

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (5 điểm)

Cho biểu thức 
$$A = \left( \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

- Tìm  $x$  để giá trị của  $A$  được xác định. Rút gọn biểu thức  $A$ .
- Tìm giá trị nguyên của  $x$  để  $A$  nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a)  $x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$

b)  $y^2 + 4^x + 2y - 2^{x+1} + 2 = 0$

c) 
$$\frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 16x + 72}{x + 8} = \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} + \frac{x^2 + 12x + 42}{x + 6}$$

Câu 3. (3 điểm)

1) Tìm số tự nhiên  $n$  để  $P$  là số nguyên tố biết:  $P = n^3 - n^2 + n - 1$

2) Tìm  $a, b$  sao cho  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$  chia hết cho đa thức  $g(x) = x^2 + x - 2$

3) Cho  $4a^2 + b^2 = 5ab$  và  $2a > b > 0$ . Tính  $P = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Câu 4. (6,5 điểm) Cho hình vuông  $ABCD$ , trên tia đối của tia  $CD$  lấy điểm  $M$  bất kỳ ( $CM < CD$ ), vẽ hình vuông  $CMNP$  ( $P$  nằm giữa  $B$  và  $C$ ),  $DP$  cắt  $BM$  tại  $H$ ,  $MP$  cắt  $BD$  tại  $K$ .

a) Chứng minh:  $DH$  vuông góc với  $BM$ .

b) Tính  $Q = \frac{PC}{BC} + \frac{PH}{DH} + \frac{KP}{MK}$

c) Chứng minh:  $MP \cdot MK + DK \cdot BD = DM^2$

Câu 5. (1,5 điểm)

1) Cho  $x, y > 0$ . Chứng minh rằng: 
$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3 \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

## ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 8 \neq 0 \\ 8 - 4x + 2x^2 - x^3 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Giá trị của  $A$  được xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 \neq -8 \\ 4(2-x) + x^2(2-x) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq -4 \\ (2-x)(4+x^2) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left( 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left[ \frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2-x) + x^2(2-x)} \right] \cdot \left( \frac{x^2 - x + 2}{x^2} \right) \\ &= \frac{(x^2 - 2x)(2-x) - 4x^2}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{x^2 + x - 2x - 2}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - x^3 - 4x + 2x^2 - 4x^2}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{x(x+1) - 2(x+1)}{x^2} \\ &= \frac{-x(x^2 + 4)}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} = \frac{x+1}{2x} \end{aligned}$$

b)

$$* \frac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+1 : 2x \Rightarrow 2x+2 : 2x \quad \text{mà } 2x : 2x$$

$$\Rightarrow 2 : 2x \Rightarrow 1 : x \Rightarrow \begin{cases} x = 1(tm) \\ x = -1(tm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{hoặc } x = -1$$

**Câu 2.****a)**

$$x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x)(x^2+2x+2)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^4=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x=-1$

**b)**

$$y^2+4^x+2y-2^{x+1}+2=0$$

$$\Leftrightarrow y^2+2y+1+(2^x)^2-2 \cdot 2^x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^2+(2^x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1=0 \\ 2^x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất  $(x;y)=(0;-1)$

**c)**

$$\frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+16x+72}{x+8} = \frac{x^2+8x+20}{x+4} + \frac{x^2+12x+42}{x+6} \quad (1)$$

ĐKXD:  $x \neq -2; x \neq -4; x \neq -6; x \neq -8$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2+2}{x+2} + \frac{(x+8)^2+8}{x+8} = \frac{(x+4)^2+4}{x+4} + \frac{(x+6)^2+6}{x+6}$$

$$\Leftrightarrow x+2 + \frac{2}{x+2} + x+8 + \frac{8}{x+8} = x+4 + \frac{4}{x+4} + x+6 + \frac{6}{x+6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x+4} = \frac{6}{x+6} - \frac{8}{x+8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+8-4x-8}{(x+2)(x+4)} = \frac{6x+48-8x-48}{(x+6)(x+8)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x}{(x+2)(x+4)} = \frac{-2x}{(x+6)(x+8)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x+2)(x+4)=(x+6)(x+8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 8x=-40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases} (tm)$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm  $x = 0; x = -5$

### Câu 3.

1) Biến đổi được  $p = (n^2 + 1)(n - 1)$

Nếu  $n = 0; 1$  không thỏa mãn đề bài

Nếu  $n = 2$  thỏa mãn đề bài vì  $p = (2^2 + 1)(2 - 1) = 5$

Nếu  $n > 3$  không thỏa mãn đề bài vì khi đó  $p$  có từ 3 ước trở lên là  $1; n - 1 > 1$  và  $n^2 + 1 > n - 1 > 1$

Vậy  $n = 2$  thì  $p = n^3 - n^2 + n - 1$  là số nguyên tố.

2) \*  $g(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x - 2)$

\*  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4; g(x)$

$$\Leftrightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x - 1)(x - 2)Q(x) \quad (1) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

- Thay  $x_1 = 1; x_2 = 2$  vào (1) ta có:

$$a + b + 6 = 0 \quad \text{và} \quad 8a + 4b + 16 = 0 \Rightarrow a = 2 \quad \text{và} \quad b = -8$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4; g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \end{cases}$$

Vậy

3)

Biến đổi được:

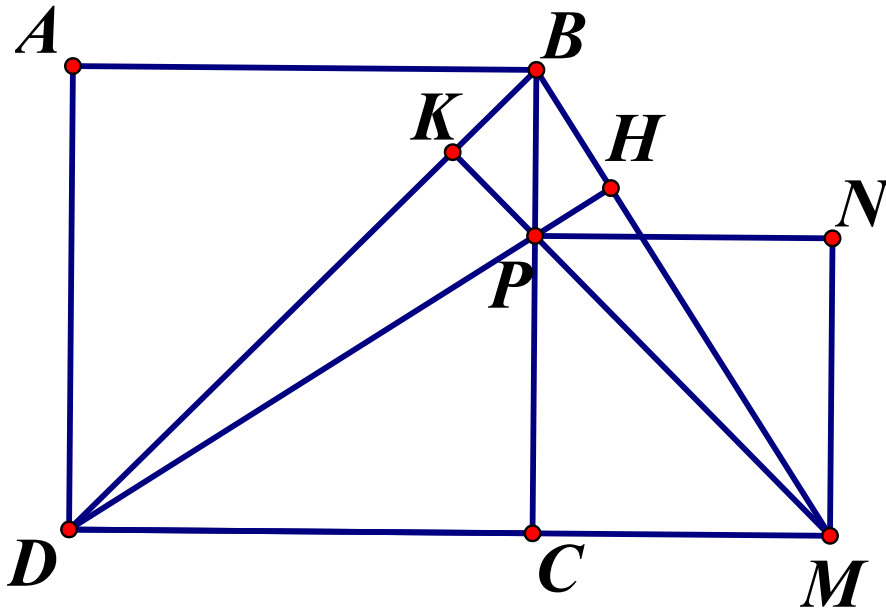
$$4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow (4a - b)(a - b) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a \\ b = a \end{cases}$$

Mà  $2a > b > 0 \Rightarrow 4a > 2b > b$  nên  $a = b$

$$\text{Ta có: } P = \frac{a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{1}{3}$$

Vậy  $4a^2 + b^2 = 5ab$  và  $2a > b > 0$  thì  $P = \frac{1}{3}$

Câu 4.



a) Chứng minh được : DH vuông góc với  $BM$

Chứng minh được:  $CD = BC; PC = CM; \sphericalangle DCB = \sphericalangle BCM = 90^\circ$   
 $\Rightarrow \triangle DPC = \triangle BMC (c.g.c) \Rightarrow \sphericalangle BHP = 90^\circ$

$$MP \perp BD \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}DM \cdot PC}{\frac{1}{2}DM \cdot BC} = \frac{S_{\triangle PDM}}{S_{\triangle BDM}}$$

b) Chứng minh được:

$$\frac{PH}{DH} = \frac{\frac{1}{2} \cdot DB \cdot KP}{\frac{1}{2} \cdot DB \cdot MK} = \frac{S_{\triangle PBM}}{S_{\triangle BDM}}; \frac{PH}{DH} = \frac{\frac{1}{2} \cdot DB \cdot KP}{\frac{1}{2} \cdot DB \cdot MK} = \frac{S_{\triangle PBD}}{S_{\triangle BDM}}$$

Tương tự

$$\Rightarrow Q = \frac{S_{\triangle PDM} + S_{\triangle PBM} + S_{\triangle PBD}}{S_{\triangle BDM}} = 1.$$

c) Chứng minh:  $\triangle MCP \sim \triangle MKD (g.g) \Rightarrow MP \cdot MK = MC \cdot MD$  (1)

Chứng minh:  $\triangle DBC \sim \triangle DKM (g.g) \Rightarrow DK \cdot BD = DC \cdot DM$  (2)

Từ (1) & (2)

$$\Rightarrow MP \cdot MK + DK \cdot BD = DM \cdot (MC + DC)$$

$$\Rightarrow MP \cdot MK + DK \cdot BD = DM^2$$

**Câu 5.**

1)

Học sinh chứng minh  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$  với mọi  $x, y > 0$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \geq 0; \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 - \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) - 2 \cdot \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3 \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow x = y > 0$

2)

$$B = xy(x - 2)(y + 6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

$$*) x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 \geq 2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$y^2 + 6y + 9 = (y + 3)^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 + 6y + 12 \geq 3 \text{ với mọi } y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$+B = xy(x - 2)(y + 6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

$$= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y) + 12(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 6y) + 36 + 2009$$

$$= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y + 12) + 3(y^2 + 6y + 12) + 2009$$

$$= (x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) + 2009 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3)  $\Rightarrow B \geq 2 \cdot 3 + 2009 \Rightarrow B \geq 2015$

$$*) B = 2015 \Leftrightarrow x = 1 \text{ \& } y = -3$$

$$*) \text{Min} B = 2015 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$