

Chủ đề 3 - Nguyên hàm - Tích phân - Mức độ vận dụng

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$, đường thẳng $y = x - 1$ và các đường thẳng $x = m$, $x = 2m$ ($m > 1$). Giá trị của m sao cho $S = \ln 3$ là

*A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m = 5$. D. $m = 4$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

$$\frac{x^2 - 2x}{x - 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Phương trình vô nghiệm, suy ra hai đồ thị hàm số không có giao điểm.

Như vậy diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_m^{2m} \left| \frac{x^2 - 2x}{x - 1} - (x - 1) \right| dx = \int_m^{2m} \left| \frac{-1}{x - 1} \right| dx = \int_m^{2m} \left| \frac{1}{x - 1} \right| dx$$

$$= \left| \int_m^{2m} \frac{1}{x - 1} d(x - 1) \right| = \left| \ln |x - 1| \right|_m^{2m} = \left| \ln |x - 1| \right|_m^{2m} = \left| \ln \left(\frac{2m - 1}{m - 1} \right) \right| \quad (\text{do } m > 1).$$

$$S = \ln 3 \Rightarrow \left| \ln \left(\frac{2m - 1}{m - 1} \right) \right| = \ln 3 \Rightarrow \ln \left(\frac{2m - 1}{m - 1} \right) = 3 \quad \text{hoặc} \quad \ln \left(\frac{2m - 1}{m - 1} \right) = -\ln 3$$

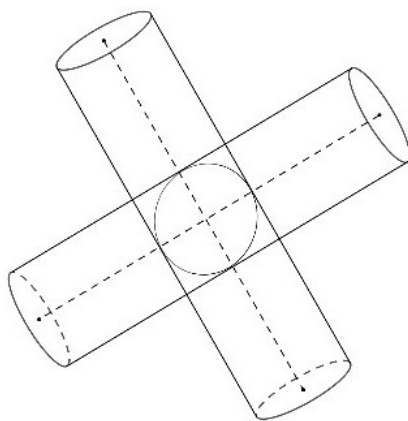
Theo đề bài

$$\begin{cases} \frac{2m - 1}{m - 1} = 3 \\ \frac{2m - 1}{m - 1} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = 3(m - 1) \\ 3(2m - 1) = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{2}{5} \end{cases} \quad (KTM)$$

Suy ra

Vậy $m = 2$.

Câu 2. Người ta dùng máy đào hầm (TBM) để đào hai đường hầm hình trụ tròn xoay đường kính $12m$, mỗi đường hầm đều có chiều dài bằng $20m$, có hai trục cắt nhau và vuông góc với nhau. Tính thể tích khối đất đào được.



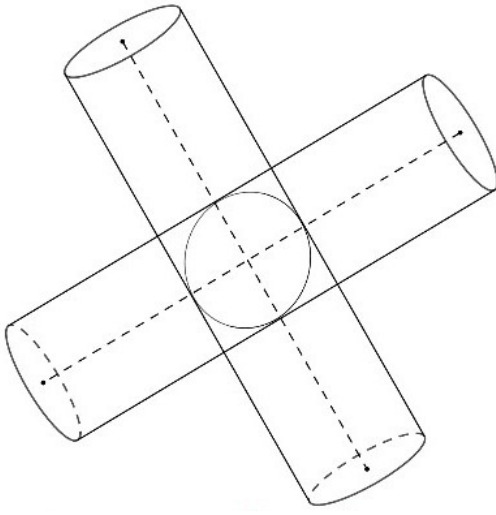
A. $3987.89m^3$.

B. $3619.11m^3$.

C. $4523.89m^3$.

*D. $3371.89m^3$.

Lời giải



Cắt thiết diện của hai hình trụ theo một mặt phẳng theo phương vuông góc với với khối trụ ta được một hình vuông có cạnh bằng $2\sqrt{36 - x^2}$

$$V = 2\pi R^2 h - \pi \int_{-6}^6 4(36 - x^2) dx = 3371.89$$

Khi đó ta có thể tích khối đất được đào là

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(3) = 21$, $\int_0^3 f(x) dx = 9$. Tính tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(3x) dx$

A. $I = 15$.

*B. $I = 6$.

C. $I = 12$.

D. $I = 9$.

Lời giải

Ta có
$$I = \int_0^1 x \cdot f'(3x) dx = \frac{1}{9} \int_0^1 3x \cdot f'(3x) d(3x) = \frac{1}{9} \int_0^3 x \cdot f'(x) dx$$

Đặt
$$\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

Suy ra
$$\int_0^3 x \cdot f'(x) dx = x \cdot f(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 f(x) dx = 3f(3) - 9 = 3 \cdot 21 - 9 = 54$$

Vậy $I = 6$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là hàm số $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x^2) dx$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$.

B. $-\frac{4}{3}$.

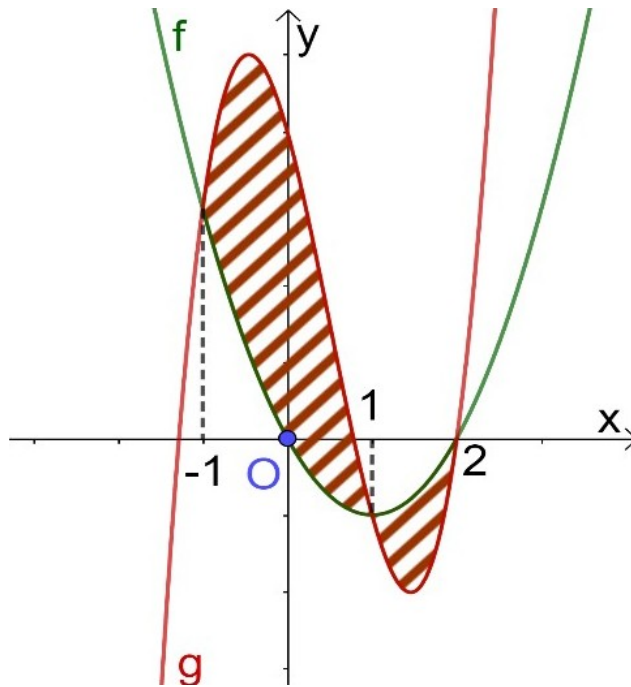
*C. $\frac{4}{3}$.

D. $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = g'(x) = x + 1 \Rightarrow \int_1^2 f(x^2) dx = \int_1^2 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3}$

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4$ và $g(x) = mx^2 + nx$ có đồ thị trong hình bên dưới.



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số trên (phần gạch chéo trong hình vẽ) bằng

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{37}{12}$.

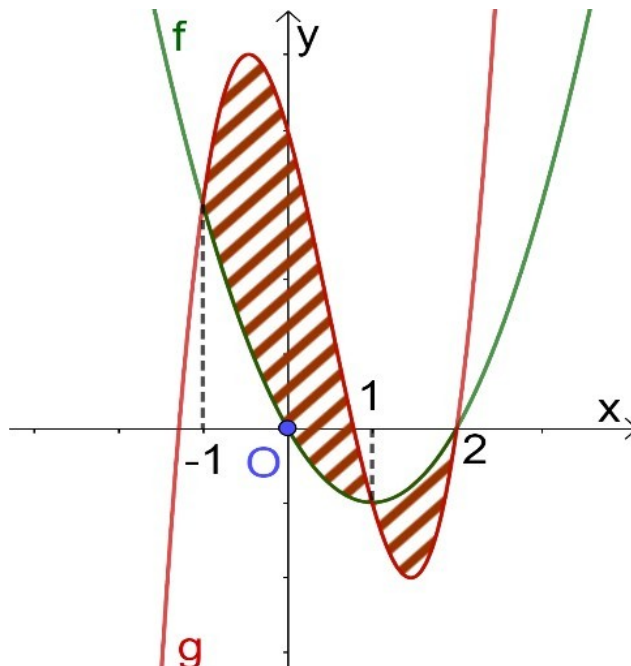
*C. $\frac{37}{6}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + 4 = mx^2 + nx \Leftrightarrow ax^3 + (b - m)x^2 + (c - n)x + 4 = 0$$



Đặt $h(x) = ax^3 + (b - m)x^2 + (c - n)x + 4$

Vì $h(x) = 0$ có 3 nghiệm $x = 2, x = -1, x = 1$ nên $h(x) = a(x + 1)(x - 1)(x - 2) = a(x^2 - 1)(x - 2)$

Mà ta có $h(0) = 2a = 4 \Rightarrow a = 2$.

Suy ra $h(x) = 2(x^2 - 1)(x - 2)$.

Vậy diện tích hình phẳng là
$$S = \int_{-1}^2 |h(x)| dx = \int_{-1}^2 |2(x^2 - 1)(x - 2)| dx = \frac{37}{6}$$

Câu 6. Biết rằng $\int_1^2 \frac{x^3 - 1}{x^2 + x} dx = a + b \ln 3 + c \ln 2$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $2a + 3b - 4c$

A. -19. *B. 19. C. 5. D. -5.

Lời giải

• Ta có: $\int_1^2 \frac{x^3 - 1}{x^2 + x} dx = \int_1^2 \left(x - 1 + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x} \right) dx$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - x + 2 \ln|x+1| - \ln|x| \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + 2 \ln 3 - 3 \ln 2$$

• Suy ra: $a = \frac{1}{2}; b = 2; c = -3$.

• Vậy $2a + 3b - 4c = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) = 19$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x$ với mọi $x > 0$. Tính $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx$.

A. $\frac{7}{12}$. B. $\frac{7}{4}$. C. $\frac{9}{4}$. *D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

• Ta có $2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x \quad (1)$

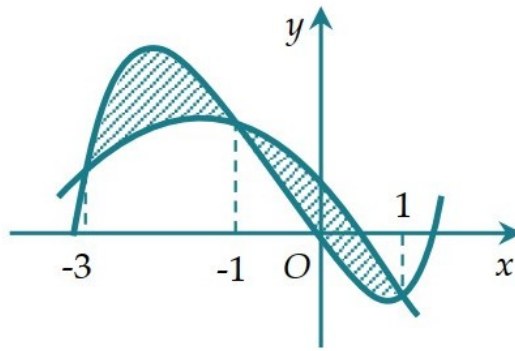
• Đặt $\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t}$ khi đó điều kiện đề bài cho trở thành

$2f\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t}f(t) = \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t \cdot f\left(\frac{1}{t}\right) + f(t) = 1 \quad (2)$

• Từ (1) và (2) ta có:
$$\begin{cases} 4f(t) + 2t \cdot f\left(\frac{1}{t}\right) = 2x \\ f(t) + 2t \cdot f\left(\frac{1}{t}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(t) = \frac{1-2t}{-3}$$

• Lấy tích phân cận từ $\frac{1}{2}$ đến 2 ta được: $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1-2x}{-3} dx = \frac{3}{4}$.

Câu 8. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. 5.

B. $\frac{9}{2}$.

*C. 4.

D. 8.

Lời giải

• Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là
 $ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2} = dx^2 + ex + 1 \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = 0. (*)$

• Do đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -3 ; -1 ; 1 nên phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x=-3$; $x=-1$; $x=1$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -27a + 9(b-d) - 3(c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ -a + (b-d) - (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ a + (b-d) + (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-d = \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \\ c-e = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

Suy ra

• Vây hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số đã cho có diện tích là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)) dx + \int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx \\ &= \int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx \\ &= 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + \frac{c}{3}, \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Câu 9. Cho

A. 11.

B. 1.

C. 9.

*D. 3.

Lời giải

$$u = \ln x + 2 \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ \ln x = u - 2 \end{cases}$$

• Đặt

• Đổi cận: Khi $x=1 \Rightarrow u=2$; Khi $x=e \Rightarrow u=3$;

$$I = \int_2^3 \frac{u-2}{u^2} du = \int_2^3 \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u^2} \right) du = \left(\ln|u| + \frac{2}{u} \right) \Big|_2^3 = \ln 3 + \frac{2}{3} - \ln 2 - 1 = \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{3}$$

• Ta có:

• Suy ra $a=1$, $b=-1$, $c=-1$.

• Vậy giá trị $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 1 + 1 = 3$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) = f(5 - x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_2^3 f(x) dx = 2$. Tính $I = \int_2^3 xf(x) dx$.

A. $I = 20$.

B. $I = 10$.

C. $I = 15$.

*D. $I = 5$.

Lời giải

$$t = 5 - x \Rightarrow \begin{cases} dt = -dx \\ x = 5 - t \end{cases}$$

• Đặt

• Khi đó :

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 xf(x) dx = - \int_3^2 (5-t)f(5-t) dt = \int_2^3 (5-t)f(5-t) dt \\ &= \int_2^3 5f(5-t) dt - \int_2^3 tf(5-t) dt = 5 \int_2^3 f(t) dt - \int_2^3 tf(t) dt \quad (\text{Vi } f(x) = f(5-x), \forall x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

• Khi đó $I = 5.2 - I \Leftrightarrow 2I = 10 \Leftrightarrow I = 5$.

Câu 11. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = (x-1)\sqrt{x^2 - 2x - 3}$. Biết $F(-2) = F(4) - 1 = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ và $F(-3) + F(5) = a\sqrt{3} + b; a, b \in \mathbb{N}$. Giá trị $a + b$ bằng

A. 17.

B. 9.

C. 12.

*D. 18.

Lời giải

Theo đề, $F(x)$ có dạng

$$F(x) = \int (x-1)\sqrt{x^2 - 2x - 3} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2 - 2x - 3} d(x^2 - 2x - 3) = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 - 2x - 3}^3 + C$$

$$F(4) - 1 = \frac{5\sqrt{5}}{3} + C = \frac{5\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow C = 1$$

$$\text{Suy ra: } F(-3) = 8\sqrt{13} + 1; F(5) = 8\sqrt{13} + 1$$

$$\text{Do đó: } F(-3) + F(5) = 16\sqrt{13} + 2$$

Đồng nhất a, b ta được $a = 16; b = 2$

Vậy $a + b = 18$.

Câu 12. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1 - \sin^2 x} = \frac{\pi}{a} - \ln b + \ln \sqrt{2}; a, b \in \mathbb{N}^*$. Giá trị $a + 3b$ bằng

*A. 10.

B. 8.

C. 12.

D. 4.

Lời giải

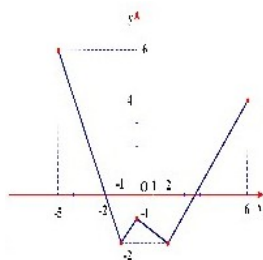
$$\text{Ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1 - \sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d(\tan x) =$$

$$= x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{4} + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \ln 2 + \ln \sqrt{2} = \frac{\pi}{a} - \ln b + \ln \sqrt{2}$$

Đồng nhất hệ số ta được $a=4; b=2$.

Vậy $a+3b=4+3.2=10$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-5;6]$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-5}^0 f(x)dx$ bằng.



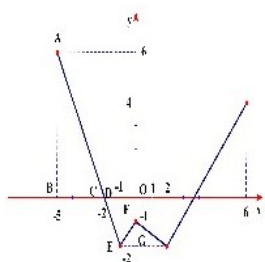
A. $\frac{25}{2}$.

B. $\frac{19}{2}$.

C. $\frac{11}{2}$.

*D. $\frac{13}{2}$.

Lời giải



Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9.$$

$$S_{DEE} = \frac{1}{2} DF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

$$S_{FEGO} = \frac{1}{2} (GO + EF) DO = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Khi đó

$$\int_{-5}^0 f(x)dx = \int_{-5}^{-2} f(x)dx - \int_{-2}^{-1} f(x)dx - \int_{-1}^0 f(x)dx = S_{ABC} - S_{DEE} - S_{FEGO} = 9 - 1 - \frac{3}{2} = \frac{13}{2}.$$

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;1]$, thỏa mãn $f(x)>0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Biết $f(1)=1$. Tính $f(-1)$

A. e^{-2} .

B. e^{-4} .

C. e^2 .

*D. e^4 .

Lời giải

+

Ta

có : Vì

$$f(x)>0, \forall x \in \mathbb{R}$$

nên

$$f'(x)+2f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -2 \int_{-1}^1 dx \Leftrightarrow \ln(f(x)) \Big|_{-1}^1 = -2x \Big|_{-1}^1$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{f(1)}{f(-1)} = -4 \Leftrightarrow f(-1) = e^4$$

Vậy $f(-1) = e^4$

Câu 15. Cho $F(x) = \frac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm và xác định với mọi $x \neq 0$.
 Tính $\int f'(x)e^x dx$.

A. $3x^2e^x - 6xe^x + e^x + C$

B. $x^2e^x - 6xe^x + 6e^x + C$

C. $3x^2 + 6xe^x + 6e^x + C$

*D. $3x^2e^x - 6xe^x + 6e^x + C$

Lời giải

Theo bài, $F(x) = \int \frac{f(x)}{x} dx \Leftrightarrow F'(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

Khi đó, $\int f'(x)e^x dx = 3 \int x^2 e^x dx = 3x^2 e^x - 6 \int x e^x dx = 3x^2 e^x - 6xe^x + 6 \int e^x dx$
 $= 3x^2 e^x - 6xe^x + 6e^x + C$

Vậy $\int f'(x)e^x dx = 3x^2 e^x - 6xe^x + 6e^x + C$

Câu 16. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(x+3)}}$ trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \ln 3$. Giá trị của $e^{F(2021)} - e^{F(2020)}$ thuộc khoảng nào?

*A. $\left(0; \frac{1}{10}\right)$

B. $\left(\frac{1}{10}; \frac{1}{5}\right)$

C. $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right)$

D. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$

Lời giải

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{2\sqrt{x(x+3)}} dx$

Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+3} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{x(x+3)}} dx \Rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\sqrt{x(x+3)}} dx$

$\Rightarrow F(x) = \ln|\sqrt{x} + \sqrt{x+3}| + C$

Mà $F(1) = 3 \Rightarrow C = 0$. Do đó $\Rightarrow F(x) = \ln|\sqrt{x} + \sqrt{x+3}|$

Vậy $e^{F(2021)} - e^{F(2020)} = \sqrt{2021} + \sqrt{2024} - \sqrt{2020} - \sqrt{2023} \simeq 0,0222$

Câu 17. Giả sử $f(x)$ là một hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $G(x) = x^3$ là một nguyên hàm của $g(x) = e^{-2x} f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Họ tất cả các nguyên hàm của $e^{-2x} f'(x)$ là

A. $-2x^3 + 3x^2 + C$

B. $x^3 + 3x^2 + C$

*C. $2x^3 + 3x^2 + C$

D. $-x^3 + 3x^2 + C$

Lời giải

$G(x) = x^3$ là một nguyên hàm của $g(x) = e^{-2x} f'(x)$ trên $\mathbb{R}$, nên $e^{-2x} f'(x) = 3x^2$

$I = \int e^{-2x} f'(x) dx$

Xét

Đặt $u = e^{-2x} \Rightarrow du = -2e^{-2x} dx$ và $dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x)$

$I = e^{-2x} f(x) + 2 \int e^{-2x} f(x) dx = 3x^2 + 2x^3 + C$

Khi đó:

Vậy $I = 2x^3 + 3x^2 + C$

Câu 18. Cho $\int_0^{2021} f(x)dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{e^{2021}-1}} \frac{x}{x^2+1} \cdot f[\ln(x^2+1)] dx$.

A. $I = 2$. *B. $I = 1$. C. $I = 5$. D. $I = 4$.

Lời giải

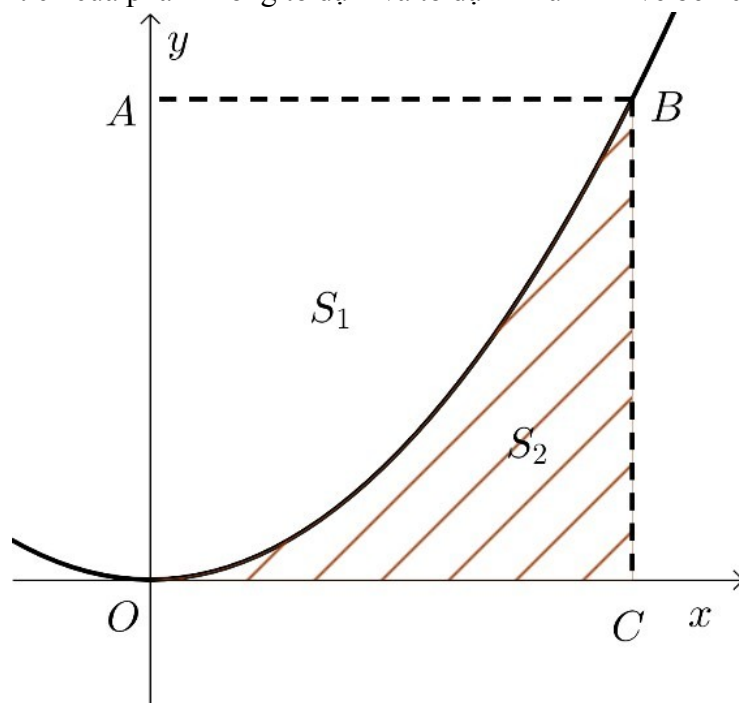
Đặt $t = \ln(x^2+1) \Rightarrow dt = \frac{2x}{x^2+1} dx$

Với $x=0$ thì $t=0$ và $x=\sqrt{e^{2021}-1}$ thì $t=2021$.

Khi đó, $I = \int_0^{\sqrt{e^{2021}-1}} \frac{x}{x^2+1} \cdot f[\ln(x^2+1)] dx = \frac{1}{2} \int_0^{2021} f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^{2021} f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Câu 19. Đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$ chia hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 thành hai phần.

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không tô đậm và tô đậm như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. 3. B. $\frac{1}{2}$. *C. 2. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Diện tích hình vuông $OABC$: $S = 4 \cdot 4 = 16$

$$S_2 = \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^2 \right) dx = \frac{1}{12}x^3 \Big|_0^4 = \frac{16}{3}$$

$$S_1 = S - S_2 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

Tỉ số $\frac{S_1}{S_2} = \frac{32}{3} : \frac{16}{3} = 2$

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 5$, $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = 10$. Tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx$$

bằng

- A. $I = 5$. B. $I = 20$. C. $I = 15$. *D. $I = 25$.

Lời giải

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = 10$$

Ta có:

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = 10 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 20$$

Đặt $2x = t \Rightarrow 2dx = dt$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 25$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx$$

Đặt $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = 25.$$

Câu 21. Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x+1} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. $b + c < 0$ B. $c > 0$ C. $a < 0$ *D. $a + b + c > 0$

Lời giải

$$I = \int_1^2 \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x+1} dx = \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 6 - \frac{6}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - 6 \ln|x+1| \right) \Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{20}{3} - 6 \ln 3 \right) - \left(\frac{13}{3} - 6 \ln 2 \right) = \frac{7}{3} + 6 \ln 2 - 6 \ln 3.$$

Theo đó thì $a = \frac{7}{3}; b = 6; c = -6 \Rightarrow a + b + c > 0$.

Câu 22. Biết rằng $I = \int_2^3 \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của tổng $a + b$ là

- A. $\frac{1}{3}$. B. -1 . *C. $-\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{3(x+2)}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_2^3 \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{3(x+2)} \right) dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx + \frac{2}{3} \int_2^3 \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| \Big|_2^3 + \frac{2}{3} \ln|x+2| \Big|_2^3 \\
 &= \frac{1}{3} (\ln 2 - \ln 1) + \frac{2}{3} (\ln 5 - \ln 4) = \frac{2}{3} \ln 5 - \ln 2
 \end{aligned}$$

Suy ra $a = \frac{2}{3}, b = -1$. Vậy $a + b = -\frac{1}{3}$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, $f(1) = e^3$. Biết $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m \geq e^4$.

B. $0 < m < e^4$.

C. $1 < m < e^4$.

*D. $m > e^4$.

Lời giải

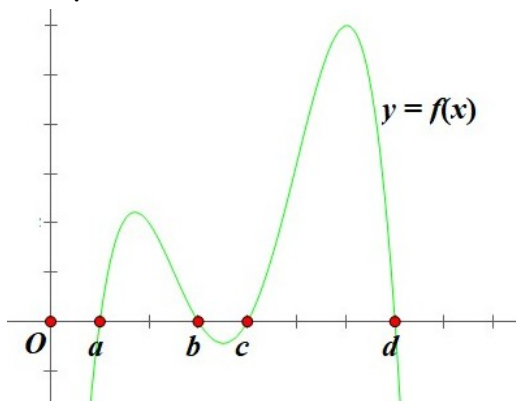
Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (2x + 1) dx \Rightarrow \ln f(x) = x^2 + x + C$
 $f(1) = e^3 \Rightarrow \ln e^3 = 2 + C \Rightarrow C = 1$. Do đó $f(x) = e^{x^2 + x + 1}$.

Phương trình $f(x) = m \Leftrightarrow e^{x^2 + x + 1} = m \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - \ln m = 0 \quad (m > 0)$

$$\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4(1 - \ln m) > 0 \Leftrightarrow \ln m > \frac{3}{4} \Leftrightarrow m > e^{\frac{3}{4}}$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



$$I_1 = \int_a^b f(x) dx; I_2 = \int_a^c f(x) dx; I_3 = \int_a^d f(x) dx; I_4 = \int_c^d f(x) dx.$$

Đặt

Phát biểu nào dưới đây đúng?

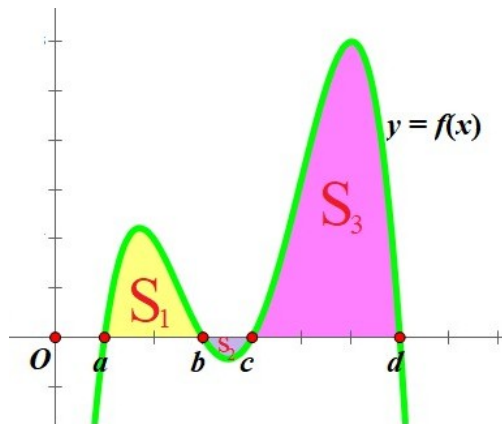
A. $I_1 < I_2 < I_3 < I_4$

*B. $I_2 < I_1 < I_4 < I_3$

C. $I_2 < I_1 < I_3 < I_4$

D. $I_1 < I_2 < I_4 < I_3$

Lời giải.



Chọn B

Gọi $S_1; S_2; S_3$ là diện tích các phần được tô màu như hình vẽ trên. Ta có:

$$I_1 = \int_a^b f(x) dx = S_1$$

$$I_2 = \int_a^c f(x) dx = S_1 - S_2$$

$$I_3 = \int_a^d f(x) dx = S_1 + S_3 - S_2$$

$$I_4 = \int_c^d f(x) dx = S_3$$

$$I_1 = \int_a^b f(x) dx; I_2 = \int_a^c f(x) dx; I_3 = \int_a^d f(x) dx; I_4 = \int_c^d f(x) dx.$$

Vậy:

Câu 25. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=1, f(1)=2$;

$$g(0)=-2, g(1)=4 \text{ và } \int_0^1 f'(x)g(x)dx = 7 \quad I = \int_0^1 f(x)g'(x)dx$$

Tính

A. $I = -3$

B. $I = 17$

*C. $I = 3$

D. $I = -17$

Lời giải

$$\int_0^1 f'(x)g(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx = \int_0^1 [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] dx$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f(x)g(x)]' dx = f(x)g(x) \Big|_0^1 = f(1)g(1) - f(0)g(0) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot (-2) = 10. \text{ Suy ra}$$

$$I = \int_0^1 f(x)g'(x)dx = 10 - 7 = 3$$

Câu 26. Cho hàm số $y = \frac{x - m^2}{x + 1}$ (với m là tham số khác 0) có đồ thị là (C) . Gọi là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị và hai trục tọa độ. Có bao nhiêu giá trị thực của m thỏa mãn $S = 1$?

A. 4

*B. 2

C. 1

D. 0

Lời giải

$$\text{Ta có } (C) \cap Ox = A(m^2; 0) \quad (C) \cap Oy = B(0; -m^2)$$

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị và hai trục tọa độ là:

$$S = \int_0^{m^2} \left| \frac{x-m^2}{x+1} \right| dx = - \int_0^{m^2} \frac{x-m^2}{x+1} dx = \int_0^{m^2} \left(\frac{m^2+1}{x+1} - 1 \right) dx$$

$$= ((m^2+1) \ln|x+1-x|)_0^{m^2} = (m^2+1) \ln|m^2+1| - m^2$$

Để $S=1$ thì $(m^2+1) \ln|m^2+1| - m^2 = 1 \Leftrightarrow \ln(m^2+1) = 1 \Leftrightarrow m^2+1 = e \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{e-1}$

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x x f(x) dx$,
 $\int_1^e f(x) dx$. Tính tích phân

A. $\frac{5-2e}{3}$.

*B. $3-2e$.

C. $2+2e$.

D. $1-2e$.

Lời giải

$$C = \int_1^x x f(x) dx \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} + C \\ f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{1}{x} dx + C \end{cases} (*)$$

Đặt

$$\Rightarrow C = x + C \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^x \Rightarrow C = (2+x) \cdot \frac{1}{2} + \frac{C}{2} \Rightarrow C = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} - 2 \Rightarrow \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx - 2x \Big|_1^e = (\ln e - 2e) - (\ln 1 - 2) = 3 - 2e.$$

Câu 28. Cho biết $\int_1^2 \frac{3x+1}{3x^2+x \ln x} dx = \ln \left(a + \frac{\ln b}{c} \right)$ với a, b, c là các số nguyên dương và $c \leq 4$, tổng $a+b+c$ bằng

A. 5.

B. 6.

*C. 7.

D. 9.

Lời giải

$$\int_1^2 \frac{3x+1}{3x^2+x \ln x} dx = \int_1^2 \frac{3+\frac{1}{x}}{3x+\ln x} dx = \int_1^2 \frac{1}{3x+\ln x} d(3x+\ln x) = \left(\ln |3x+\ln x| \right) \Big|_1^2 = \ln(6+\ln 2) - \ln 3 = \ln \left(2 + \frac{\ln 3}{2} \right)$$

$$\Rightarrow a=2, b=3, c=2 \Rightarrow a+b+c=7.$$

Câu 29. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và Ox có phần phía trên trục hoành là S_1 , phần dưới trục hoành x là S_2 và S_3 thỏa $S_1 + S_2 = S_3$. Khi đó $m = \frac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên, $b > 0$, $\frac{a}{b}$ tối giản). Giá trị của biểu thức $S = a - b$ là

O

$x \ y \ S_3 \ S_1 \ S_2$

A. 2.

B. 7.

C. 9.

*D. 11.

Lời giải

Gọi m, n, p, q ($m < n < 0 < p < q$) là hoành độ các giao điểm của đồ thị với Ox
 Do đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng nên

$$S_1 + S_2 = S_3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} S_3 = S_2 \Leftrightarrow \int_0^p (x^4 - 4x^2 + m) dx = \int_p^q (x^4 - 4x^2 + m) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^q (x^4 - 4x^2 + m) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{q^5}{5} - \frac{4q^3}{3} + mq = 0 \Leftrightarrow \frac{q^4}{5} - \frac{4q^2}{3} + m = 0 \quad (1)$$

Mặt khác $q^4 - 4q^2 + m = 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $m = \frac{20}{9}$. Vậy $a = 20, b = 9 \Rightarrow a - b = 11$

Câu 30. Cho $\int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = a.e + b \ln(e + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + 2b - c$

- *A. $P = -2$. B. $P = 0$. C. $P = -1$. D. $P = 1$.

Lời giải

Ta có

$$\int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + \frac{1}{e^x}} dx = \int_0^1 \frac{x.e^x (x+1)e^x}{x.e^x + 1} dx$$

Đặt $u = xe^x + 1 \Rightarrow du = (e^x + xe^x) dx = (x+1)e^x dx$

Khi đó

$$\int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = \int_1^{e+1} \frac{u-1}{u} du = \int_1^{e+1} \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = (u - \ln|u|) \Big|_1^{e+1} = e - \ln(e+1)$$

Suy ra $a = 1, b = -1, c = 1 \Rightarrow P = a + 2b - c = 1 - 2 - 1 = -2$

Câu 31. Cho $\int_0^1 \frac{x}{(x+3)^2} dx = a + b \ln 3 + c \ln 4$

với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b + c$ bằng

- A. $-\frac{1}{2}$. *B. $-\frac{1}{4}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có $\int_0^1 \frac{x}{(x+3)^2} dx = \int_0^1 \frac{(x+3) - 3}{(x+3)^2} dx$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+3} - \frac{3}{(x+3)^2} \right) dx = \left(\ln|x+3| + \frac{3}{x+3} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{4} - \ln 3 + \ln 4$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{4}; b = -1; c = 1$$

Vậy $a + b + c = -\frac{1}{4}$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^3 x.f'(2x-4) dx = 8; f(2) = 2$. Tính

$$I = \int_{-2}^1 f(2x) dx$$

- A. $I = 5$. B. $I = 10$. C. $I = -5$. *D. $I = -10$.

Lời giải

$$\int_0^3 x \cdot f'(2x-4) dx = 8 \quad (*)$$

Xét

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(2x-4) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} f(2x-4) \end{cases}$$

Đặt

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2} x f(2x-4) \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 f(2x-4) dx = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} f(2) - \frac{1}{2} \int_0^3 f(2x-4) dx = 8$$

$$\Leftrightarrow \int_0^3 f(2x-4) dx = -10.$$

$$\text{Đặt } 2t = 2x - 4 \Rightarrow dt = dx$$

x	0	3
t	-2	1

$$\int_{-2}^1 f(2t) dt = -10$$

Suy ra:

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và dương trên $(0; +\infty)$, thỏa mãn $3xf'(x) = x^2 f''(x) + 2f^2(x), \forall x > 0$ và

$$f(1) = \frac{1}{2}. \text{ Giá trị của tích phân } \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$$

A. $\ln \frac{5}{2}$.

B. $\frac{1}{4} \ln \frac{5}{2}$.

*C. $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$.

D. $\frac{1}{3} \ln \frac{5}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 3xf'(x) = x^2 f''(x) + 2f^2(x), \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 f(x) - x^3 f'(x) = 2xf^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 f(x) - x^3 f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Rightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)} \right)' = 2x \Rightarrow \frac{x^3}{f(x)} = x^2 + C$$

$$\text{Thay } x=0 \text{ ta được } \frac{1}{f(1)} = 1 + C \Leftrightarrow 2 = 1 + C \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\text{Khi đó } \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{x}{x^2 + 1} dx \quad t = x^2 + 1 \Rightarrow dx = 2x dx \Leftrightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=2 \\ x=2 \Rightarrow t=5 \end{cases} \Rightarrow \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} (\ln |t|) \Big|_2^5 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$$

$$\text{Đổi cận } \int_0^1 (2x+3)e^x dx = ae + b$$

Câu 34. Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+3)e^x dx = ae + b$; $(a, b \in \mathbf{Z})$. Tính giá trị biểu thức $P = 2a + b$.

A. 5.

B. 2.

C. 3.

*D. 7.

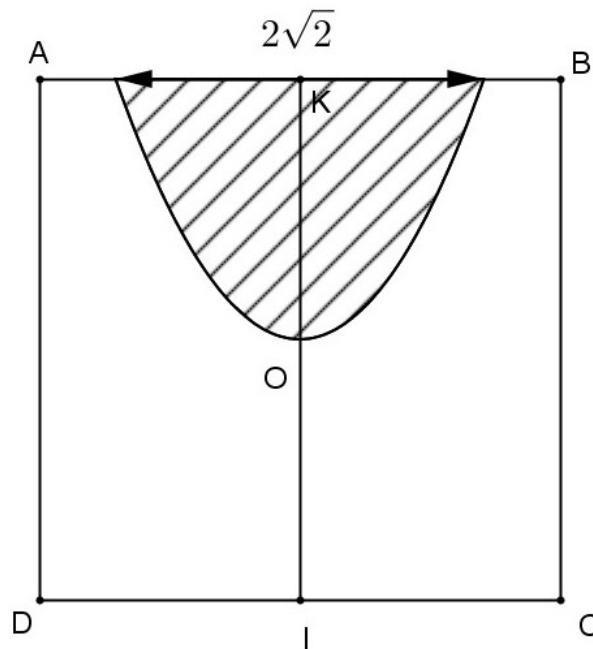
Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x + 3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (2x+3)e^x dx = (2x+3)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = (2x+3)e^x \Big|_0^1 - 2e^x \Big|_0^1 = 3e + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow P = 2a + b = 7.$$

Câu 35. Ông An có một mảnh đất nhỏ hình vuông cạnh bằng $4m$ ở trước sân. Ông muốn trồng hoa và cỏ để trang trí mảnh vườn của mình như sau: Ông sẽ trồng hoa trên phần diện tích có dạng Parabol (P) nhận trục đối xứng KI của hình vuông làm trục đối xứng của (P) và đỉnh của (P) là trung điểm của KI như hình vẽ, phần cỏ sẽ trồng ở phần còn lại của hình vuông. Biết rằng loại hoa ông muốn trồng có giá $200\,000$ đồng/ $1m^2$, cỏ có giá $50\,000$ đồng/ $1m^2$. Hỏi số tiền ông An bỏ ra để làm mảnh vườn là bao nhiêu (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)?



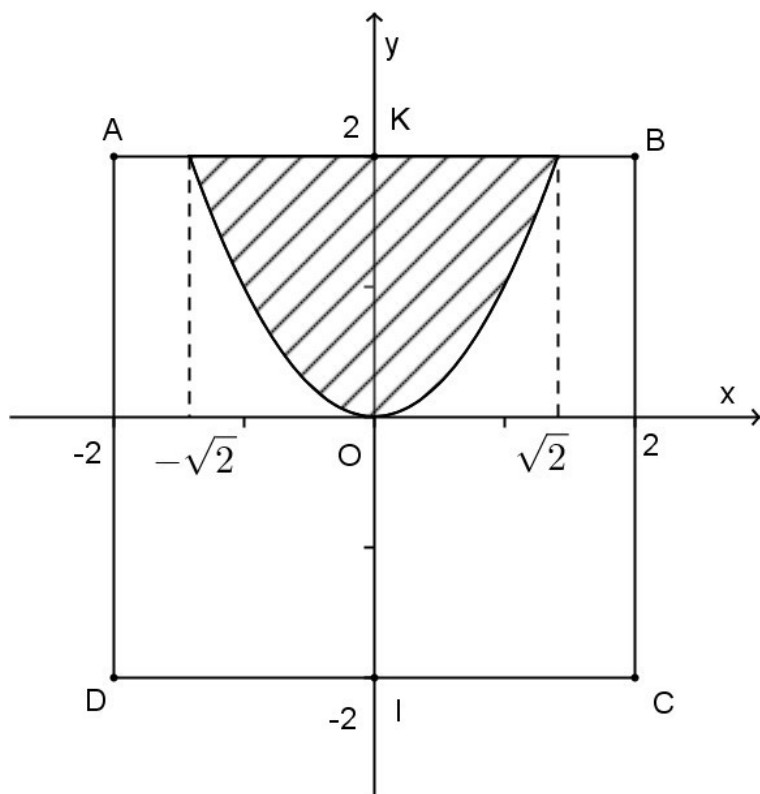
*A. 1365685,4 đ.

B. 2634314,6 đ.

C. 138642,5 đ.

D. Đáp án khác.

Lời giải



Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Phương trình của (P) là $y = x^2$; phương trình của AB là $y = 2$

$$S_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$\Rightarrow$ Diện tích phần trồng hoa là:

$$S_2 = S_{ABCD} - S_1 = 4^2 - \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{48 - 8\sqrt{2}}{3}$$

Diện tích phần trồng cỏ là:

Vậy số tiền ông An bỏ ra để làm mảnh vườn là: $200\,000.S_1 + 50\,000.S_2 \approx 1365685,4$ đồng.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{Biết } f(0) = 0, \text{ tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f''(x) dx$$

*A. $I = -\frac{1}{4}$

B. $I = \frac{1}{4}$

C. $I = \frac{\pi}{4}$

D. $I = -\frac{\pi}{4}$

Lời giải

Do $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(0) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f''\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f''\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f''(x) dx$

Do $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f''(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4}$.

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(f(x)) = x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$.

Câu 37. Biết diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^{-x}$, $y = \frac{x}{3}$, $x = 0$ là $S = \frac{m}{3 \ln 3} - \frac{n}{6}$. Tính tổng $m + n$.

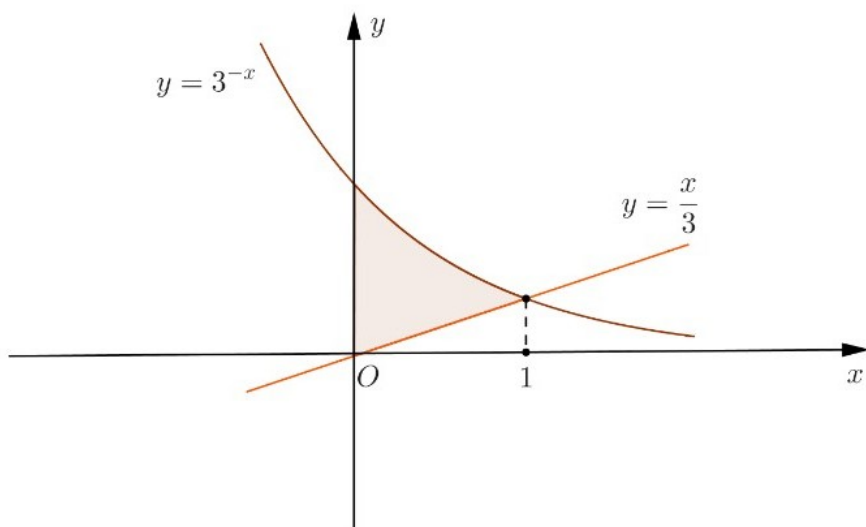
A. $m + n = 4$.

B. $m + n = 2$.

C. $m + n = 1$.

*D. $m + n = 3$.

Lời giải



Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai hàm số $y = 3^{-x}$, $y = \frac{x}{3}$

$$\Rightarrow 3^{-x} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{-x} = x \Leftrightarrow 3^{1-x} = x$$

Nhận thấy $x = 1$ là 1 nghiệm

Với $x > 1 \Rightarrow 1 - x < 0 \Rightarrow 3^{1-x} < 3^0 \Rightarrow 3^{1-x} < 1 \Rightarrow VT < 1 < VP$

Với $x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow 3^{1-x} > 3^0 \Rightarrow 3^{1-x} > 1 \Rightarrow VP < 1 < VT$

$\Rightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất.

$$\Rightarrow S = \int_0^1 \left(3^{-x} - \left(\frac{x}{3} \right) \right) dx = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} - \frac{1}{6} x^2 \Big|_0^1 = \left(-\frac{3^{-1}}{\ln 3} - \frac{1}{6} \right) - \left(-\frac{1}{\ln 3} \right) = -\frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3 \ln 3} - \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow m = 2; n = 1$$

$$\Rightarrow m + n = 3$$

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thỏa mãn: $\int_0^m |3x^2 - 2x| dx = m - 10$?

*A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Đặt $I = \int_0^m |3x^2 - 2x| dx = m - 10$; $f(x) = 3x^2 - 2x$. Dấu của $f(x)$:



Xét các trường hợp sau:

+) Nếu $m < 0$: $I = \int_0^m (3x^2 - 2x) dx = (x^3 - x^2) \Big|_0^m = m^3 - m^2 = m - 10$

$\Rightarrow m^3 - m^2 - m + 10 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn).

+) Nếu $0 \leq m < \frac{2}{3}$: $I = - \int_0^m (3x^2 - 2x) dx = - (x^3 - x^2) \Big|_0^m = -m^3 + m^2 = m - 10$

$\Rightarrow m^3 - m^2 + m - 10 = 0 \Leftrightarrow m \approx 2,36$. (loại).

+) Nếu $m \geq \frac{2}{3}$: $I = - \int_0^{\frac{2}{3}} (3x^2 - 2x) dx + \int_{\frac{2}{3}}^m (3x^2 - 2x) dx = \frac{4}{27} + (x^3 - x^2) \Big|_{\frac{2}{3}}^m$

$= m^3 - m^2 + \frac{8}{27} = m - 10 \Rightarrow m^3 - m^2 - m + \frac{278}{27} = 0 \Leftrightarrow m \approx -2,02$. (loại).

Vậy có 1 giá trị thực của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$2021f(x) - f(-x) = x \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng

*A. $\frac{1}{1010}$. B. $\frac{2}{2019}$. C. $\frac{1}{2020}$. D. $\frac{3}{2022}$.

Lời giải

Vì $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $2021f(x) - f(-x) = x \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ (1) nên ta cũng có $2021f(-x) - f(x) = (-x) \sin(-x), \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2021f(x) - f(-x) = x \sin x \\ -f(x) + 2021f(-x) = x \sin x \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2020} x \sin x$

$I = \frac{1}{2020} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \frac{1}{2020} \left(-x \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \right) = \frac{1}{2020} \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1010}$

Câu 40. Biết $\int_0^2 \frac{x+5}{x^2+4x+3} dx = a \ln 5 + b \ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a.b$.

*A. $P = -3$. B. $P = -6$. C. $P = 6$. D. $P = 3$.

Lời giải

Ta có $\int_0^2 \frac{x+5}{x^2+4x+3} dx = \int_0^2 \frac{2(x+3) - (x+1)}{(x+1)(x+3)} dx = 2 \int_0^2 \frac{2}{x+1} dx - \int_0^2 \frac{1}{x+3} dx = 2 \ln(x+1) \Big|_0^2 - \ln(x+3) \Big|_0^2$

$= 2 \ln 3 - \ln 5 + \ln 3 = -\ln 5 + 3 \ln 3$

Khi đó $a = -1; b = 3 \Rightarrow P = a.b = -3$.

Câu 41. Biết a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b + c$.

A. $P = 18$.

*B. $P = 46$.

C. $P = 24$.

D. $P = 12$.

Lời giải

$$\int_1^2 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \int_1^2 \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^2} dx$$

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \Rightarrow dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx \Leftrightarrow 2dt = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} dx$

Khi đó $I = \int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{2}{t^2} dt = \left(-\frac{2}{t} \right) \Big|_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = -2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 2 = \sqrt{32} - \sqrt{12} - 2$

Do đó $a = 32, b = 12, c = 2 \Rightarrow P = a + b + c = 32 + 12 + 2 = 46$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $I = \int_0^3 f(x) dx = 6$. Tính tích phân

$$J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(3 \sin x) dx$$

A. $J = -4$.

*B. $J = 4$.

C. $J = 0$.

D. $J = 6$.

Lời giải

$$J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(3 \sin x) dx$$

Đặt $t = 3 \sin x \Rightarrow dt = 3 \cos x dx$

Đổi cận:

$$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -3$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 3$$

$$J = \int_{-3}^3 \frac{f(t)}{3} dt = \frac{2}{3} \int_0^3 f(t) dt = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

Câu 43. Biết $\int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = 3 \ln a - \ln b$

với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = ab$.

A. 20.

B. -10.

C. 15.

*D. 10.

Lời giải

$$\int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = \int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{e^x dx}{(e^x)^2 + 2 - 3e^x} = \int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{e^x dx}{(e^x - 2)(e^x - 1)} = \int_{\ln 3}^{\ln 6} e^x \left[\frac{1}{(e^x - 2)} - \frac{1}{(e^x - 1)} \right] dx$$

• Có

$$\int_{\ln 3}^{\ln 6} \left[\frac{e^x}{(e^x - 2)} - \frac{e^x}{(e^x - 1)} \right] dx = \ln \left| \frac{e^x - 2}{(e^x - 1)} \right| \Big|_{\ln 3}^{\ln 6} = \ln \frac{8}{5} = 3 \ln 2 - \ln 5 \Rightarrow a = 2, b = 5$$

Vậy $P = ab = 10$

Câu 44. Biết rằng $\frac{f(x^2+1)}{4x\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{x}$, với $x > 0$; $x \neq 1$; là các số hữu tỷ. Giá trị của $\int_1^4 f(x) dx$ bằng:

- *A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{1}{16}$.

Lời giải

Xét

Đặt

Với

Do đó $\frac{f(x^2+1)}{4x\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{x}$; $x > 0$; $x \neq 1$. Khi đó

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{x}$. Biết

$\int_1^{17} f(x) dx = a \ln 4 - b$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

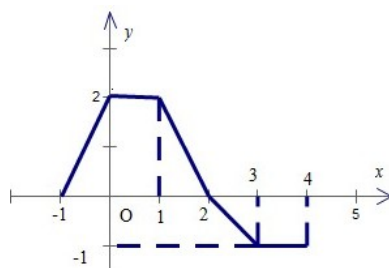
- A. 16. B. 12. C. 8. *D. 20.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} &= \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow 2xf(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = 2\ln x \\ \Leftrightarrow \int_1^4 2xf(x^2+1) dx + \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx &= 2 \int_1^4 \ln x dx \Leftrightarrow \int_2^{17} f(u) du + \int_1^2 f(v) dv = 2(x \ln x - x) \Big|_1^4 \Leftrightarrow \int_1^{17} f(x) dx = 8 \ln 4 - 6 \end{aligned}$$

Vậy $a + 2b = 8 + 2.6 = 20$.

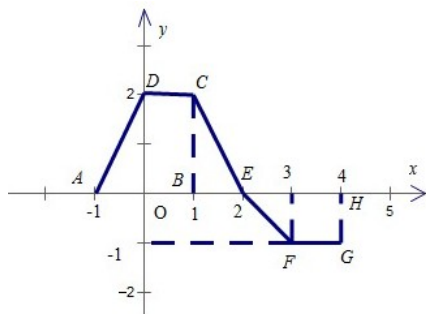
Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ với $-1 \leq x \leq 4$ có đồ thị các đoạn thẳng như hình bên.



Tích phân $I = \int_{-1}^4 f(x) dx$ bằng

- A. 4. B. 1. C. 5,5. *D. 2,5.

Lời giải



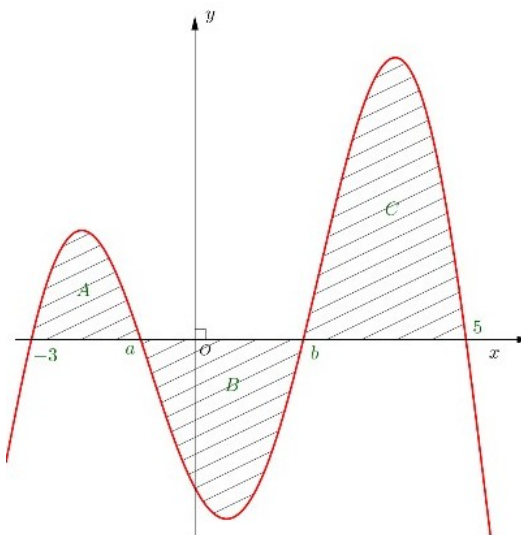
Ta có:
$$I = \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx$$

Trong đó:
$$\int_{-1}^1 f(x) dx = S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (1+2) \cdot 2 = 3$$

$$\int_1^2 f(x) dx = S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$
 ;
$$\int_2^4 f(x) dx = -S_{EFGH} = -\frac{1}{2} (1+2) \cdot 1 = -\frac{3}{2}$$

Vậy
$$I = \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 3 + 1 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên $[-3; 5]$ như hình bên.



Biết các miền A, B, C có diện tích lần lượt là $S_A = 188, S_B = \frac{1377}{4}, S_C = \frac{2673}{4}$. Khi đó $\int_{-3}^5 [f(x) + 1] dx$ bằng

*A. 520. B. $\frac{2417}{2}$. C. -504. D. $\frac{2401}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \int_{-3}^5 [f(x) + 1] dx &= \int_{-3}^5 f(x) dx + \int_{-3}^5 dx = \int_{-3}^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx + \int_b^5 f(x) dx + 8 = S_A - S_B + S_C + 8 \\ &= 188 - \frac{1377}{4} + \frac{2673}{4} + 8 = 520 \end{aligned}$$

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$. Biết $\frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f'(x) \ln x$ và $f(2) = \frac{1}{\ln 2}$. Khi đó, $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx$ bằng

A. $-\frac{7}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$. *D. $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{1}{x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \ln x \end{cases}$ ta có

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = \ln x \cdot f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 f'(x) \cdot \ln x dx = \ln 2 \cdot f(2) - \ln 1 \cdot f(1) - \frac{1}{x^2} \Big|_1^2$$

$$= \ln 2 \cdot \frac{1}{\ln 2} - \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{7}{4}$$

Câu 49. Cho tích phân $\int_1^3 xf(x) dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_0^2 x^2 f(\sqrt{x^3+1}) dx$?

A. 3. B. $\frac{2}{3}$. C. 1. *D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

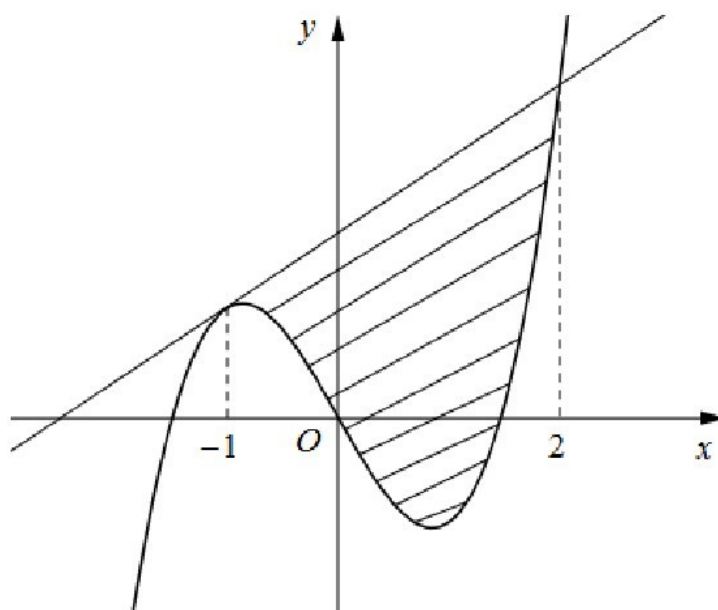
$t = \sqrt{x^3+1} \Leftrightarrow t^2 = x^3+1 \Rightarrow 2t dt = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{2t}{3} dt$.

• Đặt

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1; x=2 \Rightarrow t=3$.

• Khi đó $I = \int_1^3 \frac{2t}{3} f(t) dt = \frac{2}{3} \int_1^3 t f(t) dt = \frac{4}{3}$.

Câu 50. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) . Biết rằng tiếp tuyến d của (C) tại điểm có hoành độ -1 cắt (C) tại điểm B có hoành độ bằng 2 (xem hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (C) (phần gạch chéo trong hình) bằng



A. $\frac{25}{4}$.

B. $\frac{13}{2}$.

*C. $\frac{27}{4}$.

D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

• Giả sử $(C): y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và $d: y = g(x)$.

Khi đó phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$

• Dễ thấy đa thức $f(x) - g(x)$ là đa thức bậc ba có hệ số lũy thừa lớn nhất bằng 1 và có nghiệm kép $x = -1$ và nghiệm đơn $x = 2$. Do đó $f(x) - g(x) = (x+1)^2(x-2)$.

• Diện tích hình phẳng là $S = \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^2 -(x+1)^2(x-2) dx = \frac{27}{4}$.

Câu 51. Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng. Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/ $1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm trong đến hàng nghìn.)

A. 7.826.000 đồng.

B. 7.862.000 đồng.

C. 7.128.000 đồng.

*D. 7.653.000 đồng.

Lời giải

Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > 0, b > 0$.

Theo đề bài, ta có $2a = 16 \Rightarrow a = 8$ và $2b = 10 \Rightarrow b = 5$.

Vậy phương trình của elip: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2} (E_1) \\ y = \frac{5}{8}\sqrt{64-x^2} (E_2) \end{cases}$

Khi đó dải vườn được giới hạn bởi các đường $(E_1), (E_2)$, $x = 4; x = -4$ và diện tích của dải vườn là

$$S = 2 \int_{-4}^4 \frac{5}{8} \sqrt{64-x^2} dx = \frac{5}{2} \int_0^4 \sqrt{64-x^2} dx$$

Tính S bằng cách đổi biến $x = 8 \sin t$, ta được $S = 80 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

$$T = 80 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 100000 = 7652891,82.$$

Vậy số tiền

Vậy chọn **D.**

Câu 52. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Biết $f(1) = 1$ và $f(x) = xf'(x) + \ln x; \forall x \in (0; +\infty)$. Giá trị của $f(e)$ bằng:

A. 1.

*B. 2.

C. e .

D. $\frac{1}{e}$.

Lời giải

$$f(x) = xf'(x) + \ln x; \forall x \in (0; +\infty)$$

Chia 2 vế cho $\frac{1}{x^2}$ ta có:

$$\frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{-\ln x}{x^2} \Rightarrow \int_1^e \left(\frac{f(x)}{x} \right)' dx = \int_1^e \frac{-\ln x}{x^2} dx$$

Suy ra $\frac{f(e)}{e} - f(1) = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$. Bấm máy tích phân và thay $f(1)=1$; ta tính được $f(e)=2$.
 Vậy chọn **B**.

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính

$$I = \int_3^4 f(x) dx$$

*A. $S = 2 \ln^2 2$.

B. $S = \ln^2 2$.

C. $S = 2 \ln 2$

D. $S = 3 + 2 \ln^2 2$.

Lời giải

Ta có $\int_1^4 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$

$$\Rightarrow I = \int_1^4 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx = \int_1^4 \left(\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \right) dx - \int_1^3 f(x) dx$$

Đặt $2\sqrt{x}-1=t \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Đổi cận

$$x=1 \Rightarrow t=1$$

$$x=4 \Rightarrow t=3$$

$$I = \int_1^3 f(t) dt + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_1^4 - \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_1^4 - \int_1^3 f(x) dx = 2 \ln^2 2$$

Câu 54. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, với $a, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 1$.

B. $S = 0$.

*C. $S = 4$.

D. $S = 3$.

Lời giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx$$

Xét tích phân

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

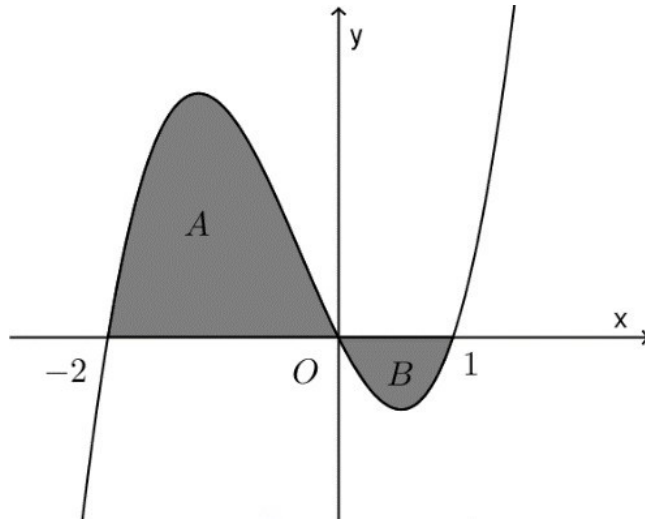
Đổi cận:



Ta có: $I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 5t + 6} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2} \right) dt = \ln \left| \frac{t-3}{t-2} \right| \Big|_0^1 = \ln \frac{4}{3}$

Vậy $a=1, b=0, c=3 \Rightarrow S = a + b + c = 4$

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và gọi $A; B$ là hai hình phẳng được gạch trong hình bên dưới lần lượt có diện tích bằng 14 và 5.



Giá trị của $I = \int_{-1}^0 f(3x+1)dx$ bằng:

A. 9. B. $\frac{19}{3}$. C. 27. *D. 3.

Lời giải

$$I = \int_{-1}^0 f(3x+1)dx$$

Xét

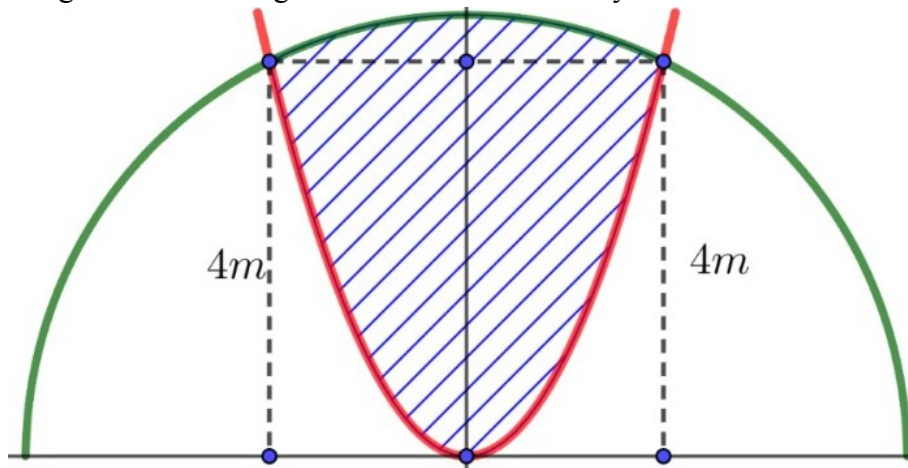
$$\text{Đặt } 3x+1=t \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt$$

$$\text{Với } x=-1 \Rightarrow t=-2$$

$$x=0 \Rightarrow t=1$$

$$\Rightarrow I = \int_{-2}^1 f(t) \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \right] = \frac{1}{3} (S_A - S_B) = 3$$

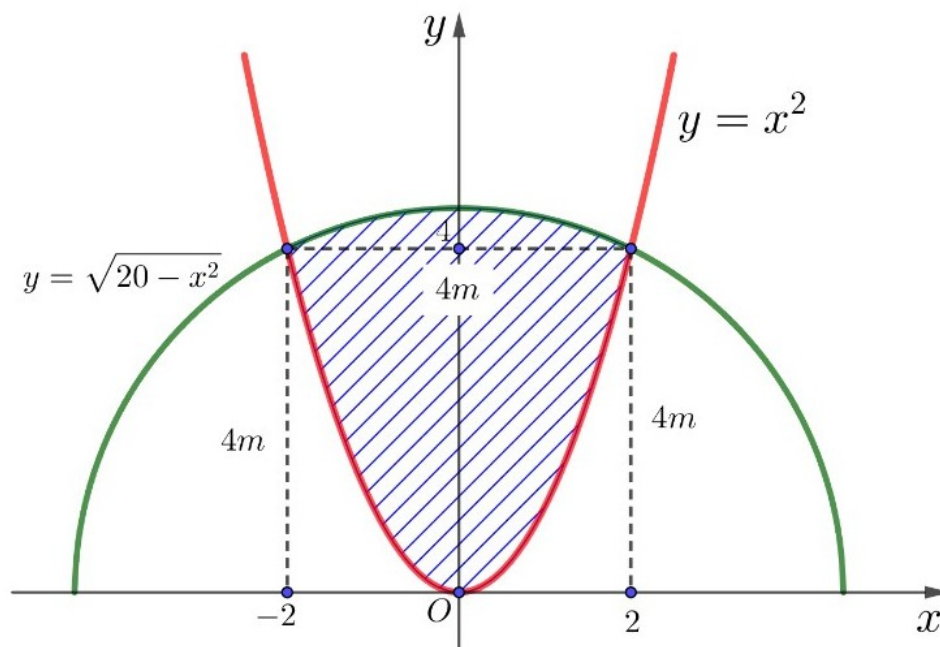
Câu 56. Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng 4m. Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/m² và 100.000 đồng/m². Hỏi số tiền cần để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó gần nhất với số nào sau đây?



*A. 3.739.000 (đồng). B. 1.948.000 (đồng). C. 3.926.000 (đồng). D. 4.115.000 (đồng).

Lời giải

Kết hợp vào hệ trục tọa độ, ta được:



Gọi parabol là $(P): y = ax^2$. Do $F(2;4) \in (P)$ nên $(P): y = x^2$.

Gọi đường tròn có tâm ở gốc tọa độ là $(C): x^2 + y^2 = R^2$. Do $F(2;4) \in (C)$ nên nửa đường tròn trên là $y = \sqrt{20 - x^2}$.

$$S_1 = 2 \cdot \int_{-2}^2 (\sqrt{20 - x^2} - x^2) dx = 20 \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{8}{3}$$

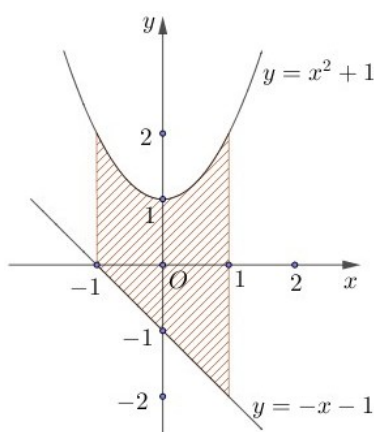
Đặt S_1 là diện tích phần tô đậm. Khi đó:

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2 - S_1 = 10\pi - 20 \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{8}{3}$$

Đặt S_2 là diện tích phần không tô đậm. Khi đó:

Vậy: Số tiền cần để trồng hoa và cỏ Nhật Bản là: $T = 150000 \cdot S_1 + 100000 \cdot S_2 \approx 3738574$ (đồng).

Câu 57. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 + 1$; $y = -x - 1$ và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 1$.



Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox bằng

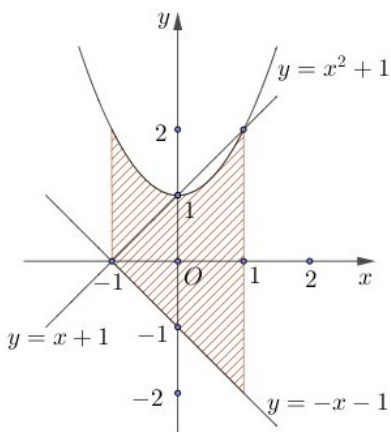
A. $\frac{176\pi}{15}$.

B. $\frac{14\pi}{3}$.

*C. $\frac{21\pi}{5}$.

D. $\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải



Gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2 + 1$, $y = 0$; $x = -1$, $x = 0$. Khi quay (H_1) quanh trục Ox thì khối

tròn xoay được tạo thành có thể tích
$$V_1 = \pi \int_{-1}^0 (x^2 + 1)^2 dx = \frac{28\pi}{15}.$$

Gọi (H_2) là hình phẳng được giới hạn bởi $y = -x - 1$, $y = 0$; $x = 0$, $x = 1$. Khi quay (H_2) quanh trục Ox thì

khối tròn xoay được tạo thành có thể tích
$$V_2 = \pi \int_0^1 (-x - 1)^2 dx = \frac{7\pi}{3}.$$

Vậy thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox là $V = V_1 + V_2 = \frac{21\pi}{5}.$

---HẾT---

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>