Chương

Bài 3. TÍCH CỦA MỘT VECTO VỚI MỘT SỐ

A. Lý thuyết

1. Tích của một số với một vecto

Định nghĩa

» Cho số $k \neq 0$ và một véc tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của véc tơ $\vec{a}$ với k là một véc tơ.

▶ **Ký hiệu** $k\vec{a}$ có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$,

Khi đó $k\vec{a}$:

- *Cùng hướng* với $\vec{a}$ nếu $k > 0$,
- *Ngược hướng* với $\vec{a}$ nếu $k < 0$

$0.\vec{a} = \vec{0}; 0.\vec{k} = \vec{0}$

Tính chất

Với hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì và hai số thực số k, h ta có

(1) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

(2) $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$

(3) $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$

(4) $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$

2. Trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

» Nếu I là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

và $\forall M$, ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

» Nếu G là trọng tâm của ΔABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

và $\forall M$, ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

3. Điều kiện để hai vecto cùng phương

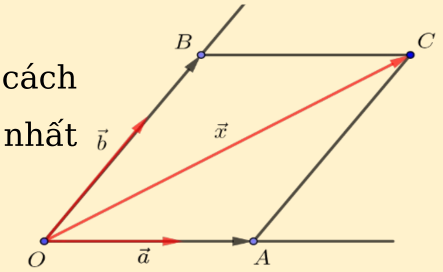
» Điều kiện cần và đủ để hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) là có một số thực k để $\boxed{\vec{a} = k\vec{b}}$.

» ***Nhận xét:***

4. Phân tích một vectơ theo hai vecto không cùng phương

» Cho hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương.

» Khi đó mọi vec tơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h,k thực duy nhất sao cho $\boxed{\vec{x}=h\vec{a}+k\vec{b}}$.



B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Dựng vectơ

Phương

(1) **Dựng vectơ $\vec{m}=k.\vec{a}$:**

Khi đó $\vec{m}=k.\vec{a}$:

- *Cùng hướng* với $\vec{a}$ nếu $k>0$,
- *Ngược hướng* với $\vec{a}$ nếu $\vec{a}$

» Quy ước: $0.\vec{a}=\vec{0};0.\vec{k}=\vec{0}$.

(2) **Điểm đặc biệt:**

- Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
- Điểm G là trọng tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Ví dụ 1.1.

Cho hai điểm phân biệt A,B. Xác định điểm M biết

(1) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (2) $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Lời giải

(1) A, B

Ta có: $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}$ cùng hướng và $AM=\frac{2}{3}AB$.

(2) $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Ta có: $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}$ cùng hướng và $AM=3AB$.

Ví dụ 1.2.

Cho đoạn thẳng AB và điểm M nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$.
Tìm k trong các đẳng thức sau:

(1) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ (2) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ (3) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$

Lời giải

(1) AB

Vì $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng và $AM = \frac{1}{5}AB$ nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{1}{5}$.

(2) $AM = \frac{1}{5}AB$

Vì $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng và $MA = \frac{1}{4}MB$ nên $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB} \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$.

(3) M

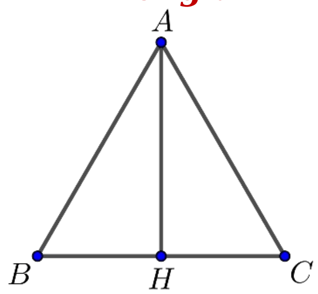
Vì $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng và $MA = \frac{1}{5}AB$ nên $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = -\frac{1}{5}$.

Ví dụ 1.3.

Cho tam giác đều ABC. Xác định

(1) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ (2) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Lời giải



(1) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}.$$

(2) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Gọi H là trung điểm của BC.

Ta có: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AH}$

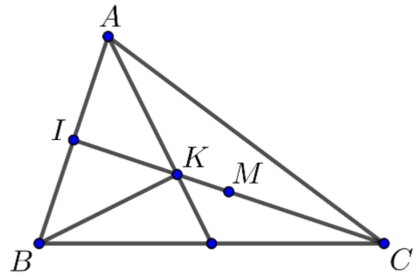
Ví dụ 1.4.

Cho tam giác ABC.

(1) Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}$

(2) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Lời giải



(1) Tìm điểm ABC sao cho ABC

Ta có: $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC}\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

$\Rightarrow K$ là trọng tâm của tam giác ABC.

(2) Tìm điểm $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}$ sao cho M

Gọi I là trung điểm của AB.

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Rightarrow M$ là trung điểm của IC.

Dạng 2. Sự cùng phương của hai vectơ – Ba điểm thẳng hàng

Phương

(1) **Hai vectơ cùng phương:**

- Điều kiện cần và đủ để hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ ($\vec{b}\neq\vec{0}$) là có một số thực k để $\boxed{\vec{a}=k\vec{b}}$

(2) **Ba điểm thẳng hàng:**

- Ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ có một số thực $k\neq 0$ để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

(3) **Hai điểm trùng nhau:**

- Để chứng minh hai điểm M,N trùng nhau

$\rightarrow$ chứng minh $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}$ với O là một điểm nào đó, *hoặc*

$\rightarrow$ chứng minh $\overrightarrow{MN}=\vec{0}$.

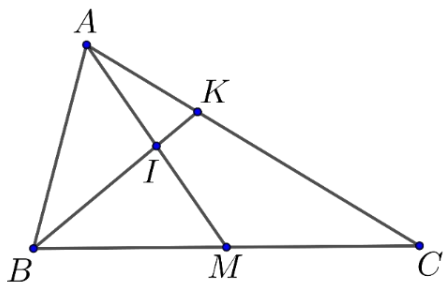
(4) **Hai đường song song:**

- Nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ và hai đường thẳng AB và CD phân biệt thì $AB//CD$.

Ví dụ 2.1.

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK=\frac{1}{3}AC$. Chứng minh rằng ba điểm B, I, K

Lời giải



- Ta có $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right)$ (Do BI là đường trung tuyến ΔABM)

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$ (Do M là trung điểm của BC)

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KA}\right)+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KC}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{BK}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{KC}$

- Mà $AK=\frac{1}{3}AC$ nên $KC=2KA \Rightarrow \overrightarrow{KC}=-2\overrightarrow{KA}\Leftrightarrow\overrightarrow{KC}+2\overrightarrow{KA}=\vec{0}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\overrightarrow{KC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}=\vec{0}$.

- Do đó $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BK}+\vec{0}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BK}$. Vậy ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Ví dụ 2.2.

Cho 4 điểm O,A,B,C sao cho $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Chứng tỏ rằng A,B,C thẳng

Lời giải

- Ta có: $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)-3\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

⇨ Vậy: A,B,C thẳng hàng.

Ví dụ 2.3.

Cho hình bình hành $ABCD$ trên BC lấy điểm H, trên BD lấy điểm K sao cho $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$. Chứng minh A,K,H thẳng hàng.

Lời giải

- Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{BH}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}\end{cases}$

Mà: $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}=\frac{5}{6}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\right)$

- Khi đó: $\overrightarrow{AK}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AH}$ ⇨ Vậy A,K,H thẳng hàng.

Ví dụ 2.4.

Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N được xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

Chứng minh rằng $MN // AC$.

Lời giải

- Ta có $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{BC}$ nên $MA // BC$.
- Do đó $M \notin AC$ (1).
- Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\left(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MA}\right)-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NM}-\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

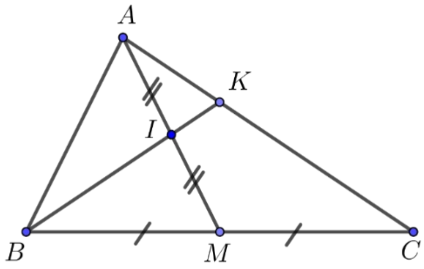
$\Leftrightarrow \overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AC}$ (2).

- Từ $(1),(2)$ ta có $MN // AC$.

Ví dụ 2.5.

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm AM và K thuộc cạnh AC sao cho $AK=\frac{1}{3}AC$. Chứng minh B,I,K thẳng hàng.

Lời giải



• Ta có: $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\left(1\right)$.

• Ta có: $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\left(2\right)$.

Từ $\left(1\right),\left(2\right)\Rightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BK}$ hay B,I,K thẳng hàng.

Dạng 3. Tập hợp điểm thỏa mãn đẳng thức

Phương

▶ Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn một đẳng thức véctơ, ta biến đổi đẳng thức véc tơ đó về các tập hợp điểm cơ bản đã biết. Chẳng hạn:

- Tập hợp các điểm *cách đều hai đầu mút* của một đoạn thẳng là *đường trung trực* của đoạn thẳng đó.
- Tập hợp các điểm *cách đều một điểm cố định* một khoảng không đổi là *đường tròn* có tâm là điểm cố định và bán kính là khoảng không đổi.

Ví dụ 3.1.

Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau:

(1) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$ (2) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$

Lời giải

(1) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$

- Ta có $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{0}$.

⇨ Vì A và B là hai điểm phân biệt nên không tồn tại điểm M.

(2) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$

- Gọi G là điểm thoản mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ (hay G là trọng tâm tam giác ABC).
- Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{0}\Rightarrow M\equiv G$.

⇨ Vậy tập hợp điểm M là trọng tâm tam giác ABC.

Ví dụ 3.2.

Cho tam giác M. Tìm tập hợp điểm $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$ trong mỗi trường hợp sau:

(1) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$

(2) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$

(3) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$

Lời giải

(1) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$

- $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=AB$ (1).
- Gọi I là trung điểm AB, khi đó $(1)\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right|=AB\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}\right|=AB\Leftrightarrow MI=\dfrac{AB}{2}$.

⇨ Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $R=\frac{AB}{2}$.

(2) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|\ (*)$

- Gọi G là trọng tâm ΔABC, và I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
- Biểu thức $(*)\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{MG}\right|=\left|3\overrightarrow{MI}\right|\Leftrightarrow 3MG=3MI\Leftrightarrow MG=MI$.

⇨ Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn GI.

(3) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|\ (*)$

- Gọi I và J lần lượt là các điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0},\ \overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\vec{0}$.
- Biểu thức $(*)\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{MI}\right|=\left|3\overrightarrow{MJ}\right|\Leftrightarrow 3MJ=3MJ\Leftrightarrow MI=MJ$.

⇨ Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn IJ.

Ví dụ 3.3.

Cho điểm O cố định và hai vecto $\vec{u};\vec{v}$ cố định.

Với mỗi số m ta xác định được điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}=m\vec{u}+(1-m)\vec{v}$.

Tìm tập hợp điểm M khi m thay đổi.

✍ ***Lời giải***

- Từ O dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ thì A,B cố định.

$\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OA}+(1-m)\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=m\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)+\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}=m\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}=m\overrightarrow{BA}$.

- Từ đó suy ra A,B,M thẳng hàng.

Vậy tập hợp điểm M chính là đường thẳng AB.

Ví dụ 3.4.

Cho ΔABC và ba vecto cố định $\vec{u};\vec{v};\vec{w}$. Với mỗi số thực t, ta lấy các điểm A',B',C' sao cho $\overrightarrow{AA'}=t\vec{u}$, $\overrightarrow{BB'}=t\vec{v}$, $\overrightarrow{CC'}=t\vec{w}$. Tìm quỹ tích trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$ khi t thay đổi.

✍ ***Lời giải***

- Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, khi đó:

$3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}$

$=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'}$

$=\left(\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}\right)+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=t.\vec{u}+t.\vec{v}+t.\vec{w}=t(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})$

- Đặt $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ thì vecto $\vec{a}$ cố định và $\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}t.\vec{a}$.

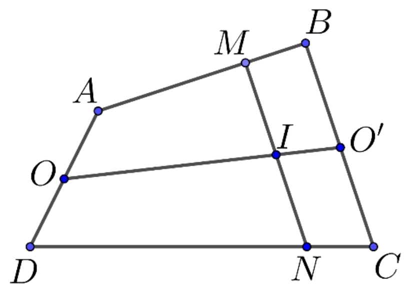
Trường hợp 1: Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ thì các điểm G' trùng với điểm G.

Trường hợp 2: Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì quỹ tích các điểm G' là đường thẳng đi qua G và song song với giá của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ 3.5.

Cho tứ giác $ABCD$. Với mỗi số k tùy ý, lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi

Lời giải



- Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC.
- Khi đó:

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$$

- Vì O và I lần lượt là trung điểm AD và MN

Nên $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN}\right) = \frac{k}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right) = k\overrightarrow{OO'}$

- Do đó: khi k thay đổi, tập hợp các điểm I là đường thẳng OO'.

Dạng 4. Biểu diễn vectơ theo 2 vectơ không cùng phương

Phương

Mọi vec tơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h,k thực duy nhất sao cho $\boxed{\vec{x}=h\vec{a}+k\vec{b}}$.

Ta lưu ý các trường hợp đặc biệt:

(1) Nếu I là trung điểm của AB thì I
và AB, ta có $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

(2) Nếu $\forall M$ là trọng tâm của ΔABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
và AB, ta có ΔABC

(3) Nếu ba biểm A,B,C thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$, với số k xác định.

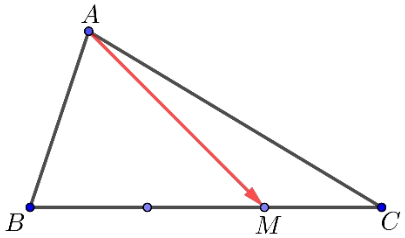
(4) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Ví dụ 4.1.

Cho tam giác ABC. Gọi M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB=2MC$.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải



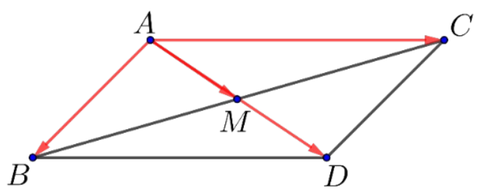
Ta có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ (đpcm).

Ví dụ 4.2.

Cho ΔABC có trung tuyến AM, M là trung điểm của BC. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Cách 1:



Vì M là trung điểm của BC

Nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Cách 2:

Do M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

- Áp dụng quy tắc 3 điểm, ta có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\;(1)$

- Lại có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}\ (2)$
- Cộng vế với vế của $(1),(2)$ ta được:

$$2\overrightarrow{AM} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\right) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Cách 3:

Xét hình bình hành $ABDC$ có M là trung điểm của BC nên M cũng là trung điểm của $AD \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM}\ (1)$

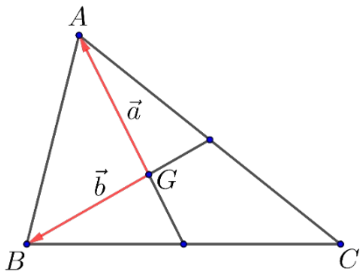
- Áp dụng quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}\ (2)$
- Từ $(1)(2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Ví dụ 4.3.

Gọi G là trọng tâm của ΔABC.

Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{CA}$ theo $\vec{a} = \overrightarrow{GA};\ \vec{b} = \overrightarrow{GB}.$

Lời giải



- Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = \vec{b} - \vec{a}$.
- Vì G là trọng tâm của tam giác ABC

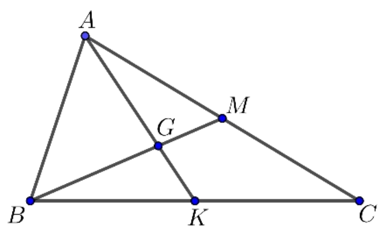
Nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b}$.

- Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = -\vec{b} + \left(-\vec{a} - \vec{b}\right) = -\vec{a} - 2\vec{b}$.
- Ta có: $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC} = \vec{a} - \left(-\vec{a} - \vec{b}\right) = 2\vec{a} + \vec{b}$

Ví dụ 4.4.

Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC, trọng tâm G. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AK}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BM}$

Lời giải



* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$

* $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BK} = 2\left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GK}\right) = 2.\frac{2}{3}\overrightarrow{BM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BM}$

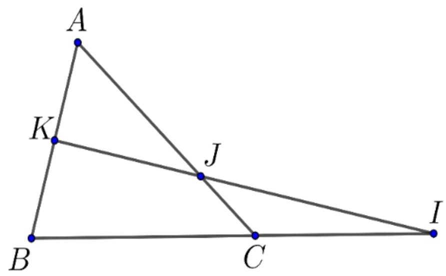
* $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -\left(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC}\right) = -\left(\overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$

Ví dụ 4.5.

Cho ΔABC với I,J,K lần lượt được xác định bởi $\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IC};\overrightarrow{JC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{JA};\overrightarrow{KA}=-\overrightarrow{KB}$.

(1) Tính $\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IK}$ theo $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$

Lời giải



(1) Tính $\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IK}$ theo I,J,K.

- Ta có: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CJ}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}=-\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

- $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BK}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IK}=-2\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

(2) Chứng minh ba điểm I,J,K thẳng hàng.

- Theo câu (1): $\begin{cases}\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{IK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{IK}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\frac{2}{4}\overrightarrow{AC}\right)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{IK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}$

⇨ Vậy I,J,K thẳng hàng.

C Luyện tập

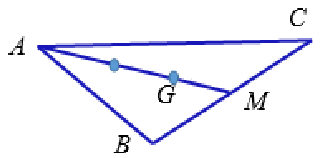
A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho ΔABC với trung tuyến AM và trọng tâm G. Khi đó đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$. **B.** $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$. **C.** $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. **D.** $\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

Lời giải

Chọn C



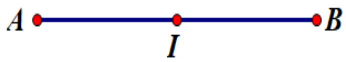
Vì G là trọng tâm ΔABC nên ABC

» Câu 2. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$. **C.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$. **D.** $\overrightarrow{IA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn C



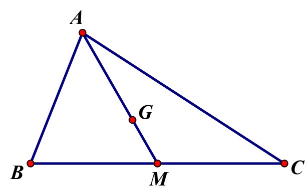
Do I là trung điểm AB nên ABC và hai vectơ AM và G cùng hướng nên $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

» Câu 3. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G. Tìm số thực k thỏa mãn $\overrightarrow{GA}=k\overrightarrow{GM}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C



Vì $GA=2GM$, $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GM}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GM}$. Vậy $k=-2$.

» Câu 4. Nếu I là trung điểm đoạn thẳng AB và $\overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{AB}$ thì giá trị của k bằng

A. 2. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có k và $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$, $k=\frac{5}{8}$ ngược hướng. Vậy $k=1$

» Câu 5. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho $AM=\frac{1}{4}AB$. Phát biểu nào sau đây là đúng:

A. $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. **B.** $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$. **C.** $\overrightarrow{MB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{MA}$.

Lời giải

Chọn D

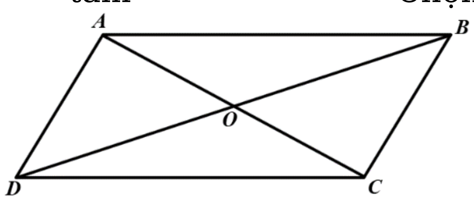
Vì $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng $\overrightarrow{AB}$ mà $AM=\frac{1}{4}AB$ nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Vì $\overrightarrow{MA}$ ngược hướng $\overrightarrow{MB}$ mà $MA=\frac{1}{3}MB$ nên $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$

Vì $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng $\overrightarrow{AB}$ mà $MB=\frac{3}{4}AB$ nên $\overrightarrow{MB}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$

Vì $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng $\overrightarrow{MA}$ mà $MB=3MA$ nên $\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{MA}$.

» Câu 6. Cho hình bình hành $\overrightarrow{BC}.$ tâm $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$ Chọn khẳng định đúng?



A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$ **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}.$ **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn C

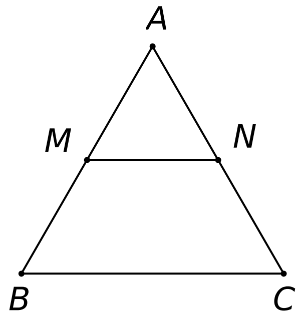
Có $\overrightarrow{AO},\overrightarrow{CA}$ ngược hướng và $\left|\overrightarrow{AO}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA}\right|$ nên $\overrightarrow{AO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

» Câu 7. Gọi $\vec{a}$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $\vec{b}$ của tam giác đều $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$. **B.** $\vec{u}=\frac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}$. **C.** $\vec{v}=2\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$. **D.** $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\vec{v}=2\vec{a}-9\vec{b}$ là đường trung bình của tam giác $\vec{u}=2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$.

Do đó $\vec{v}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

» Câu 8. Cho điểm $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ nằm giữa hai điểm $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $AM=\frac{2}{3}AB$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Lời giải

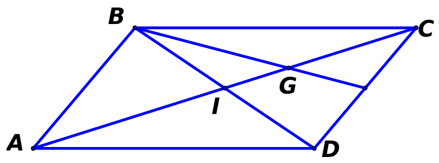
Chọn D

Do điểm nằm giữa hai điểm a và ABC nên D ngược hướng.

BC, $DC=2DB$ $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ $\frac{m}{n}$

Vậy: $\frac{1}{3}$.

» Câu 9. Cho hình bình hành $\vec{n}=\frac{-5}{2}\vec{a}+5\vec{b}$ tâm $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}=\frac{-2}{5}\left(\frac{-5}{2}\vec{a}+5\vec{b}\right)=\frac{-2}{5}\vec{n}$; $\vec{m}$ là trọng tâm tam giác $\vec{n}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?



A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$. **B.** $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|$.

C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$. **D.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn C

+ Có là G là trọng tâm tam giác BCD nên áp dụng tính chất trọng tâm ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$ nên A đúng.

+ $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|=BD;\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=DB$ nên B đúng.

+ Áp dụng tính chất trung điểm ta có $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ nên D đúng.

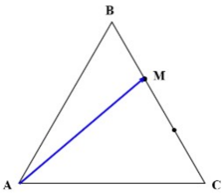
+ Có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ nên C sai.

» Câu 10. Cho tam giác ABC có M thuộc cạnh BC sao cho $CM=2MB$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
B. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
D. $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

» Câu 11. Biết tam giác ABC có AM là đường trung tuyến và G là trọng tâm. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
B. $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
D. $\overrightarrow{GM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

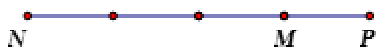
Chọn B

Ta có: M là trung điểm BC nên với điểm G là trọng tâm, ta có:

$\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}.\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$

hay $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

» Câu 12. Cho ba điểm M,N,P được xác định như hình vẽ dưới đây. Khi đó véc tơ $\overrightarrow{MN}$ bằng



A. $4\overrightarrow{MP}$.
B. $ABCD$.
C. O.
D. M,N.

Lời giải

Chọn C

Ta có OA và CD là các véc tơ cùng hướng và $\overrightarrow{MN}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}$ $a+b$ $a+b=1$.

Vậy $a+b=\frac{1}{2}$.

» Câu 13. Cho AG và điểm M. Gọi AB lần lượt là hai điểm thỏa mãn $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{CI}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$.
B. $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.
C. $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.
D. $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn C

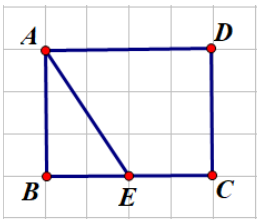
Ta có $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.

» Câu 14. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có E là trung điểm BC. Khi đó $\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{EC}$ bằng

A. $\overrightarrow{DB}$. **B.** $\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{DE}$.

Lời giải

Chọn C



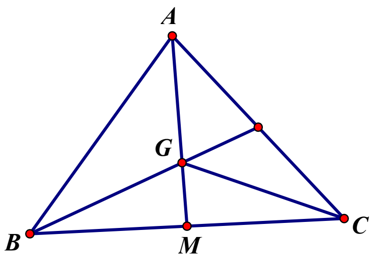
Ta có: $\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$.

» Câu 15. Cho tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$ với G là trọng tâm. Tính $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|$

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}$

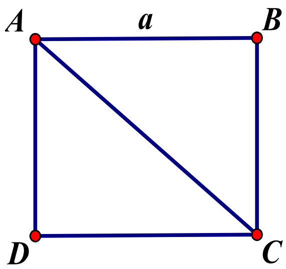
$\Rightarrow\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|-\overrightarrow{GA}\right|=GA=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}.2a\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

» Câu 16. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ bằng

A. $3a$. **B.** $2a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|2\overrightarrow{AC}\right|=2a\sqrt{2}$.

» Câu 17. Cho đoạn thẳng AB và điểm I sao cho $3\overrightarrow{AI}=5\overrightarrow{IB}$. Tìm k biết $\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AB}$

A. $k=\frac{5}{8}$. **B.** $k=1$. **C.** $k=\frac{5}{3}$. **D.** $k=\frac{3}{5}$.

✍ ***Lời giải***

Chọn A

Ta có $3\overrightarrow{AI}=5\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}=5\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}\Rightarrow k=\frac{5}{8}$.

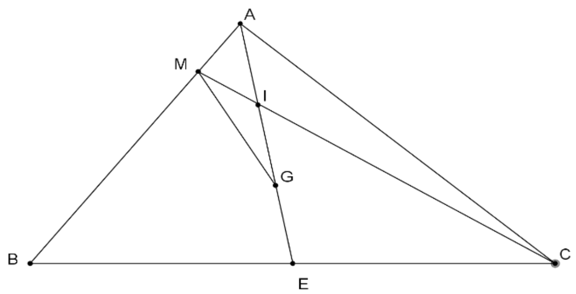
» Câu 18. Cho ΔABC có E là trung điểm BC, trọng tâm G. Gọi I là trung điểm AG, M thuộc AB sao cho $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$. Phân tích $\overrightarrow{CI}$ theo $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$.

A. $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.

✍ ***Lời giải***

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)-\frac{1}{6}\overrightarrow{CA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.

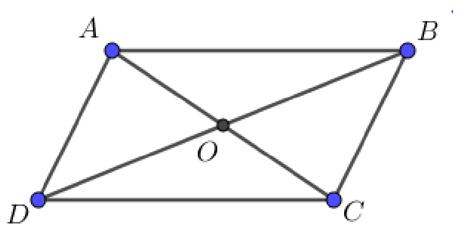
» Câu 19. Cho hình bình hành $ABCD$, biểu diễn $\overrightarrow{DC}$ theo $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

A. $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. **B.** $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

C. $\overrightarrow{DC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

✍ ***Lời giải***

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

» **Câu 20.** Cho tam giác $ABC.$ Lấy điểm N thuộc cạnh BC sao cho $NB=\frac{5}{6}BC.$ Hãy phân tích $\overrightarrow{AN}$ theo các véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}.$

A. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

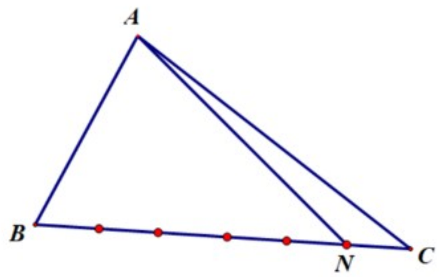
B. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có N thuộc cạnh BC sao cho $MB=\frac{5}{6}BC\Rightarrow \overrightarrow{CN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}.$

Vậy $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

» **Câu 21.** Cho ΔABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB. Phân tích $\overrightarrow{AB}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{CP}$

A. $\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{4}{3}\overrightarrow{CP}$.

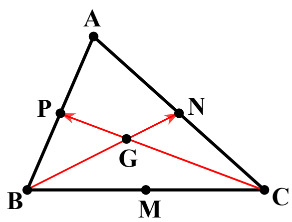
B. $\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$.

C. $\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$.

D. $\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$

Mà $\overrightarrow{GB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BN};\overrightarrow{GC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$

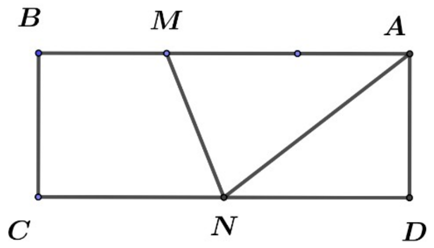
Do đó $\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$

» Câu 22. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho $AM=2BM$, $CD=2CN$. Giả sử $\overrightarrow{BN}=a.\overrightarrow{BA}+b.\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{MN}=c.\overrightarrow{BA}+d.\overrightarrow{BC}$. Tính tổng $S=a+b+c+d$?

A. $S=\frac{1}{2}$. **B.** $S=\frac{8}{3}$. **C.** $S=\frac{7}{6}$. **D.** $S=\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

+) $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow a=\frac{1}{2};\ b=1$.

+) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow c=\frac{1}{6};d=1$.

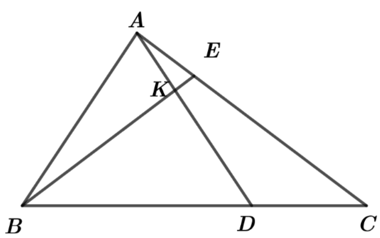
Vậy $S=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{6}+1=\frac{8}{3}$.

» Câu 23. Cho tam giác ABC. Gọi D,E lần lượt là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Gọi BE cắt AD tại K. Tỉ số $\frac{AK}{AD}$ bằng

A. $\frac{4}{13}$. **B.** $\frac{5}{11}$. **C.** $\frac{4}{11}$. **D.** $\frac{5}{13}$.

Lời giải

Chọn A



Vì $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\ (1)$.

Giả sử $\overrightarrow{AK}=x.\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{BK}=x.\overrightarrow{BD}+(1-x).\overrightarrow{BA}$.

Mà $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{BK}=\frac{3x}{4}.\overrightarrow{BC}+(1-x).\overrightarrow{BA}$.

Vì B,K,E thẳng hàng (B không trùng E) nên có m sao cho $\overrightarrow{BK}=m\overrightarrow{BE}$.

Do đó ta có: $\frac{3x}{4}\overrightarrow{BC}+(1-x)\overrightarrow{BA}=\frac{m}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{3m}{4}\overrightarrow{BA}$. Hay $\left(\frac{m}{4}-\frac{3x}{4}\right)\overrightarrow{BC}+\left(\frac{3m}{4}+x-1\right)\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

Do $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}$ không cùng phương nên ta có: $\begin{cases}\frac{m}{4}-\frac{3x}{4}=0\\ \frac{3m}{4}+x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{12}{13}\\ x=\frac{4}{13}\end{cases}$.

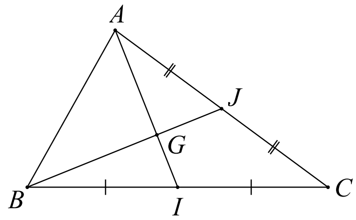
Vậy $\frac{AK}{AD}=\frac{4}{13}$.

» Câu 24. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BG}$. **B.** $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BG}$. **C.** $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BG}$. **D.** $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BG}$.

Lời giải

Chọn B



Vì I là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Gọi J là trung điểm của AC $\Rightarrow\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)$.

$\Rightarrow\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GA}\right)=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BG}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\right)$.

$\Rightarrow\overrightarrow{AI}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BG}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$.

$\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BG}$.

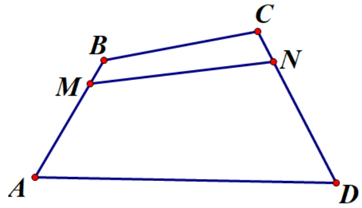
» Câu 25. Cho tứ giác $ABCD$. Điểm M thuộc cạnh AB, điểm N thuộc cạnh CD và thỏa mãn $\frac{MA}{MB}=\frac{ND}{NC}=4$. Khẳng định nào sau đây là đúng khi phân tích $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$?

A. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}-\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn A



Vì điểm M thuộc đoạn AB, N thuộc đoạn CD và thỏa mãn $\frac{MA}{MB}=\frac{ND}{NC}=4$ nên suy ra

$\overrightarrow{MA}=-4\overrightarrow{MB}$ hay $\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{DN}=-4\overrightarrow{CN}$ hay $\overrightarrow{DN}+4\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

Ta có

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$,

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MN}=4\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CN}$.

Cộng vế theo vế ta được

$$5\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\right)+\overrightarrow{AD}+4\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{DN}+4\overrightarrow{CN}\right)$$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{MN}=\vec{0}+\overrightarrow{AD}+4\overrightarrow{BC}+\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}.$$

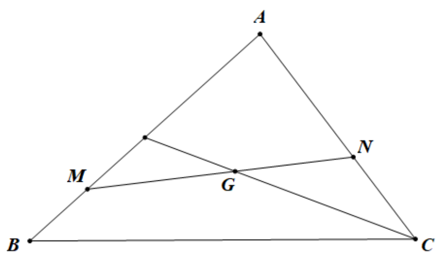
Vậy $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$.

» Câu 26. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi M và N là các điểm lần lượt thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AC}$, $k\in\mathbb{R}$. Tìm k để ba điểm M,N,G thẳng hàng.

A. $k=\frac{5}{3}$. **B.** $k=\frac{3}{5}$. **C.** $k=\frac{3}{4}$. **D.** $k=\frac{3}{7}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GM}+3\left(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GM}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{GB}$.

Lại có $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN}-\overrightarrow{GA}=k\left(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN}=(1-k)\overrightarrow{GA}+k\overrightarrow{GC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN}=(1-k)\overrightarrow{GA}+k\left(-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN}=(1-2k)\overrightarrow{GA}-k\overrightarrow{GB}$.

Ba điểm M,N,G thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{GN}$ và $\overrightarrow{GM}$ cùng phương.

Suy ra $\dfrac{1-2k}{\frac{1}{4}}=\dfrac{-k}{\frac{3}{4}}\Leftrightarrow k=\dfrac{3}{5}$.

Cách 2:

Nếu $k=0$ thì $N\equiv A$. Khi đó ba điểm *M*, *G*, *N* không thẳng hàng. Suy ra $k\neq 0$.

Ta có $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{k}\overrightarrow{AN}\right)=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{3k}\overrightarrow{AN}$

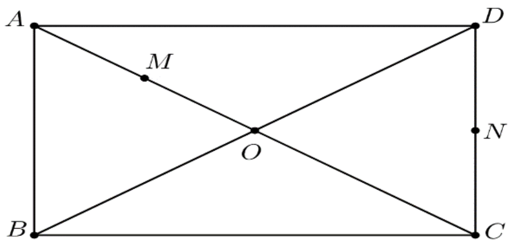
Ba điểm *G*, *M*, *N* thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{3k}=1\Leftrightarrow k=\dfrac{3}{5}$.

» Câu 27. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của OA và CD. Biết $\overrightarrow{MN}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}$. Tính $a+b$.

A. $a+b=1$. **B.** $a+b=\dfrac{1}{2}$. **C.** $a+b=\dfrac{3}{4}$. **D.** $a+b=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Xét $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

Do $\overrightarrow{MN}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\ b=\dfrac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow a+b=1$.

» Câu 28. Cho tam giác ABC. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn D

Vì điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$ nên M cách A một khoảng bằng độ dài cạnh BC. Như thế tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A bán kính BC.

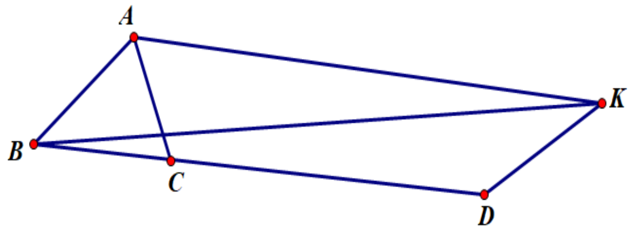
Suy ra có vô số điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

» Câu 29. Cho tam giác BC đều có cạnh bằng M. Biết tập hợp các điểm $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|$ là một đường tròn. Hỏi đường tròn đó có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{22}$. **B.** $\sqrt{19}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{21}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|-5\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BK}\right|=BK=10\sqrt{21}$ với K là điểm sao cho tứ giác $ABDK$ là hình bình hành và D điểm sao cho $\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{BC}$.

Gọi I là điểm sao cho $\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$, khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|10\overrightarrow{MI}\right|=10MI$.

Từ đó: $\left|\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow 10MI=10\sqrt{21}\Leftrightarrow MI=\sqrt{21}$.

Tức tập hợp các điểm M là một đường tròn tâm I bán kính bằng $\sqrt{21}$.

» Câu 30. Cho tam giác ABC. Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\frac{3}{2}\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ là

A. Đường trung trực của AB.

B. Đường trung trực của GE với G là trọng tâm tam giác ABC, E là trung điểm AB.

C. Đường tròn tâm G, bán kính $R=AB$ với G là trọng tâm tam giác ABC.

D. Đường tròn tâm G, bán kính $R=\frac{3}{2}AB$ với G là trọng tâm tam giác ABC.

Lời giải

Chọn B

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, E là trung điểm AB.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\frac{3}{2}\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{MG}\right|=\frac{3}{2}\left|2\overrightarrow{ME}\right|\Leftrightarrow 3\left|\overrightarrow{MG}\right|=\frac{3}{2}.2\left|\overrightarrow{ME}\right|$
$\Leftrightarrow MG=ME$

Suy ra, tập hợp điểm M là đường trung trực của GE.

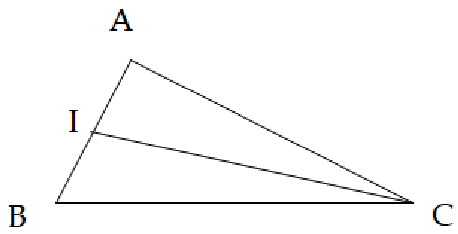
» Câu 31. Cho tam giác ABC, I là trung điểm của đoạn AB. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=2MC$ là

A. Đường trung trực của đoạn IC. **B.** Đường tròn tâm I bán kính IC.

C. Đường tròn tâm I đường kính IC. **D.** Đường tròn tâm I bán kính MC.

Lời giải

Chọn A



Áp dụng tính chất trung điểm của đoạn thẳng ta có:
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=2\left|\overrightarrow{MI}\right|=2MI$.

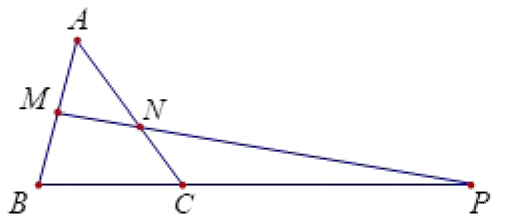
Nên ta được: $2MI=2MC\Rightarrow MI=MC$, trong đó các điểm I,C cố định. Khoảng cách từ điểm M tới các điểm I,C bằng nhau nên M thuộc đường trung trực của đoạn IC.

» Câu 32. Cho tam giác ABC. Gọi M,N là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $2\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{BC}$. Tìm k để M,N,P thẳng hàng.

A. $k=-3$. **B.** $k=4$. **C.** $k=-4$. **D.** $k=3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (1)

$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}-\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\left(k-\frac{3}{5}\right)\overrightarrow{AC}+(1-k)\overrightarrow{AB}$ (2).

Khi đó M,N,P thẳng hàng thì $\exists m\in\mathbb{R}:\overrightarrow{NP}=m\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\begin{cases}k-\frac{3}{5}=\frac{3m}{5}\\1-k=\frac{-m}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=3\\m=4\end{cases}$

Vậy $k=3$.

» Câu 33. Cho tam giác ABC. Các điểm M,N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$. Xác định x để A,M,N thẳng hàng.

A. $x=2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=\frac{1}{2}$. **D.** $x=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:
$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$

Và $\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{BC} + (x+1)\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC} + (x+1)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = (x+1)\overrightarrow{AB} + x.\overrightarrow{BC}$

Vậy $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} = x.\overrightarrow{BC} + (x+1)\overrightarrow{AB} \end{cases}$.

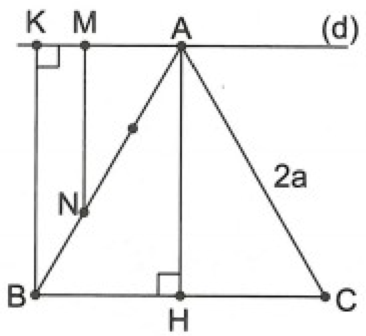
Để A, N, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AN}, (k \neq 0) \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{-1}{x+1} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

» Câu 34. Cho tam giác ABC đều cạnh $2a, (d)$ là đường thẳng qua A và song song BC. Khi M di động trên (d) thì giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right|$ là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Chọn điểm N thuộc đoạn AB sao cho $NA = 2NB \Rightarrow 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA} = \vec{0}$

Ta có $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA} + 2\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}\right)\right| = \left|3\overrightarrow{MN} + \left(2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA}\right)\right| = \left|3\overrightarrow{MN}\right| = 3MN$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của N trên đường thẳng (d).

Gọi H là trung điểm BC, K là hình chiếu vuông góc của điểm B trên đường thẳng (d).

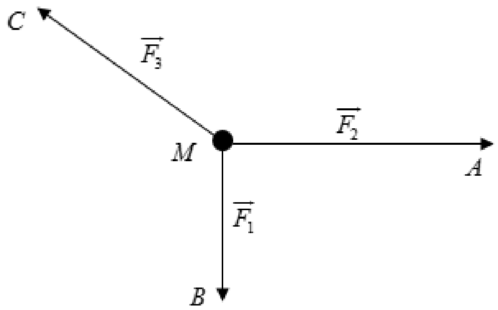
Theo định lý Talet ta có

$\frac{MN}{BK} = \frac{AN}{AB} \Leftrightarrow \frac{MN}{AH} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow MN = \frac{2}{3}AH \Leftrightarrow MN = \frac{2}{3}\sqrt{AB^2 - BH^2}$

$\Leftrightarrow MN = \frac{2}{3}\sqrt{(2a)^2 - a^2} \Leftrightarrow MN = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $3MN$ và bằng $2a\sqrt{3}$.

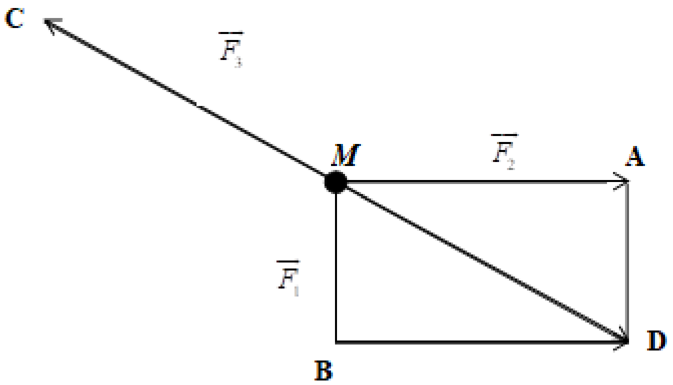
» Câu 35. Cho ba lực $\vec{F_1} = \overrightarrow{MA}, \vec{F_2} = \overrightarrow{MB}, \vec{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Biết cường độ của $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ lần lượt là $28N$ và $45N$. Tìm cường độ của lực $\vec{F_3}$ biết $\widehat{AMB} = 90^0$.



A. $73N$. **B.** $53N$. **C.** $60N$. **D.** $80N$.

✍ ***Lời giải***

Chọn B



Do vật đứng yên nên ta có $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{0} \Rightarrow \vec{F_3}=-\left(\vec{F_1}+\vec{F_2}\right)$.

Dựng hình chữ nhật $AMBD$. Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{F_1}+\vec{F_2}$

Suy ra $\vec{F_3}=-\overrightarrow{MD}$ nên $F_3=MD=\sqrt{MA^2+MB^2}=\sqrt{28^2+45^2}=53(N)$

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» Câu 36. Cho bốn điểm A,B,C,D có M,N là trung điểm của AB,CD. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$		
(b)	$\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$		
(c)	$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$		
(d)	$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$		

✍ ***Lời giải***

(a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

M là trung điểm của AB nên ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

N là trung điểm của CD nên ta có: $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$

» **Chọn** SAI.

(d) $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Ta lại có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}\end{cases}$

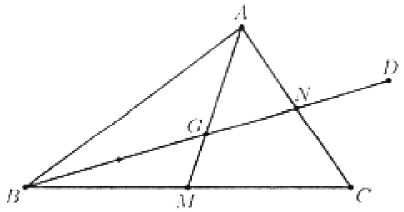
Cộng hai đẳng thức trên vế theo vế, ta chứng minh được $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 37. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi D là điểm đối xứng của B qua G,M là trung điểm của BC. Khi đó:

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}$		
(b)	$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$		
(c)	$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BN}$		
(d)	$\overrightarrow{MD}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$		

Lời giải



(a) $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}$

$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Ta có: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

» **Chọn** SAI.

(c) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BN}$

Ta có: $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}$

» **Chọn** SAI.

(d) $\overrightarrow{MD}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$

Ta có: $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$

$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}\right)$

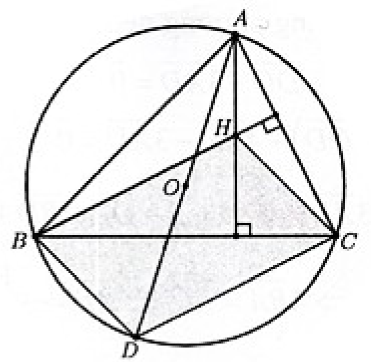
$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 38. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O, H là trực tâm tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O. Khi đó:

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	$BD//CH$		
(b)	$CD//BH$		
(c)	$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HO}$		
(d)	$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}$		

Lời giải



(a) $BD//CH$

Xét tam giác ABD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên $AB\perp BD$;

Mặt khác $AB\perp CH$ nên $BD//CH$ (1).

» Chọn ĐÚNG.

(b) $CD//BH$

Tương tự, tam giác ACD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên $AC\perp CD$;

Mặt khác $AC\perp BH$ nên $CD//BH$ (2).

» Chọn ĐÚNG.

(c) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HO}$***;***

Từ (1) và (2) suy ra $BDCH$ là hình bình hành.

Ta có: $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$ (vì O là trung điểm AD).

» Chọn SAI.

(d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}$

Ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC}$

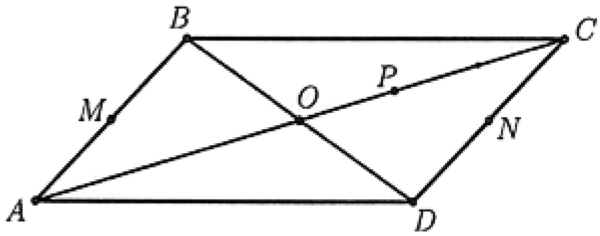
$=3\overrightarrow{OH}+\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)=3\overrightarrow{OH}+2\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{OH}.$

» **Chọn** SAI.

» **Câu 39.** Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O. Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm của AB,CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OP}=\vec{0}$		
(b)	$3\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$		
(c)	Ba điểm B,P,N không thẳng hàng		
(d)	Ba đường thẳng AC,BD,MN đồng quy		

Lời giải



(a) $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OP}=\vec{0}$

Ta có: $\overrightarrow{OA}=-3\overrightarrow{OP}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OP}=\vec{0}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $3\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Khi đó: $3\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{AC}=3\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}\right)-2.2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OP}=\vec{0}$.

» **Chọn** SAI.

(c) *Ba điểm B,P,N không thẳng hàng*

Ta có: $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\Rightarrow P$ là trọng tâm của tam giác BCD,

Do vậy trung tuyến BN của tam giác BCD đi qua trọng tâm P đó.

Vậy ba điểm B,P,N thẳng hàng.

» **Chọn** SAI.

(d) *Ba đường thẳng AC,BD,MN đồng quy*

Nhận xét: AC và BD cắt nhau tại tâm O là trung điểm của mỗi đường.

Mặt khác $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)=\vec{0}$.

Do đó O là trung điểm của MN hay AC,BD,MN đồng quy tại O.

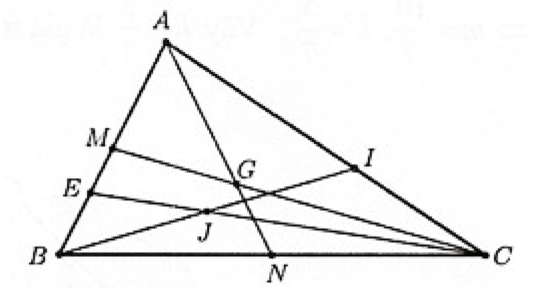
» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 40.** Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,BC. Lấy hai điểm I,J sao cho: $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ và $2\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	M,N,J thẳng hàng		

)			
(b)	$\overrightarrow{JM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{JN}$		
(c)	J là trung điểm của BI		
(d)	Gọi E là điểm thuộc AB sao cho $\overrightarrow{AE}=\dfrac{5}{7}\overrightarrow{AB}$ thì C,E,J thẳng hàng		

Lời giải



(a) *M,N,J thẳng hàng.*

Ta có: $2\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=2\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}\right)+3\left(\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}\right)=4\overrightarrow{JM}+6\overrightarrow{JN}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{JM}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{JN}$. Do đó J,M,N thẳng hàng.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\overrightarrow{JM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{JN}$

Và điểm J thuộc đoạn MN và thỏa mãn $JM=\dfrac{3}{2}JN$.

Do J nằm trong MN nên $\overrightarrow{JM}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{JN}$

» **Chọn** SAI.

(c) *J là trung điểm của BI.*

Ta có: $\overrightarrow{JM}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{JN}\Leftrightarrow \overrightarrow{JM}=-\dfrac{3}{2}\left(\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{MN}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{2}\overrightarrow{JM}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow \overrightarrow{JM}=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{MN}$

$2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{CI}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{CA}.$

Khi đó: $\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{MB}=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{MN}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\dfrac{3}{10}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-2\left(-\dfrac{3}{10}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=-2\overrightarrow{JB}(\text{ do }(1)).$

Vậy J là trung điểm của BI.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) *Gọi E là điểm thuộc AB sao cho $\overrightarrow{AE}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$ thì C,E,J thẳng hàng.*

$\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$

$=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}=-\frac{7}{10}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Mặt khác: $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{AB}$.

Để C,E, J thẳng hàng thì: $\exists m\in\mathbb{R},\overrightarrow{CE}=m\cdot\overrightarrow{CJ}\Leftrightarrow -\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{AB}=-\frac{7m}{10}\overrightarrow{AC}+\frac{m}{2}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-1=-\frac{7m}{10}\\ k=\frac{m}{2}\end{cases}\Rightarrow m=\frac{10}{7},k=\frac{5}{7}\Rightarrow k=\frac{5}{7}$

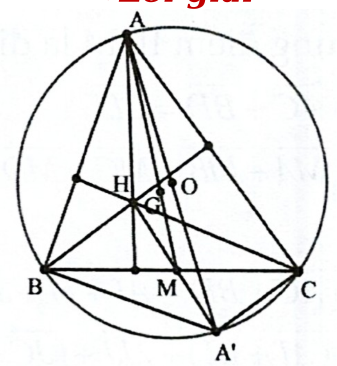
Vậy $\overrightarrow{AE}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 41. Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC. Gọi G là trọng tâm, H là trực tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, AA' là đường kính của (O). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{A'C}$		
(b)	$\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$		
(c)	$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HO}$		
(d)	$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}$		

Lời giải



(a) $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{A'C}$

Do tứ giác $BHCA'$ có $BH//A'C(\perp AC)$ và $CH//BA'(\perp AB)$

Nên $BHCA'$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{A'C}$

» Chọn ĐÚNG.

(b) $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$

Lại có M là trung điểm của đường chéo BC

Nên M là trung điểm của HA' hay H, M, A' thẳng hàng.

Do OM là đường trung bình của $\Delta AHA'$

Nên $AH = 2OM$, mà $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HO}$

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HO}$

(Tứ giác $AHCA'$ là hình bình hành $\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$)

» Chọn SAI.

(d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OH}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

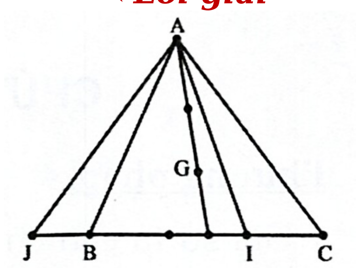
$= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{OH} + 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OH}$.

» Chọn SAI.

» Câu 42. Cho ΔABC. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = BI$. J là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $5JB = JC$. G là trọng tâm ΔABC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{CI}$		
(b)	$\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$		
(c)	$\overrightarrow{AJ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$		
(d)	$\overrightarrow{AG} = \frac{14}{27}\overrightarrow{AI} - \frac{172}{27}\overrightarrow{AJ}$		

✍ Lời giải



(a) $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{CI}$

Vì $BI = 2CI$ và $\overrightarrow{BI}$ và $\overrightarrow{CI}$ cùng hướng $\Rightarrow \overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{CI}$

» Chọn ĐÚNG.

(b) $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = 2\left(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

» Chọn SAI.

(c) $\overrightarrow{AJ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

Vì $5JB=JC$ và $\overrightarrow{JB}$ và $\overrightarrow{JC}$ cùng hướng

$$\Rightarrow 5\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{JC}\Leftrightarrow 5\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AJ}\right)=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AJ}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AJ}=5\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

» Chọn SAI.

(d) $\overrightarrow{AG}=\frac{14}{27}\overrightarrow{AI}-\frac{172}{27}\overrightarrow{AJ}$

Gọi M là trung điểm cạnh BC:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Ta có hệ: $\begin{cases}\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AJ}\\ -\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AJ}\\ -\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}10\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=8\overrightarrow{AJ}\\ -\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{9}\overrightarrow{AI}+\frac{8}{9}\overrightarrow{AJ}\\ \overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AJ}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{9}\overrightarrow{AI}+\frac{8}{9}\overrightarrow{AJ}\\ \overrightarrow{AC}=5\left(\frac{1}{9}\overrightarrow{AI}-4\overrightarrow{AJ}\right)+\frac{8}{9}\overrightarrow{AJ}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{9}\overrightarrow{AI}+\frac{8}{9}\overrightarrow{AJ}\\ \overrightarrow{AC}=\frac{13}{9}\overrightarrow{AI}-20\overrightarrow{AJ}\end{cases}$$

Vậy $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

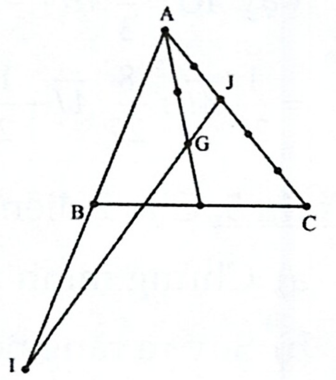
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\overrightarrow{AI}+\frac{8}{9}\overrightarrow{AJ}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{13}{9}\overrightarrow{AI}-\frac{20}{9}\overrightarrow{AJ}\right)=\frac{1}{27}\overrightarrow{AI}+\frac{8}{27}\overrightarrow{AJ}+\frac{13}{27}\overrightarrow{AI}-\frac{20}{3}\overrightarrow{AJ}=\frac{14}{27}\overrightarrow{AI}-\frac{172}{27}\overrightarrow{AJ}.$$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 43. Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi I,J là 2 điểm định bởi $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.Khi đó:

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	$\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AB}$		
(b)	$\overrightarrow{IJ}=-2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$		
(c)	$\overrightarrow{IG}=\frac{-5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$		
(d)	3 điểm I,J,G thẳng hàng		

Lời giải



(a) $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AI} = 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}\right) \Leftrightarrow -\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$

» **Chọn** SAI.

(b) $\overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AJ} + 2\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $\overrightarrow{IG} = \frac{-5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Gọi M là trung điểm BC

$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB}$

$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - 2\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = \frac{-5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) *3 điểm I,J,G thẳng hàng.*

Xét hệ: $\begin{cases} \overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{IG} = \frac{-5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} \\ \frac{3}{5}\overrightarrow{IG} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IG} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{6}{5}\overrightarrow{IG}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{IG}$ cùng phương $\Rightarrow I,J,G$ thẳng hàng.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 44.** Cho lục giác đều $ABCDEF$. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AE}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$		
(b)	$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$		
(c)	$\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$		

(d)	$\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$		

Lời giải

(a) $\overrightarrow{AD}=\vec{u}+\vec{v}$

Gọi O là tâm lục giác đều $ABCDEF$

Tứ giác $ABDE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\vec{u}+\vec{v}$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$

Tứ giác $ABCO$ là hình thoi

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$

» Chọn SAI.

(c) $\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}$ (tứ giác $ABOF$ là hình thoi nên $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{BA}$)

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right)-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

» Chọn SAI.

(d) $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

Tứ giác $AOEF$ là hình thoi nên

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$.

» Chọn SAI.

» Câu 45. Cho tam giác ABC. Hai điểm M,N được xác định bởi các hệ thức: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0},\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{AC}$		
(b)	Hai vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}$ cùng phương		
(c)	M thuộc đường thẳng AC		
(d)	Hai đường thẳng MN và AC song song		

Lời giải

(a) $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{AC}$

Ta có: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)-3\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AC}$.

» Chọn SAI.

(b) *Hai vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương*

Suy ra hai vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương (1).

» Chọn ĐÚNG.

(c) *M thuộc đường thẳng AC*

Xét: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

Do đó M là một đỉnh của hình bình hành $ABCM$

Hay M không thuộc đường thẳng $AC(2)$

» Chọn SAI.

(d) *Hai đường thẳng MN và AC song song.*

Từ (1) và (2) suy ra hai đường thẳng MN và AC song song.

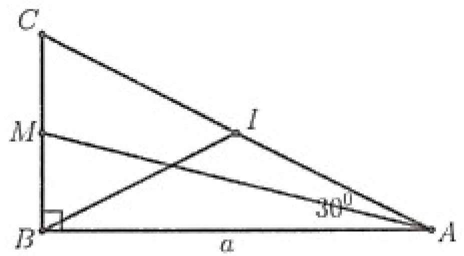
» Chọn ĐÚNG.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 46. Cho ΔABC vuông tại B có $\hat{A} = 30^\circ, AB = 1$. Gọi I là trung điểm của AC. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$*, kết quả làm tròn đến hàng phần mười*

✍ Lời giải

✓ Trả lời: 2,1



Xét ΔABC vuông tại $B: \tan A = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow BC = AB \cdot \tan A = 1.\tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

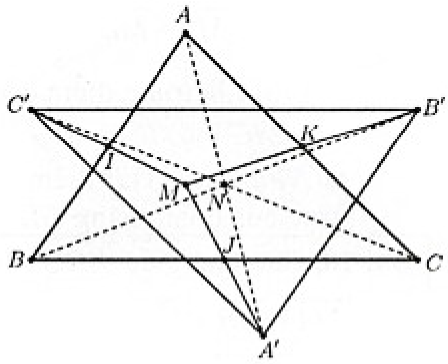
Gọi M là trung điểm của BC, ta có:

$$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|2\overrightarrow{AM}\right| = 2\left|\overrightarrow{AM}\right| = 2AM = 2\sqrt{AB^2 + BM^2} = 2\sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{39}}{3} \approx 2,1$$

» Câu 47. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý không thuộc các đường thẳng AB, BC, AC. Gọi A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các trung điểm J, K, I của cạnh BC, AC, AB. Biết ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm (đặt điểm đó là N). Khi đó MN luôn đi qua một điểm cố định khi M di động thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \dfrac{a}{b}\overrightarrow{MG}$ với $a; b$ là số tự nhiên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b^2$

✍ Lời giải

✓ Trả lời: 7



Xét tứ giác $MBA'C$ có hai đường chéo $BC, A'M$ cắt nhau tại trung điểm J của mỗi đường nên $MBA'C$ là hình bình hành, suy ra: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA'}$ (1); mặt khác $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA'}=2\overrightarrow{MN}$ (2).

Cộng theo vế (1) và (2):

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA'}=\overrightarrow{MA'}+2\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MN}$ (3).

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $2\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$.

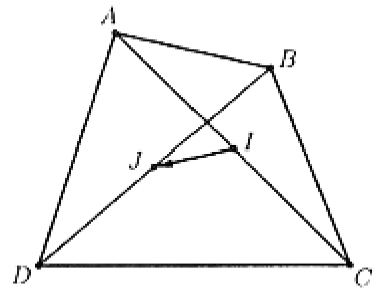
Vậy MN luôn đi qua điểm G cố định khi M di động.

Khi đó $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \rightarrow S=a+b^2=7$

» Câu 48. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD. Biết $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{IJ}$, khi đó $k=?$

Lời giải

✓Trả lời: 2



Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ} (1) \\ \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DJ} (2) \end{cases}$

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$2\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{DJ}\right) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ}=\vec{0}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

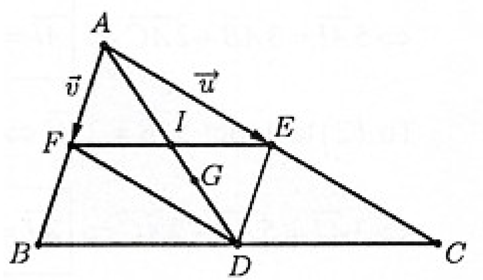
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IJ}$

Suy ra $k=2$

» Câu 49. Cho ΔABC có trọng tâm G. Các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AE}, \vec{v}=\overrightarrow{AF}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ta thu được kết quả dạng $a\vec{u}+b\vec{v}$ với $a;b$ là các số hữu tỷ. Tính giá trị $S=a+b$.

✍ ***Lời giải***

✓ ***Trả lời: 1***



Theo tính chất đường trung bình thì $\begin{cases} DE//AB \\ DF//AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DE//AF \\ DF//AE \end{cases}$

Suy ra: $AEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$.

Từ giả thiết ta có I là tâm của hình bình hành $AEDF$.

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\right)=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\Rightarrow\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow S=1$$

Khi đó: ;

» Câu 50. Nếu G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$ thì $k\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$, khi đó $k=?$

✍ ***Lời giải***

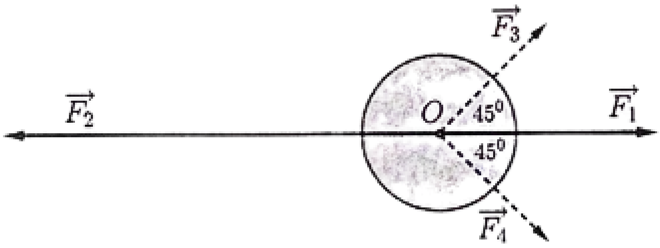
✓ ***Trả lời: 3***

Ta có $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}$

$=3\overrightarrow{GG'}+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)+\left(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}\right)=3\overrightarrow{GG'}+\vec{0}+\vec{0}=3\overrightarrow{GG'}$.

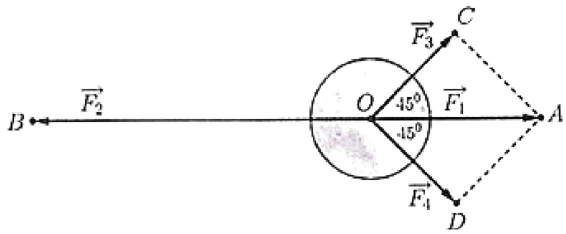
Suy ra $k=3$

» Câu 51. Một vật đang ở vị trí O chịu hai lực tác dụng ngược chiều nhau là $\vec{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$, trong đó độ lớn lực $\vec{F_2}$ lớn gấp đôi độ lớn lực $\vec{F_1}$. Người ta muốn vật dừng lại nên cần tác dụng vào vật hai lực $\vec{F_3},\vec{F_4}$ có phương hợp với lực $\vec{F_1}$ các góc 45° như hình vẽ, chúng có độ lớn bằng nhau và bằng $20N$. Tính tổng độ lớn của các lực $\vec{F_1},\overrightarrow{F_2}$. *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*



✍ ***Lời giải***

✓ ***Trả lời: 85***



Ta có: $\overrightarrow{F_2} = -2\overrightarrow{F_1}$. Để vật trở về trạng thái cân bằng thì hợp lực bằng $\vec{0}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_1}-2\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{F_1}$.

Đặt $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{OD}$.

Ta có: $\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{F_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}$. Do đó $OCAD$ là hình bình hành.

Mặt khác: $OC=OD=20$ và $\widehat{COD}=45^\circ+45^\circ=90^\circ$ nên $OCAD$ là hình vuông.

Khi đó: $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=OA=20\sqrt{2}\,N, \left|\overrightarrow{F_2}\right|=2\left|\overrightarrow{F_1}\right|=40\sqrt{2}\,N$.

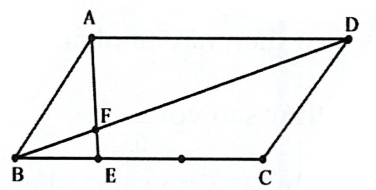
Vậy $\left|\overrightarrow{F_1}\right|+\left|\overrightarrow{F_2}\right|=20\sqrt{2}+40\sqrt{2}=80\sqrt{2}\approx 85$

» Câu 52. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F là 2 điểm thỏa $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$. Khi đó $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AF}$. Vậy $k=?$ *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục*

Lời giải

✓ Trả lời: 1,3

Ta phân tích $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{AF}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.



$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Xét hệ: $\begin{cases}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\\ \frac{4}{3}\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AF}$

» Câu 53. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Lấy các điểm I, J sao cho $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{ID}=\vec{0}; \overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Khi đó $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{IO}$, vậy $k=?$

Lời giải

✓ Trả lời: 4

» $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}+2\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{ID}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

» $\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}+2\left(\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{JB}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AD}$

» $\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

» $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{IO}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{IJ}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6\overrightarrow{IO}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}\\ \frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}\end{cases}\Rightarrow 6\overrightarrow{IO}=\frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{IJ}=4\overrightarrow{IO}$

» Câu 54. Cho ΔABC. Gọi J là điểm trên cạnh AC sao cho $JA=\frac{2}{3}JC$. Tính $\overrightarrow{BJ}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{BJ}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ ta thu được kết quả dạng $a\overrightarrow{BA}+b\overrightarrow{BC}$ với $a;b$ là các số hữu tỷ. Tính giá trị $S=a+b$.

Lời giải

✓Trả lời: 1

Cách 1. $JA=\frac{2}{3}JC\Leftrightarrow 3JA=2JC$ mà $\overrightarrow{JA}$ và $\overrightarrow{JC}$ ngược hướng

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JA}=-2\overrightarrow{JC}\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BJ}\right)+2\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BJ}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{BJ}=3\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

Cách 2: J thuộc cạnh AC và $JA=\frac{2}{3}JC\Rightarrow\frac{AJ}{AC}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow AJ=\frac{2}{5}AC$

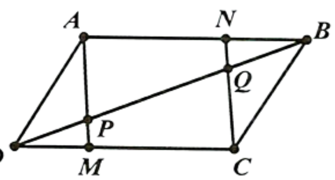
$\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

Khi đó $a=\frac{3}{5};b=\frac{2}{5}\Rightarrow S=a+b=1$

» Câu 55. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC,AB theo thứ tự lấy các điểm M,N sao cho $DM=BN$. Gọi P là giao điểm của AM,DB và Q là giao điểm của CN,DB. Khi đó $\overrightarrow{DB}=k\overrightarrow{QB}$. Vậy $k=?$

Lời giải

✓Trả lời: 1



Ta có $DM=BN\Rightarrow AN=MC$, mặt khác AN song song với MC

Do đó tứ giác $ANCM$ là hình bình hành

Suy ra $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$.

Xét tam giác ΔDMP và ΔBNQ ta có $DM=NB$ (giả thiết), $\widehat{PDM}=\widehat{QBN}$ (so le trong) Mặt khác $\widehat{DMP}=\widehat{APB}$ (đối đỉnh) và $\widehat{APQ}=\widehat{NQB}$ (hai góc đồng vị)

Suy ra $\widehat{DMP}=\widehat{BNQ}$.

Do đó $\Delta DMP=\Delta BNQ$ (c.g.c) suy ra $DB=QB$.

Dễ thấy $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{QB}$ cùng hướng vì vậy $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

----------------------------- Hết -----------------------------