

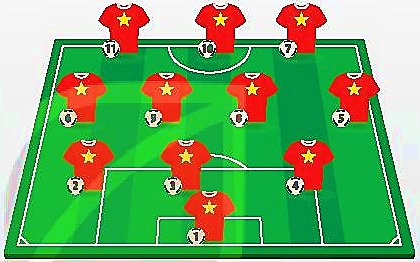
**HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP**

**24**

GV Word 1

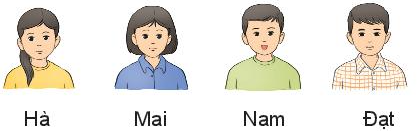
❶. Giáo viên Soạn: ĐỖ CAO LONG. FB: <https://facebook.com/docaolong>

❷. Giáo viên phản biện :NGUYỄN TRỌNG THIỆN FB:Thien Pro

Danh sách các cầu thủ của Đội tuyển bóng đá quốc gia tham dự một trận đấu quốc tế có  cầu thủ gồm  thủ môn,  hậu vệ,  tiền vệ và  tiền đạo. Huấn luyện viên rất bí mật, không cho ai biết đội hình (danh sách  cầu thủ) sẽ ra sân. Trong cuộc họp báo, ông chỉ tiết lộ đội hình sẽ đá theo sơ đồ  (nghĩa là  hậu vệ,  tiền vệ,  tiền đạo và  thủ môn). Đối thủ đã có danh sách  cầu thủ (tên và vị trí của từng cầu thủ) và rất muốn dự đoán đội hình, họ xét hết các khả năng có thể xảy ra. Hỏi nếu đối thủ đã dự đoán được trước vị trí thủ môn thì họ phải xét bao nhiêu đội hình có thể?

**1. HOÁN VỊ**

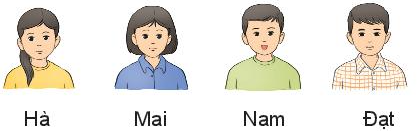
**HĐ1:** Một nhóm gồm bốn bạn Hà, Mai, Nam, Đạt xếp thành một hàng từ trái sang phải để tham gia một cuộc phỏng vấn.



a) Hãy liệt kê ba cách sắp xếp bốn bạn trên theo thứ tự.

b) Có bao nhiêu cách sắp xếp thứ tự bốn bạn trên để tham gia phỏng vấn?

**Trả lời:**

a) ;    ;    ; …

b) Đánh số thứ tự 1, 2, 3, 4 trong hàng từ trái sang phải, rồi thực hiện các công đoạn sau:

1. Chọn một bạn (trong bốn bạn) xếp vào vị trí số 1: có  (cách).

2. Chọn một bạn (trong ba bạn còn lại) xếp vào vị trí số 2: có  (cách).

3. Chọn một bạn (trong hai bạn còn lại) xếp vào vị trí số 3: có  (cách).

4. Chọn một bạn (bạn còn lại) xếp vào vị trí số 4: có  (cách).

Vậy theo quy tắc nhân, có tất cả  cách sắp xếp bốn bạn trên để tham gia phỏng vấn.

**Nhận xét.** Mỗi cách sắp xếp thứ tự của bốn bạn tham gia phỏng vấn ở HĐ1 được gọi lại một *hoán vị* của tập hợp gồm bốn bạn này. Số các hoán vị của bốn bạn ở HĐ1 là .

Tổng quát ta có:

Một hoán vị của một tập hợp có  phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự  phần tử đó (với  là số tự nhiên, ).

Số các hoán vị của tập hợp có  phần tử, kí hiệu là , được tính bằng công thức



**Chú ý.** Kí hiệu  là  (đọc là  giai thừa), ta có: .   
Chẳng hạn 

Quy ước .

**Ví dụ 1.**

Từ các chữ số  và  có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau?

**Giải**

Mỗi cách xếp bốn chữ số đã cho để lập thành một số có bốn chữ số khác nhau là một hoán vị của bốn chữ số đó.

Vậy số các số có bốn chữ số khác nhau có thể lập được là .

**Luyện tập 1.**

|  |
| --- |
| Trong một cuộc thi điền kinh gồm  vận động viên chạy trên  đường chạy. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các vận động viên vào các đường chạy đó? |

**Giải**

Mỗi cách xếp  vận động viên vào  đường chạy (mỗi đường chạy chỉ một vận động viên) là một hoán vị của  vận động viên đó.

Vậy số cách xếp các vận động viên vào các đường chạy là .

**2. CHỈNH HỢP**

**HĐ2:** Trong lớp 10T có bốn bạn Tuấn, Hương, Việt, Dung tham gia cuộc thi hùng biện của trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn:

a) Hai bạn phụ trách nhóm từ bốn bạn?

b) Hai bạn phụ trách nhóm, trong đó có một bạn làm nhóm trưởng, một bạn làm nhóm phó?

**Trả lời:**

a) Liệt kê các cách chọn ra hai bạn từ bốn bạn: Tuấn, Hương; Tuấn, Việt; Tuấn, Dung; Hương, Việt; Hương, Dung; Việt, Dung.

Vậy có 6 cách chọn hai bạn phụ trách nhóm từ bốn bạn.

b) ***Cách 1***: Với mỗi cách chọn ra hai bạn ở câu HĐ2a, chúng ta xếp một bạn chức nhóm trưởng, một bạn chức nhóm phó (một bạn một chức vụ). Mỗi cách xếp như vậy là một hoán vị của hai bạn.

Vậy số từ  cách chọn nhóm hai bạn ở câu HĐ2a, chúng ta có số cách chọn hai bạn phụ trách nhóm, trong đó có một bạn làm nhóm trưởng, một bạn làm nhóm phó là .

***Cách 2***: Để chọn hai bạn phụ trách nhóm, trong đó có một bạn làm nhóm trưởng, một bạn làm nhóm phó chúng ta thực hiện hai công đoạn sau:

1. Chọn một bạn (trong bốn bạn) làm nhóm trưởng: có  (cách).

2. Chọn một bạn (trong ba bạn còn lại) làm nhóm phó: có  (cách).

Vậy theo quy tắc nhân, số cách chọn hai bạn phụ trách nhóm, trong đó có một bạn làm nhóm trưởng, một bạn làm nhóm phó là .

**Nhận xét.** Trong HĐ2b, mỗi cách xếp hai bạn từ bốn bạn làm nhóm trưởng, nhóm phó được gọi là một *chỉnh hợp* chập  của . Để tính số các chỉnh hợp chúng ta dùng quy tắc nhân.

Tổng quát ta có:

Một chỉnh hợp chập  của  là một cách sắp xếp có thứ tự  phần tử từ một tập hợp  phần tử (với  là các số tự nhiên, ).

Số các chỉnh hợp chập  của , kí hiệu là , được tính bằng công thức



**Ví dụ 2.**

Một lớp có  học sinh, giáo viên cần chọn lần lượt  học sinh trồng bốn cây khác nhau để tham gia lễ phát động Tết trồng cây của trường. Hỏi giáo viên có bao nhiêu cách chọn?

**Giải**

Mỗi cách chọn lần lượt  trong  học sinh để trồng bốn cây khác nhau là một chỉnh hợp chập  của .

Vậy số cách chọn là .

**Chú ý**

• Hoán vị sắp xếp tất cả các phần tử của tập hợp, còn chỉnh hợp chọn ra một số phần tử và sắp xếp chúng.

• Mỗi hoán vị của  phần tử cũng chính là một chỉnh hợp chập  của  phần tử đó. Vì vậy .

**Luyện tập 2.**

|  |
| --- |
| Trong một giải đua ngựa gồm  con ngựa, người ta chỉ quan tâm đến 3 con ngựa: con nhanh nhất, nhanh nhì và nhanh thứ ba. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra? |

**Giải**

Giả sử 12 con ngựa tham gia giải đều có thể đạt thành tích nhanh nhất hoặc nhanh nhì hoặc nhanh thứ ba. Khi đó, 3 con ngựa bất kỳ trong 12 con ngựa tham gia giải sẽ có con nhanh nhất, con nhanh nhì và con nhanh thứ ba. Nghĩa là, với mỗi cách chọn ra 3 con ngựa bất kỳ trong 12 con tham gia đều có một kết quả xảy ra, mỗi kết quả xảy ra này là một chỉnh hợp chập 3 của 12.

Vậy số các kết quả có thể xảy ra là .

**3. TỔ HỢP**

**HĐ3:** Trở lại HĐ2:

a) Hãy cho biết sự khác biệt khi chọn ra hai bạn ở câu HĐ2a và HĐ2b.

b) Từ kết quả tính được ở câu HĐ2b (áp dụng chỉnh hợp), hãy chỉ ra cách tính kết quả ở câu HĐ2a.

**Trả lời:**

a) Sự khác biệt ở chỗ:

- Trong câu HĐ2a: hai bạn chọn ra không cần sắp xếp (nếu có xếp thứ tự thì không ảnh hưởng kết quả, tức là chỉ được 1 kết quả);

- Trong câu HĐ2b: mỗi cách xếp thứ tự (hoán vị) hai bạn được chọn là mỗi kết quả khác nhau.

b) Từ chỗ khác biệt ở hai câu HĐ2a, HĐ2b chúng ta thấy:

- Số cách chọn hai bạn ở câu HĐ2b gấp  lần số cách chọn hai bạn ở câu HĐ2a.

**Nhận xét.** Mỗi cách chọn ra  bạn từ  bạn ở HĐ2a được gọi là một *tổ hợp* chập  của . Vì không cần sắp xếp thứ tự hai bạn được chọn nên số cách chọn sẽ giảm đi  lần so với việc chọn ra hai bạn có sắp xếp thứ tự (ở câu HĐ2b).

Tổng quát ta có:

Một tổ hợp chập  của  là một cách chọn  phần tử từ một tập hợp  phần tử (với  là các số tự nhiên, ).

Số các tổ hợp chập  của , kí hiệu là , được tính bằng công thức



**Chú ý**

• .

• Chỉnh hợp và tổ hợp đều có điểm giống nhau là đều chọn một số phần tử trong một tập hợp, nhưng khác nhau ở chỗ, chỉnh hợp là chọn có xếp thứ tự, còn tổ hợp là chọn không xếp thứ tự.

**Ví dụ 3.**

Có  bạn học sinh muốn chơi cờ cá ngựa, nhưng mỗi ván chỉ có  người chơi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn  bạn chơi cờ cá ngựa?

**Giải**

Mỗi cách chọn  bạn trong  bạn học sinh là một tổ hợp chập  của .

Vậy số cách chọn  bạn chơi cờ cá ngựa là .

**Luyện tập 3.**

|  |
| --- |
| Trong ngân hàng đề kiểm tra cuối học kì II môn Vật lí có  câu lí thuyết và  câu bài tập. Người ta chọn ra  câu lí thuyết và  câu bài tập trong ngân hàng đề để tạo thành một đề thi. Hỏi có bao nhiêu cách lập đề thi gồm  câu hỏi theo cách chọn như trên? |

**Giải**

Để lập đề thi gồm  câu hỏi theo cách chọn như trên ta tiến hành hai công đoạn sau:

1. Chọn  câu hỏi lí thuyết trong số  câu lí thuyết: có  cách;

2. Chọn  câu bài tập trong số  câu bài tập: có  cách.

Vậy, theo quy tắc nhân, số cách lập đề thi gồm  câu hỏi theo cách chọn như trên là

.

**4. ỨNG DỤNG HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP VÀO CÁC BÀI TOÁN ĐẾM**

**Ví dụ 4.**

Một lần anh Hưng đến Hà Nội và dự định từ Hà Nội tham quan Đền Hùng, Ninh Bình, Hạ Long, Đường Lâm và Bát Tràng, mỗi ngày đi tham quan một địa điểm rồi về lại Hà Nội.

a) Hỏi anh Hưng có thể xếp được bao nhiêu lịch trình đi tham quan tất cả các địa điểm (ở đây lịch trình tính cả thứ tự tham quan)?

b) Anh Hưng có việc đột xuất phải về sớm, nên anh chỉ có  ngày để đi tham quan  địa điểm. Hỏi anh Hưng có bao nhiêu cách xếp lịch trình đi tham quan?

**Giải**

a) Anh Hưng đi tham quan  địa điểm, mỗi cách xếp lịch trình là một cách chọn có thứ tự  địa điểm trên. Vậy số cách xếp lịch trình bằng số các hoán vị của  địa điểm, và bằng

 (cách).

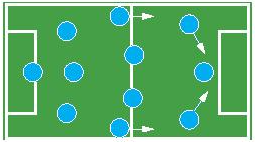
b) Nếu anh Hưng chỉ có  ngày để đi tham quan  nơi, thì mỗi cách xếp lịch trình của anh chính là một cách chọn có thứ tự  địa điểm từ  địa điểm, tức là một chỉnh hợp chập  của .

Vậy số cách xếp lịch trình đi tham quan trong trường hợp này là

 (cách).

**Ví dụ 5.**

Giải bài toán trong *tình huống mở đầu* về đội hình của đội tuyển bóng đá Quốc gia.

**Giải**

Vì mỗi đội hình gồm có  thủ môn,  hậu vệ,  tiền vệ và  tiền đạo và đã biết trước vị trí thủ môn, nên để chọn đội hình ta cần thực hiện  công đoạn:

1. Chọn hậu vệ là chọn  trong số  hậu vệ: có  (cách).

2. Chọn tiền vệ là chọn  trong số  tiền vệ: có  (cách).

3. Chọn tiền đạo là chọn  trong số  tiền đạo: có  (cách).

Vậy, theo quy tắc nhân, số các đội hình có thể có (khi đã biết vị trí thủ môn) là .

**Vận dụng.**

|  |
| --- |
| Một câu lạc bộ có  học sinh.  a) Có bao nhiêu cách chọn  thành viên vào Ban quản lí?  b) Có bao nhiêu cách chọn Trưởng ban,  Phó ban,  thành viên khác vào Ban quản lí? |

**Giải**

a) Mỗi cách chọn  thành viên từ  học sinh là một tổ hợp chập  của .

Vậy, số cách chọn  thành viên vào Ban quản lí là .

b) Để chọn được Trưởng ban,  Phó ban,  thành viên khác vào Ban quản lí ta thực hiện các công đoạn sau:

1. Chọn Trưởng ban ( người) từ  học sinh: có  (cách).

2. Chọn  Phó ban trong số  học sinh: có  (cách).

3. Chọn  thành viên trong số  học sinh còn lại: có  (cách).

Vậy, theo quy tắc nhân, số cách chọn Trưởng ban,  Phó ban,  thành viên khác vào Ban quản lí là

.

***Cách khác***:

Trong  người được chọn ở câu a), chúng ta chọn  người để làm  Trưởng ban,  Phó ban (xếp thứ tự), còn  người còn lại là thành viên của Ban quản lí: có  (cách).

Vậy, theo quy tắc nhân, số cách chọn Trưởng ban,  Phó ban,  thành viên khác vào Ban quản lí là

.

GV Word 2

❶. Giáo viên Soạn: Nguyễn Thị Mến FB: Nguyễn Mến

❷. Giáo viên phản biện : Nguyễn Trọng Thiện FB: Thien Pro

**5. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY**

Ta có thể dùng máy tính cầm tay để tính số các hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp.

**Hoán vị**

Để tính  ta ấn phím theo trình tự sau:

Ấn số , ấn phím q/, sau đó ấn phím =. Khi đó, kết quả sẽ hiển thị ở dòng kết quả.

*Ví dụ.* Tính .

Ta ấn liên tiếp các phím sau: 9q/=

Dòng kết quả hiện ra .

**Chỉnh hợp**

Để tính  ta ấn phím theo trình tự sau:

Ấn số , ấn phím qO, ấn số , sau đó ấn phím =. Khi đó, kết quả sẽ hiển thị ở dòng kết quả.

*Ví dụ.* Tính .

Ta ấn các phím theo trình tự sau: 15qO2=

Dòng kết quả hiện ra .

**Tổ hợp**

Để tính  ta ấn phím theo trình tự sau:

Ấn số , ấn phím qP, ấn số  sau đó ấn phím =. Khi đó, kết quả sẽ hiển thị ở dòng kết quả.

*Ví dụ.* Tính .

Ta ấn các phím theo trình tự sau: 20qP5=

Dòng kết quả hiện ra 

**BÀI TẬP**

**8.6.** Một họa sĩ cần trưng bày  bức tranh nghệ thuật khác nhau thành một hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách để họa sĩ sắp xếp các bức tranh?

**Giải:** Mỗi cách sắp xếp  bức tranh khác nhau thành một hàng ngang là một hoán vị của  phần tử.

Vậy số cách sắp xếp các bức tranh là:  (cách).

**8.7.** Từ các chữ số  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau?

**Giải:** Gọi số cần tìm có dạng .

Chọn chữ số  từ các chữ số  có  (cách).

Ứng với mỗi cách chọn  có số cách chọn bộ  từ  chữ số còn lại là  (cách).

Áp dụng quy tắc nhân, số các số tự nhiên có ba chữ số khác nhau là:  (số).

**8.8.** Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp gồm hai số nguyên dương nhỏ hơn ? Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp gồm ba số nguyên dương nhỏ hơn ?

**Giải:**

a) Gọi tập hợp cần tìm có dạng .

Mỗi tập hợp là một tổ hợp chập  của .

Vậy số cách chọn một tập hợp gồm hai số nguyên dương nhỏ hơn  là:  (cách).

b) Gọi tập hợp cần tìm có dạng .

Mỗi tập hợp là một tổ hợp chập  của .

Vậy số cách chọn một tập hợp gồm ba số nguyên dương nhỏ hơn  là:  (cách).

**8.9.** Bạn Hà có  viên bi xanh và  viên bi đỏ. Có bao nhiêu cách để Hà chọn ra đúng  viên bi khác màu?

**Giải:**

Chọn một bi xanh từ  viên bi xanh có  (cách).

Ứng với mỗi cách chọn một bi xanh có số cách chọn một bi đỏ từ  viên bi đỏ là  (cách).

Áp dụng quy tắc nhân, số cách chọn ra đúng  viên bi khác màu là:  (cách).

**8.10.** Một câu lạc bộ cờ vua có  bạn nam và  bạn nữ. Huấn luyện viên muốn chọn  bạn đi thi đấu cờ vua.

a) Có bao nhiêu cách chọn  bạn nam?

b) Có bao nhiêu cách chọn  bạn không phân biệt nam, nữ?

c) Có bao nhiêu cách chọn  bạn, trong đó có  bạn nam và  bạn nữ?

**Giải:**

a) Mỗi cách chọn  bạn nam từ  bạn nam là một tổ hợp chập  của .

Số cách chọn là:  (cách).

b) Mỗi cách chọn  bạn không phân biệt nam, nữ là một tổ hợp chập  của .

Số cách chọn là:  (cách).

c) Số cách chọn  bạn nam từ  bạn nam là  (cách).

Ứng với mỗi cách chọn  bạn nam, số cách chọn  bạn nữ từ  nữ là  (cách).

Vậy số cách chọn  bạn nam và  bạn nữ là:  (cách).

**8.11.** Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho  mà mỗi số có bốn chữ số khác nhau?

**Giải:** Gọi số cần tìm có dạng  trong đó .

TH1: 

Chọn chữ số  có  (cách).

Ứng với mỗi cách chọn  có số cách chọn bộ  từ  chữ số còn lại là  (cách).

Số các số lập được là:  (số).

TH1: 

Chọn chữ số  có  (cách).

Ứng với mỗi cách chọn  có số cách chọn bộ  từ  chữ số còn lại là  (cách).

Số các số lập được là:  (số).

Vậy số các số tự nhiên chia hết cho và có bốn chữ số khác nhau là:  (số).