng toán áp dụng công thức nhân ba**



|  |
| --- |
| **Bài 1.** Rút gọn các biểu thức sau:a)  b)  |
| **Lời giải**a) b)  |

**Dạng toán 4. Dạng toán áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích, tích thành tổng**

|  |  |
| --- | --- |
| **Công** **thức biến đổi tích thành tổng**  | **Công thức biến đổi tổng thành tích**  |

|  |
| --- |
| **Bài 1.** Biến đổi thành tổng a) b)  c) d)   |
| **Lời giải**a) b)  c) d)  |
| **Bài 2**.Biến đổi các biểu thức sau thành tích các nhân tửa)  b)  c)  d)   |
| **Lời giải**a)  b)  c)  d)  |
| **Bài 3.**Rút gọn   |
| **Lời giải**  |

**Dạng toán 5: Chứng minh đẳng thức, đơn giản biểu thức lượng giác và chứng minh biểu thức lượng giác không phụ thuộc vào biến*.***

**Phương pháp:** Để chứng minh đẳng thức lượng giác ta có các cách biển đổi: vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lương trung gian. Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt các công thức lượng giác.

***Lưu ý*:** Khi biến đổi cần phải *hướng đích* , chẳng hạn biến đổi vế phải, ta cần xem vế trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở vế trái. Và ta thường biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản hơn.

|  |
| --- |
| **Bài 1.** Chứng minh rằng với mọi góc lượng giác  làm cho biểu thức xác định thì a)  b) c)  |
| **Lời giải**a) Ta có b) Ta có c) Ta có   |
| **Bài 2.** Chứng minh rằnga)  b)  |
| **Lời giải**a) Ta có   b) Ta có  ĐPCM |
| **Bài 3.** Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào a) b)  |
| **Lời giải**a) Ta có:     b) Vì và  nên  |
| **Bài 4.** Đơn giản biểu thức sau:a)  b)  |
| **Lời giải**a) b) Ta có  và Suy ra . |
| **Bài 5.** Chứng minh rằng a) b)  |
| **Lời giải**a) Ta có Mặt khác Từ (1) và (2) suy ra ĐPCM.b) Theo câu a) ta có Do đó Suy ra   ĐPCM. |

**Dạng toán 6: Tìm GTLN, GTNN của biểu thức lượng giác**

***Phương pháp: - Sử dụng đánh giá -1*** $\leq $ ***sin x*** $\leq $ ***1; -1*** $\leq $ ***cos x*** $\leq $ ***1 với mọi giá trị của x***

 ***- Đưa về biểu thức về dạng at2 + bt + c ( trong đó t = sin x hoặc t = cosx) và đánh giá giá trị lớn nhất nhỏ nhất***

|  |
| --- |
| Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức sau:  a) P = 3 sinx – 2 b) Q = 2 cos( x - $\frac{π}{3}$ ) + 3  |
|  **Lời giải**a) Ta có *-1* $\leq $ *sin x* $\leq $ *1*  , $∀ x\in R$ nên *-3* $\leq $ *3 sin x* $\leq $*3*$⇒$ -5 $\leq $ 3sin x – 2 $\leq $ 1 $⇒$ -5 $\leq $ P $\leq $ 1P = - 5 khi sinx = -1; P = 1 khi sinx = 1 Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -5 ; giá trị lớn nhất của P là 1b) Ta có : -1 $\leq $cos( x - $\frac{π}{3}$ )$ \leq $1 $⇒$ 1$ \leq $2 cos( x - $\frac{π}{3}$ ) + 3 $\leq $ 5 $⇒$ 1 $\leq $Q $\leq $ 5 Q = 1 khi cos( x - $\frac{π}{3}$ ) = -1; Q = 5 khi cos( x - $\frac{π}{3}$ ) = 1 Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 1, giá trị lớn nhất là 5 |
| **Bài 2.** Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức sau:a)  b)  |
| **Lời giải**a) Ta có Vì  nên  suy ra .Khi  thì ,  thì Do đó  và .b) Ta có   Vì  nên  suy ra .Vậy  khi  và  khi . |
| **Bài 3.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất hàm số  |
| **Lời giải**Ta có  Ta lại có  Vậy   |

**Dạng toán 7: Chứng minh đẳng thức lượng giác trong tam giác *, nhận diện tam giác***

***Phương pháp: - Áp dụng các công thức lượng giác vào quá trình biến đổi biểu thức.***

 ***- Trong tam giác ta luôn có số đo các góc thì > 0o và < 180o và tổng 3 góc = 180o do đó ta thường vận dụng linh hoạt các công thức về góc bù nhau, góc phụ nhau***

|  |
| --- |
| **Bài 1.** Chứng minh trong mọi tam giác  ta đều có:a) b) c)  |
| **Lời giải**a) Mặt khác trong tam giác  ta có Suy ra Vậy   ĐPCM.b) Vì  nên  ĐPCM.c) Vì  nên ĐPCM. |
| **Bài 2.** Chứng minh trong mọi tam giác  không vuông ta đều có:a) b) **Lời giải**a) Đẳng thức tương đương với Do tam giác  không vuông nên Suy ra Đẳng thức cuối đúng vì  ĐPCM.b) Vì Theo công thức cộng ta có:Suy ra Hay  ĐPCM. |
| **Bài 3:** Chứng minh rằng nếu một tam giác thỏa mãn một trong các hệ thức sau thì nó là tam giác vuông hoặc cân.

|  |  |
| --- | --- |
| 1.
 | 1.
 |

 |
| **Lời giải:**a) ta có  $⟺$ sinB = 2 cosA.sinC$⟺$ sin*B* = sin(*A+C*) – sin(*A – C*)$ ⟺$ sinB = sin ($π-B)$ – sin ( *A – C*)  ( vì *A + B + C* = $π$ )$⟺$ sin *B* = sin *B* – sin ( *A – C*)$⟺$ sin (*A – C* ) = 0 $⟺$ A – C = 0 $⟺ $ A = CVậy tam giác ABC cân tại B | b) đk: *cosB* $\ne $ *0, cos C*$\ne $ *0* $⟺$ $\frac{\sin(B .\cos(C))}{\sin(C.\cos(B))}= \frac{sin^{2}B}{sin^{2}C}$ $⟺$ *sinB.cosC.sin2C= sin2B.sinC.cosB*$⟺$ sinB.sinC ( sinC.cosC – sin B.cosB ) = 0$⟺$ sin 2C – sin2B = 0$⟺$ cos( B + C) .sin ( B –C ) = 0$$⟺\left[\begin{array}{c}\cos(\left( B+C\right)=0)\\\sin(\left(B-C\right)=0)\end{array} ⟺\left[\begin{array}{c}B+C=90^{o}\\B-C=0\end{array}\right.\right.$$$$⟺\left[\begin{array}{c}tam giác ABC vuông tại A\\tam giác ABC cân tại A\end{array}\right.$$ |